

УДК 539.3

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ
ПРИ ИЗГИБЕ ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

Н. В. Курбатова, Ю. А. Устинов, Е. С. Чумакова

На основе метода однородных решений и численным интегрированием методом конечных элементов двумерных краевых задач, с помощью которых описываются решения задач Сен-Венана о чистом изгибе и изгибе поперечной силой естественно закрученного стержня, строится решение и на его основе проводится анализ напряженно-деформированного состояния стержня прямоугольного поперечного сечения для произвольных значений относительного угла закручивания τ_0 .

Ключевые слова: задача Сен-Венана, естественно закрученный стержень, изгиб поперечной силой, метод конечных элементов.

1. Введение

В работах [1–4] были сделаны первые попытки построения решений задач Сен-Венана о растяжении, кручении и изгибе естественно закрученных стержней. Наиболее полно были исследованы задачи растяжения и кручения в рамках метода малого параметра, в качестве которого использовалась безразмерная крутка $\tau_0 = \tau h$, где τ — относительный угол закручивания; h — некоторый характерный линейный размер сечения. Попытки исследования задач изгиба без привлечения дополнительных гипотез не привели к существенным результатам.

Однако потребность в решении конкретных практических задач, связанных с созданием методов расчета напряженно-деформированного состояния спиральных сверел, витых лопаток осевых компрессоров и газовых турбин и др., дала существенный толчок к развитию прикладных теорий, в основе которых наряду с понятием *плоское сечение* используется понятие *ортогональное сечение*. Наиболее полное развитие эта теория получила в работах [5–9].

В работах [10–11] методами однородных решений и спектральной теории операторов решение задачи Сен-Венана представлено в виде бесконечного ряда по элементарным решениям. В этом представлении выделена группа из двенадцати элементарных решений, половина которых описывает смещение естественно закрученного стержня (ниже будет использоваться аббревиатура ЕЗС) как твердого тела, а напряженное состояние в поперечном сечении, отвечающее остальным шести элементарным решениям, таково, что их главный вектор и главный момент отличны от нуля и могут быть уравновешены внешними усилиями, приложенными к торцам стержня.

Совокупность этих элементарных решений названа решением Сен-Венана. В свою очередь это понятие включает в себя шесть элементарных решений: решение Сен-Венана

задачи растяжения–сжатия, решение Сен-Венана задачи кручения, решение Сен-Венана задачи чистого изгиба (две задачи), решение Сен-Венана задачи изгиба поперечными силами (две задачи). Построение решений каждой из перечисленных задач сведено к двумерным краевым задачам на поперечном сечении ЕЗС. Заметим, что для построения аналогичных решений в случае призмы Сен-Венан использовал «полуобратный метод» [12–14].

В [11, 19] дано строгое математическое обоснование принципа Сен-Венана, основанное на доказательстве того, что главный вектор и главный момент напряжений, отвечающие части общего решения, представленной в виде бесконечного ряда, равны нулю, и эта часть общего решения локализуется у торцов стержня.

Для всех шести задач Сен-Венана в [11] построены аналитические решения в виде двух членов разложений по малому параметру $\tau_0 = h\tau$. В первом приближении при некоторых дополнительных упрощениях эти решения совпадают с решениями теории Кирхгоффа — Клебша.

Система уравнений пространственной теории упругости в [15] сведена к системам двумерных уравнений на сечении ЕЗС. При малых значениях круток в случае задачи кручения с эллиптическим поперечным сечением получены асимптотические оценки эффективных жесткостей. Для вытянутых эллиптических сечений в рамках рассматриваемой асимптотики $H_1/H_2 \ll 1$ методом сеточной прогонки были получены зависимости крутильной жесткости для $\tau_0 \in [0, 6]$. Заметим, что вывод о том, что при малых крутках на кручение и растяжение работает практически все сечение, а при больших — только ядро сечения, которое с ростом τ_0 стягивается круг, вписанный в поперечное сечение, согласуется с результатами, полученными авторами предлагаемой статьи.

Для ЕЗС с прямоугольным поперечным сечением в [16, 17] методом конечных элементов решены задачи растяжения-кручения, в [18] — задача чистого изгиба.

