

УДК 517.98

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ЛИФТИНГ  
В ИЗМЕРИМОМ РАССЛОЕНИИ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

А. Е. Гутман

Показано, что всякий положительный лифтинг в измеримом расслоении банаховых решеток является решеточным гомоморфизмом.

**Ключевые слова:** банахова решетка, решеточный гомоморфизм, банахово расслоение, лифтинг.

Определение лифтинга  $(\cdot)_{\sim}: L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  классов измеримых сечений измеримого расслоения  $\mathcal{X}$  банаховых решеток на пространстве с мерой  $\Omega$  сопровождается требованием решеточности лифтинга:  $(\mathbf{u} \vee \mathbf{v})_{\sim} = \mathbf{u}_{\sim} \vee \mathbf{v}_{\sim}$  на  $\Omega$  для всех  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  (см. [1, определение 2.2]). Мы покажем, что это требование является избыточным и может быть заменено условием положительности:  $\mathbf{u}_{\sim} \geq 0$  на  $\Omega$  для положительных  $\mathbf{u} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$ .

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — векторная решетка,  $Y$  — нормированная решетка и пусть  $T: X \rightarrow Y$  — такой сюръективный положительный линейный оператор, что для любых  $x_1, x_2 \in X$  из  $|x_1| \leq |x_2|$  следует  $\|Tx_1\| \leq \|Tx_2\|$ . Тогда  $T$  является решеточным гомоморфизмом.

◁ Поскольку  $\ker T$  — порядковый идеал  $X$ , согласно [2, 18.9] фактор-пространство  $\tilde{X} := X/\ker T$  представляет собой векторную решетку относительно естественного порядка, а каноническое отображение  $\varphi: X \rightarrow \tilde{X}$  является решеточным гомоморфизмом. Кроме того,  $\|\cdot\|_Y \circ T$  — решеточная полунорма на  $X$ , а значит, в силу [2, 62.3] пространство  $\tilde{X}$  является нормированной решеткой относительно фактор-нормы  $\|\cdot\|_{\tilde{X}}$ , причем  $\|\cdot\|_{\tilde{X}} = \|\cdot\|_Y \circ \tilde{T}$ , где  $\tilde{T} := T \circ \varphi^{-1}: \tilde{X} \rightarrow Y$  — линейная биекция. Таким образом, оператор  $\tilde{T}$  служит положительной изометрией между нормированными решетками  $\tilde{X}$  и  $Y$  и поэтому является порядковым изоморфизмом (см. [3, теорема 1]) и, в частности, решеточным гомоморфизмом. Следовательно, оператор  $T = \tilde{T} \circ \varphi$  также является решеточным гомоморфизмом. ▷

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{X}$  — измеримое расслоение банаховых решеток над пространством с мерой  $\Omega$  и  $(\cdot)_{\sim}: L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$  — такой лифтинг в измеримом банаховом расслоении  $\mathcal{X}$ , что  $\mathbf{u}_{\sim} \geq 0$  на  $\Omega$  для положительных  $\mathbf{u} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$ . Тогда  $(\mathbf{u} \vee \mathbf{v})_{\sim} = \mathbf{u}_{\sim} \vee \mathbf{v}_{\sim}$  и  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_{\sim} = \mathbf{u}_{\sim} \wedge \mathbf{v}_{\sim}$  на  $\Omega$  для всех  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$ .

◁ Достаточно фиксировать произвольную точку  $\omega \in \Omega$  и применить доказанную выше теорему 1 к векторной решетке  $X := L^{\infty}(\Omega, \mathcal{X})$ , нормированной решетке  $Y := \mathcal{X}(\omega)$  и оператору  $T: \mathbf{u} \in X \mapsto \mathbf{u}_{\sim}(\omega) \in Y$ , сюръективность которого следует из [4, 4.4.1]. ▷

### Литература

1. Ганиев И. Г. Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям.—М.: Наука, 2005.—С. 9–49.
2. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz Spaces. Vol. I.—Amsterdam–London: North-Holland Publ. Co., 1971.
3. Абрамович Ю. А. Об изометриях нормированных решеток // Оптимизация.—1988.—Вып. 43 (60).—С. 74–80.
4. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.

*Статья поступила 13 октября 2013 г.*

ГУТМАН АЛЕКСАНДР ЕФИМОВИЧ  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
заведующий лабораторией функционального анализа  
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;  
Новосибирский государственный университет,  
профессор кафедры математического анализа  
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2  
E-mail: gutman@math.nsc.ru

### POSITIVE LIFTING IN A MEASURABLE BUNDLE OF BANACH LATTICES

Gutman A. E.

We show that every positive lifting in a measurable bundle of Banach lattices is a lattice homomorphism.

**Key words:** Banach lattice, lattice homomorphism, Banach bundle, lifting.