В настоящей работе методом конечных элементов строятся решения двумерных краевых задач, описывающих решения задач Сен-Венана о чистом изгибе и изгибе поперечной силой естественно закрученного стержня. Рассматриваемая проблема имеет несколько особенностей: во-первых, краевая задача является «задачей на спектре», т. е. соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение; во-вторых, искомые функции — комплекснозначные; и в-третьих, дифференциальные уравнения соответствующих краевых задач содержат параметр τ , большим значениям которого отвечает сильная осцилляция боковой поверхности, порождающая сильную неоднородность напряженного-деформированного состояния по сечению ЕЗС. Это требует учитывать специфику рассматриваемых задач. Так, то обстоятельство, что задача является задачей на спектре, приводит к тому, что минимизацию функционала следует осуществлять не на всем гильбертовом пространстве, а на подпространстве, ортогональном нетривиальному решению однородной задачи. Комплекснозначность приводит к увеличению размерности задачи, а матрица системы после дискретизации вариационного уравнения является плохо обусловленной, и это требует дополнительных усилий для выбора метода решения СЛАУ, а также оценки его точности.

2. Геометрическое описание естественно закрученного стержня и представление решений Сен-Венана задач изгиба в виде линейной комбинации элементарных решений

Пусть x_1, x_2, x_3 — декартова система координат с осями i_1, i_2, i_3 , которую будем называть основной. Объем ЕЗС V получается винтовым движением плоской фигуры S

вдоль оси x_3 , проходящей через центр тяжести сечения и перпендикулярной к ее плоскости; L — длина ЕЗС. В качестве параметра винта выбираем τ — относительный угол закручивания (крутку); $\varphi = \tau x$ — угол поворота сечения, находящегося на расстоянии x по оси Ox_3 от начала координат.

Введем сопутствующую систему координат

$$\xi_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \quad \xi_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \quad \xi = x_3,$$

с осями ξ_1, ξ_2 , жестко связанную с фигурой S во время ее винтового движения и с осями ξ_1, ξ_2 , направленными по главным осям инерции; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{i}_3$ — орты осей сопутствующей системы.

Обозначим через $\Gamma = \partial S \times [0, L]$ боковую поверхность ЕЗС, где ∂S граница S . Предполагается, что Γ свободна от напряжений.

Выражения основных соотношений теории упругости в сопутствующей системе приведены в [11]. Здесь мы ограничимся общим видом решений задач Сен-Венана об изгибе в виде линейной комбинации элементарных решений, которые определяются на основе решений двумерных краевых задач. Для вектора смещений имеем

$$\mathbf{u} = \text{Re} (C_1 \mathbf{u}_1 + C_2 \mathbf{u}_2 + C_3 \mathbf{u}_3 + C_4 \mathbf{u}_4), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= e^{i\tau\xi} \mathbf{a}_1, & \mathbf{u}_2 &= e^{i\tau\xi} (\xi \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{u}_3 &= e^{i\tau\xi} \left(\frac{\xi^2}{2} \mathbf{a}_1 + \xi \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \right), \\ \mathbf{u}_4 &= e^{i\tau\xi} \left(\frac{\xi^3}{6} \mathbf{a}_1 + \frac{\xi^2}{2} \mathbf{a}_2 + \xi \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ составляют жордановую цепочку, отвечающую четырехкратному собственному значению $\gamma = i\tau$ спектральной задачи на сечении ЕЗС

$$\begin{aligned} L_\tau(\gamma) \mathbf{a} &\equiv \gamma^2 C \mathbf{a} + \gamma B_\tau \mathbf{a} + A_\tau \mathbf{a} = 0, \\ M_\tau(\gamma) \mathbf{a} &= (\gamma G_\tau + E_\tau) \mathbf{a} |_{\partial S} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$C = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \varkappa) \end{array} \right\|,$$

$$B_\tau = \left\| \begin{array}{ccc} 2\tau D & -2\tau & (1 + 2\varkappa) \partial_1 \\ \tau & \tau D & (1 + 2\varkappa) \partial_2 \\ (1 + 2\varkappa) \partial_1 & (1 + 2\varkappa) \partial_2 & 4(1 + \varkappa) \tau D \end{array} \right\|,$$

$$A_\tau = \|A_{ij}\|,$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2(1 + \varkappa) \partial_1^2 + \partial_2^2 + \tau^2 (D^2 - 1), & A_{12} &= (1 + 2\varkappa) \partial_1 \partial_2 - 2\tau^2 D, \\ A_{13} &= \tau(1 + 2\varkappa) \partial_1 D, & A_{21} &= (1 + 2\varkappa) \partial_1 \partial_2 + 2\tau^2 D, \\ A_{22} &= \partial_1^2 + 2(1 + \varkappa) \partial_2^2 + \tau^2 (D^2 - 1), & A_{23} &= \tau(1 + 2\varkappa) \partial_2 D, \\ A_{31} &= \tau(1 + 2\varkappa) D \partial_1, & A_{32} &= \tau(1 + 2\varkappa) D \partial_2, \\ A_{33} &= \partial_1^2 + \partial_2^2 + 2(1 + \varkappa) \tau^2 D^2, \end{aligned}$$

$$G_\tau = \left\| \begin{array}{ccc} \tau b_n & 0 & 2\kappa n_1 \\ 0 & \tau b_n & 2\kappa n_2 \\ n_1 & n_2 & 2(1 + \kappa)\tau b_n \end{array} \right\|, \quad E_\tau = \|E_{ij}\|,$$

$$E_{11} = 2(1 + \kappa)n_1\partial_1 + n_2\partial_2 + n_3\tau^2 b_n D,$$

$$E_{12} = 2\kappa n_1\partial_2 + n_2\partial_1 - \tau^2 b_n,$$

$$E_{13} = 2\kappa n_1\tau D + \tau b_n\partial_1,$$

$$E_{21} = n_1\partial_2 + 2\kappa n_2\partial_1 + \tau^2 b_n,$$

$$E_{22} = n_1\partial_1 + 2(1 + \kappa)n_2\partial_2 + \tau^2 b_n D,$$

$$E_{23} = 2\kappa n_2\tau D + \tau b_n\partial_2,$$

$$E_{31} = n_1\tau D + n_2\tau + 2\kappa\tau b_n\partial_1,$$

$$E_{32} = -n_1\tau + N_2\tau D + 2\kappa\tau b_n\partial_2,$$

$$E_{33} = n_1\partial_1 + n_2\partial_2 + 2(1 + \kappa)\tau^2 b_n D,$$

где

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad D = \xi_2\partial_1 - \xi_1\partial_2,$$

$$b_n = n_2\xi_{10} - n_1\xi_{20}, \quad \kappa = \frac{\nu}{1 - 2\nu}.$$

Здесь n_1, n_2 — проекции вектора единичной нормали к контуру ∂S на оси сопутствующей системы координат; ξ_{10}, ξ_{20} — координаты точек этого контура; ν — коэффициент Пуассона. Векторы в (1)

$$\mathbf{a}_1 = (1, i, 0)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (0, 0, -\xi_1 - i\xi_2)^T \quad (4)$$

являются соответственно собственным и первым присоединенным. Присоединенные векторы $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3(\xi_1, \xi_2)$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_4(\xi_1, \xi_2)$ определяются в результате решения следующих краевых задач

$$L_\tau(i\tau)\mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j, \quad M_\tau(i\tau)\mathbf{a}_j|_{\partial S} = \mathbf{f}_j \quad (j = 3, 4), \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_3 = (2\kappa, 2i\kappa, 0)^T, \quad \mathbf{f}_3 = (2\kappa n_1, 2i\kappa n_2, 2\tau(1 + \kappa)b_n\zeta)^T,$$

$$\mathbf{F}_4 = -(2i\tau C + B_\tau)\mathbf{a}_3 - C\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{f}_4 = -iG_\tau\mathbf{a}_3|_{\partial S}, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2.$$

Заметим, что обе задачи (5) относятся к классу «задач на спектре», поскольку при $\mathbf{F}_j = 0$, $\mathbf{f}_j = 0$ имеют нетривиальное решение \mathbf{a}_1 . Вместе с тем, обе задачи разрешимы (неоднозначно с точностью до слагаемого, пропорционального \mathbf{a}_1); далее в рамках вариационной постановки этих задач будет сформулировано условие единственности.

Первые два слагаемых в (1) относятся к классу тривиальных элементарных решений, поскольку согласно (2) и (4) соответствующее им напряженно-деформированное состояние (НДС) равно нулю, в то время как последним двум элементарным решениям соответствует ненулевое НДС. Вектору (1) отвечают тензоры деформаций $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, которые можно представить в следующем виде

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{Re} [C_3 e^{i\tau\xi} \hat{\mathbf{e}}_3 + C_4 e^{i\tau\xi} (\xi \hat{\mathbf{e}}_3 + \hat{\mathbf{e}}_4)], \quad (6)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mu \text{Re} [C_3 e^{i\tau\xi} \hat{\mathbf{b}}_3 + C_4 e^{i\tau\xi} (\xi \hat{\mathbf{b}}_3 + \hat{\mathbf{b}}_4)],$$

$$\hat{\mathbf{e}}_j = e_{j,kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad \hat{\mathbf{b}}_j = b_{j,kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (7)$$

Здесь индекс j указывает номер искомого присоединенного решения задач (5), а по повторяющимся индексам производится суммирование,

$$\begin{aligned}
e_{3,11} &= \partial_1 a_{3,1}, & e_{3,22} &= \partial_2 a_{3,2}, & e_{3,33} &= \tau(D+i)a_{3,3} - \zeta, \\
2e_{3,12} &= \partial_1 a_{3,2} + \partial_2 a_{3,1}, & 2e_{3,13} &= \partial_1 a_{3,3} + \tau(D+i)a_{3,1} - \tau a_{3,2}, \\
2e_{3,23} &= \partial_2 a_{3,3} + \tau a_{3,1} + \tau(D+i)a_{3,2}, \\
e_{4,11} &= \partial_1 a_{4,1}, & e_{4,22} &= \partial_2 a_{4,2}, & e_{4,33} &= a_{3,3}, \\
2e_{4,12} &= \partial_1 a_{4,2} + \partial_2 a_{4,1}, \\
2e_{4,13} &= \partial_1 a_{4,3} + \tau(D+i)a_{4,1} - \tau a_{4,2} + a_{3,1}, \\
2e_{4,23} &= \partial_2 a_{4,3} + \tau a_{4,1} + \tau(D+i)a_{4,2} + a_{3,2}, \\
b_{j,11} &= 2[(1+\kappa)e_{j,11} + \kappa e_{j,22} + \kappa e_{j,33}], \\
b_{j,22} &= 2[\kappa e_{j,11} + (1+\kappa)e_{j,22} + \kappa e_{j,33}], \\
b_{j,33} &= 2[\kappa e_{j,11} + \kappa e_{j,22} + (1+\kappa)e_{j,33}], \\
b_{j,kl} &= 2e_{j,kl}, \quad (j=3,4, \quad k,l=1,2,3).
\end{aligned}$$

Пусть на торце ЭЗС $x_3 = L$ заданы напряжения

$$\sigma_{j3} = p_j(x_1, x_2) \quad (j=1,2,3) \quad (8)$$

и $Q_1 = Q_{x_1}$, $Q_2 = Q_{x_2}$ — компоненты вектора поперечной силы, $M_1 = M_{x_1}$, $M_2 = M_{x_2}$ — компоненты изгибающего момента, отвечающие этим напряжениям. Тогда, как показано в [11], постоянные C_3 , C_4 определяются из следующих алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
\mu d_{33} C_3 &= M_2 + iM_1 + d_{31}(Q_1 - iQ_2), \\
\mu d_{33} C_4 &= -Q_1 + iQ_2,
\end{aligned} \quad (9)$$

где

$$d_{33} = - \int_S \zeta^* b_{3,33} dS, \quad d_{31} = - \int_S \zeta^* b_{4,33} dS, \quad (10)$$

здесь d_{31} , d_{33} — элементы матрицы жесткостей ЭЗС. Поскольку НДС, отвечающее слагаемым, содержащим постоянные C_1 , C_2 , тождественно равно нулю, то сами постоянные могут быть определены при удовлетворении граничным условиям на торце $x_3 = 0$, таким, например, как условия жесткой или упругой заделки.

3. Вариационная постановка задачи и анализ МКЭ решения

Построение решений задач (5) эквивалентно нахождению стационарных значений квадратичных функционалов

$$\Psi(\mathbf{a}_j, \lambda) = \Phi(\mathbf{a}_j) + \lambda \Phi_1(\mathbf{a}_j), \quad j=3,4, \quad (11)$$

$$\Phi(\mathbf{a}_j) = \int_S \widehat{\mathbf{b}}_j \cdot \widehat{\mathbf{e}}_j^* dS, \quad \text{а} \quad \Phi_1(\mathbf{a}_j) = (\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_1)_H = \int_S \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_1^* dS = 0,$$

— условие, обеспечивающее единственность решения на подпространстве гильбертова пространства H , ортогональном нетривиальному решению однородной задачи \mathbf{a}_1 , учитывается с помощью метода множителей Лагранжа; здесь $\cdot, *$ — знаки свертки и комплексного сопряжения, а $(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_1)_H$ — скалярное произведение в H .

Стационарное значение функционала (11) при $j = 3$ соответствует случаю задачи чистого изгиба, решение которой построено аналогично [18], а решение задачи Сен-Венана изгиба поперечной силой (2) ищем как решение вариационного уравнения $\delta(\Psi(\mathbf{a}_j, \lambda)) = 0$, $j = 4$ методом конечных элементов с учетом конечно-элементного решения \mathbf{a}_3 .

Произвол в решении (1) устраняется в результате удовлетворения граничным условиям (8) и условию жесткой заделки на торце $x_3 = 0$; C_3, C_4 определяются как решение системы (9), где d_{31} и d_{33} вычисляются в соответствии с (10).

Конечно-элементная дискретизация вариационной задачи выполняется с использованием четырехузловых прямоугольных элементов, с каждым узлом связано шесть неизвестных; аппроксимация компонент векторов \mathbf{a}_j представляется линейной комбинацией узловых неизвестных и билинейных базисных функций. Для получения элементов локальных матриц разработана авторская методика [22].

В силу плохой обусловленности полученной системы линейных алгебраических уравнений, конечномерного аналога исходной вариационной задачи, при $\tau_0 = \tau H > 2.5$ ($H = \max(H_1, H_2)$, H_1, H_2 — размеры прямоугольного сечения) был проведен анализ прямых и итерационных методов. В результате установлено, что метод сопряженных градиентов обеспечивает наилучшую сходимость численного решения. Выбор разбиения осуществлялся на основе апостериорной оценки точности конечно-элементного решения в зависимости от густоты сетки и было установлено, что относительную погрешность дискретизации, не превышающую 9% обеспечивает система из 7326 уравнений.

В работе [23] был проведен сравнительный анализ результатов расчета НДС по предлагаемой методике и средствами пакета ANSYS при $0 \leq \tau_0 \leq 3$; для больших значений τ_0 в ANSYS возникли непреодолимые проблемы с триангуляцией.

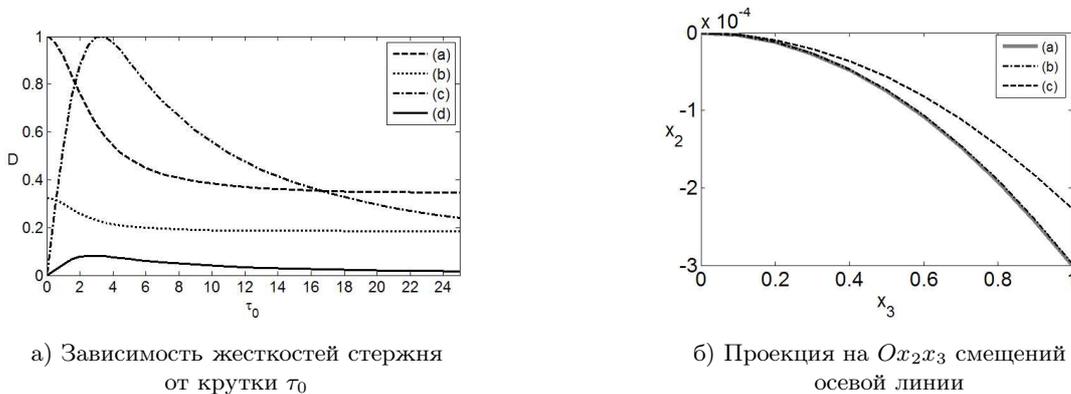


Рис. 1.

На основе построенного конечно-элементного решения были рассчитаны элементы матрицы жесткостей d_{31} и d_{33} от τ_0 . Помимо квадратных были рассмотрены и вытянутые сечения. На рис. 1 а) приведены графики d_{31} — (с), d_{33} — (а) ЕЗС следующих размеров: $L = 1$ м, $H_1 = 0.1$ м, $H_2/H_1 = 1$ и d_{31} — (д), d_{33} — (б) при $H_2/H_1 = 2$.

Для сравнения результатов по предлагаемой методике с результатами, вытекающими из теории Кирхгоффа — Клебша [24], была рассмотрена задача о чистом изгибе

ЕЗС, когда один торец ($x = 0$) жестко закреплен, а к другому ($x = L$) приложена нагрузка, статически эквивалентная изгибающему моменту M_1 . Расчеты проводились для фиксированных значений $L = 1$ м, $H_1 = H_2 = 0.1$ м, $E = 2 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu = 0.3$, $M_1 = 100$ Н·м и изменяющихся τ_0 . Результаты расчета приведены на рисунке 1 б); случаи (а) и (б) представляют смещения оси стержня в направлении оси Ox_2 , рассчитанные при $\tau_0 = 0.02$ по теории Кирхгоффа — Клебша и с помощью описанного подхода, они совпадают; график (с) показывает смещение в случае $\tau_0 = 0.1$, когда эта теория уже не работает. Заметим, что решение задачи изгиба в рамках теории Кирхгоффа — Клебша совпадает с построенным конечно-элементным решением при $\tau_0 < 0.08$.

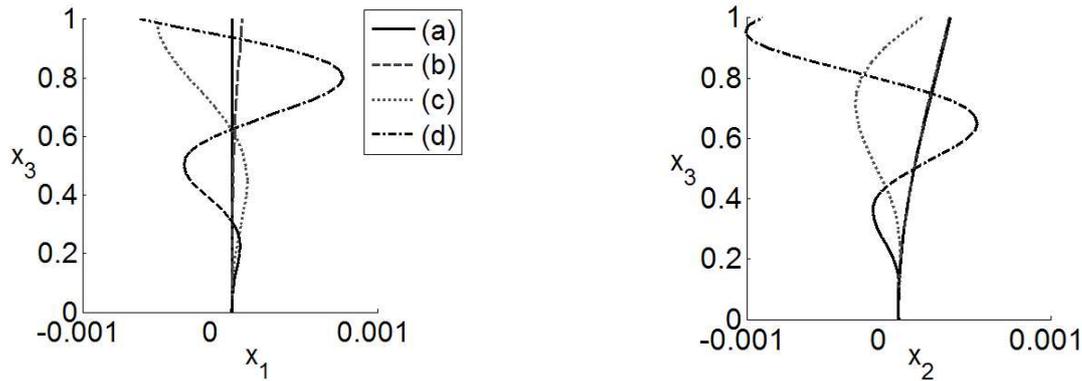


Рис. 2. Проекция смещений осевой линии при изгибе поперечной силой на плоскости Ox_1x_3 и Ox_2x_3 .

На рис. 2 представлены результаты расчетов стержня под действием поперечной силы $Q_2 = 100$ Н, иллюстрирующие смещения осевой линии ЕЗС для серии значений крутки. Графики 2-(а) соответствуют изгибу незакрученного стержня $\tau_0 = 0$; в остальных случаях крутка менялась следующим образом: 2-(б) — $\tau_0 = 0.02$ ($\tau = 0.2$); 2-(с) — $\tau_0 = 0.5$ ($\tau = 5$); 2-(д) — $\tau_0 = 1$ ($\tau = 10$).

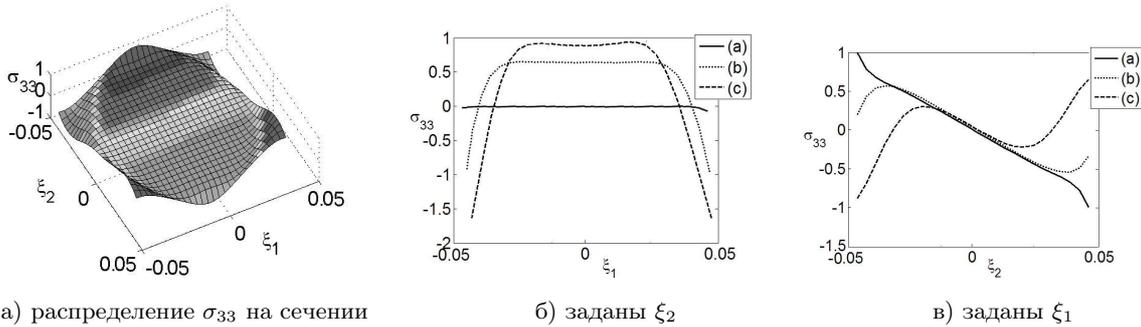


Рис. 3. Графики распределения нормальных напряжений σ_{33} при $\tau_0 = 6$.

На рис. 3 а) представлено распределение нормированных напряжений $\sigma_{33}^* = \sigma_{33}/\mu$ в сечении $x_3 = 0.5235$ м при изгибе поперечной силой $Q_2 = 100$ Н с максимальным значением σ_{33}^* равным $2.7397 \cdot 10^{-9}$. Рис. 3 б) иллюстрирует распределения напряжений $\sigma_{33}^*(\xi_1, \xi_2)$ по переменной ξ_1 при фиксированных значениях ξ_2 ; график (а) соответствует $\xi_2 = 0$ м; (б): $\xi_2 = 0.025$ м; (с): $\xi_2 = 0.0325$ м. Графики $\sigma_{33}^*(\xi_1, \xi_2)$ на рис. 3 в) вычислены при заданных ξ_1 — (а): $\xi_1 = 0$ м; (б): $\xi_1 = 0.025$ м; (с): $\xi_1 = 0.0325$ м.

Расчеты показали, что с ростом τ_0 , при $\tau_0 > 4$ происходит формирование круга, вписанного в сечение, для которого, как и для малых τ_0 , характерна линейная зависимость величины нормального напряжения, пропорциональная расстоянию от нейтральной линии и имеющая противоположные знаки в точках симметричных относительно нее (рис. 3). Это, на наш взгляд, подтверждает гипотезу [15] о том, что с ростом τ работает ядро сечения, которое стягивается ко вписанному в сечение кругу, что является следствием быстрой осцилляции боковой поверхности ЕЗС. Этим же объясняется стабилизация значений жесткости на изгиб с ростом крутки.

Литература

1. Риз П. М. Деформация естественно закрученных стержней // Докл. АН СССР.—1939.—Т. 23, № 1.—С. 18–21.
2. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР.—1939.—Т. 24, № 1.—С. 23–26.
3. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР.—1939.—Т. 24, № 3.—С. 226–228.
4. Джанелидзе Г. Ю., Лурье А. И. Задачи Сен-Венана для естественно скрученных стержней // Докл. АН СССР.—1939.—Т. 24, № 4.—С. 325–326.
5. Уздалев А. И., Иноземцев Г. Г., Зубков А. В., Алахазова О. В. Напряженное состояние естественно закрученного стержня // ПММ.—1988.—Т. 24, вып. 14.—С. 103–108.
6. Елисеев В. В. Изгиб естественно-закрученного стержня // Тр. Ленингр. политехн. ин-та.—1988.—№ 425.—С. 44–46.
7. Замегалина Н. П., Прокопов В. К. Напряженное состояние естественно скрученных стержней типа спиральных сверл // Изв. АН АрмССР.—1974.—Т. 27, № 3.—С. 3–9.
8. Корольков В. И. К решению задачи о растяжении естественно закрученного стержня произвольного поперечного сечения в трехмерной постановке // ПММ.—1988.—Т. 4, вып. 12.—С. 113–115.
9. Шорр Б. Ф. К теории закрученных неравномерно нагретых стержней // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.—1960.—Т. 1.—С. 141–151.
10. Друзь А. Н., Поляков Н. А., Устинов Ю. А. Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // ПММ.—1996.—Т. 60, вып. 4.—С. 660–668.
11. Устинов Ю. А. Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров.—М.: Наука, 2003.—128 с.
12. *Saint-Venant*. Memoire sur la torsion des prismes, avec des considerations sur leur flexion, ainsi que sur l'equilibre interieur des solides elastiques en general, et des formules pratiques pour le calcul de leur resistance a divers efforts s'exerçant simultanément // Mem. Savants Etrang.—1856.—Vol. 14.—P. 233–560.
13. *Saint-Venant* Memoire sur la flexion des prismes // Liouville J. Math.—Vol. 1.—P. 89–189.
14. Сен-Венан В. Мемуар о кручении призмы. Мемуар об изгибе призмы.—М.: Физматлит, 1961.—518 с.
15. Бердичевский В. Л., Старосельский Л. А. Изгиб, растяжение и кручение естественно-закрученных стержней // ПММ.—1985.—Т. 49, вып. 6.—С. 978–991.
16. Устинов Ю. А., Курбатова Н. В. Задачи Сен-Венана для стержней с физической и геометрической анизотропией // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Мат. модел.—2001.—С. 154–157.—(Спецвыпуск).
17. Natalya V. Kurbatova. On a stretching-torsion of a naturally twisted rod // Advanced Problems in Mechanics.—2005.—P. 59–60.
18. Курбатова Н. В., Романова Н. М. Конечно-элементное решение задачи изгиба для естественно-закрученного стержня // Тр. IX междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды».—Ростов н/Д.: Изд-во ЦВВР, 2005.—Т. 1.—С. 123–126.
19. Устинов Ю. А. Обоснование принципа Сен-Венана для естественно-закрученного стержня // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, вып. 1.—С. 58–71.
20. Воробьев Ю. С., Шорр Б. Ф. К теории закрученных неравномерно нагретых стержней.—Киев: Наукова думка, 1983.—188 с.
21. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости.—М.: Наука, 1975.—575 с.
22. Курбатова Н. В. Эффективные схемы конечно-элементной дискретизации // Современные проблемы механики сплошной среды.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2010.—Т. 2.—С. 189–193.

23. Курбатова Н. В., Чумакова Е. С. Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния в задаче изгиба естественно закрученного стержня // Современные проблемы механики сплошной среды.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2009.—Т. 2.—С. 129–133.
24. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 1.—М: Машиностроение, 1968.—831 с.

Статья поступила 9 июля 2012 г.

Устинов Юрий Анатольевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт ВНИЦ РАН и РСО-А,
главный научный сотрудник отдела диф. уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: ustinov@math.sfedu.ru

Курбатова Наталья Викторовна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры мат. моделирования
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: nvk@math.sfedu.ru

Чумакова Екатерина Сергеевна
Южный федеральный университет
ассистент кафедры мат. моделирования
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: kate2811rsu@yandex.ru

ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF THE NATURALLY TWISTED ROD BENDING BY TRANSVERSE FORCE ON THE BASIS OF THE FINITE ELEMENT METHOD

Ustinov Yu. A., Kurbatova N. V., Chumakova E. S.

Numeric solution based on homogeneous solutions method and numeric integration by finite element method of two-dimension boundary problems, which are described Saint-Venant's solutions on pure bending and bending by transverse force of the naturally twisted rod with rectangular cross-section was constructed. The analysis of stress-strain state of the rod was realized for different values of parameter τ_0 .

Key words: the Saint-Venant's problem, the naturally twisted rod, the pure bending and bending by transverse force, the finite element method.