

УДК 517.958

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ
ДВУМЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ
С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. А. Назаралиев, В. Д. Бейбалаев

*Анатолию Георгиевичу Кусраеву с пожеланиями благополучия
и дальнейших творческих успехов в связи с его шестидесятилетием*

В работе рассмотрены динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями дробного порядка. Исследованы поведения фазовых траекторий в случае действительных корней характеристического уравнения. Построены фазовые траектории при различных значениях параметра α и установлен переход системы из одного динамического состояния в другое при изменении параметра α .

Ключевые слова: динамическая система, дробная производная, фазовые траектории, фазовый портрет, характеристическое уравнение.

Введение

Повышенный интерес к изучению нелинейных динамических систем, где реализуются идеи детерминированного хаоса и фрактальной геометрии, обусловлен тем, что закономерности таких систем становятся базовыми для установления сущности широкого круга явлений, охватывая не только физические, но и химические, геофизические, биологические, социально-экономические системы. Проникновение идей фрактальной геометрии [1] в естествознание сформировало новую концепцию — концепцию фракталов [2, 3]. Особый интерес в концепции фрактала представляет аналитический подход, основанный на использовании математического аппарата дробного интегро-дифференцирования, в рамках которого удастся не только воспроизвести известные результаты, но и получить принципиально новые [4–10]. Говоря о физическом смысле дробной производной по времени, заметим, что один из критериев необратимости процессов, заключающийся в смене знака производной при изменении знака времени $t \rightarrow -t$, в случае дробных производных состоит в замене

$$(-t^\alpha) \longrightarrow t^\alpha(\cos(\pi\alpha) + i \sin(\pi\alpha)).$$

Таким образом, при переходе к дробным производным по времени часть процесса соответствует обратимым, другая часть — необратимым процессам. Такое сочетание обратимых и необратимых процессов фактически означает возможность описания нелинейных процессов путем перехода к дробным производным.

Математические методы исследования нелинейных колебательных процессов хорошо известны. Различают аналитико-топологический подход, основанный на качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений [11–13] преимущественно для систем с малым числом степеней свободы (второго порядка), и подход, основанный на анализе асимптотических решений нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих заданный параметр [14–16], преимущественно для систем выше второго порядка. Несмотря на значительные усилия по развитию теории нелинейных колебательных процессов, наши знания в этой области далеки от своей полноты и необходимо развитие принципиально новых подходов. В качестве одного из таких подходов предлагается метод, основанный на применении математического аппарата дробного интегро-дифференцирования.

В статье рассматриваются автономные динамические системы, отображаемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha x(t) &= P(x, y), \\ \partial_{0t}^\alpha y(t) &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = D_{0t}^{\alpha-1} \frac{dx(t)}{dt}$$

— производная Капуто [8],

$$D_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s)}{(t-s)^\alpha} dt$$

— дробная производная Римана — Лиувилля [4], $0 < \alpha \leq 1$.

Как известно, для математического изучения таких систем необходимо построение математического портрета рассматриваемой системы. Таким портретом является картина движения представляющей точки в фазовом пространстве, дающая взаимно однозначное отображение многообразия состояний системы, т. е. таким портретом является фазовое пространство, разбитое на траектории с указанием направления движений по траекториям.

1. Линейные однородные динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка

Рассмотрим сначала простейшие динамические системы, принадлежащие к виду (1), а именно, те, которые отображаются системой двух линейных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha x(t) &= ax + by, \\ \partial_{0t}^\alpha y(t) &= cx + dy, \end{aligned} \tag{2}$$

где $0 < \alpha \leq 1$, a, b, c, d — некоторые постоянные параметры.

Характеристическое уравнение системы (2) имеет вид

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0. \tag{3}$$

Задача. Найти решение $x(t), y(t) \in AC^2[0, T]$ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

Решение задачи, если корни характеристического уравнения различны, имеет вид [18]

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2}(E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha)) \\ &\quad + \frac{y_0 b - x_0 d + \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}}(E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha)), \\ y(t) &= \frac{y_0}{2}(E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha)) \\ &\quad + \frac{x_0 c - y_0 a + \gamma y_0}{2\sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}}(E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha)), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + (cb - ad)}$ — корни характеристического уравнения (3), $\gamma = \frac{a+d}{2}$. Характеристические корни λ_1, λ_2 являются решениями уравнения (3). Нормальная форма матрицы коэффициентов $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и параметр α полностью определяют поведение траекторий в окрестности особой точки. В случае, когда корни характеристического уравнения (3) действительны, действительное преобразование координат приводит систему к системе того же вида, но с матрицей коэффициентов одного из двух типов [12]:

$$A: \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad B: \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В данной работе рассматриваем случаи действительных корней характеристического уравнения, т. е. случаи с матрицами коэффициентов типа A и B .

Пусть корни одного знака, а матрица типа A . В этом случае с помощью линейного однородного преобразования $u = \alpha x + \beta y$, $v = \gamma x + \delta y$ система (2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u(t) &= \lambda_1 u, \\ \partial_{0t}^\alpha v(t) &= \lambda_2 v, \end{aligned} \quad (5)$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (3). Решение системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha), \\ v(t) &= v_0 E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha), \end{aligned}$$

где u_0, v_0 — произвольные постоянные.

Предположим, что оба корня λ_1, λ_2 действительные и отрицательные. Пусть $\lambda_i = -\mu_i$, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$. Решение системы (5) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 E_{\alpha,1}(-\mu_1 t^\alpha), \\ v(t) &= v_0 E_{\alpha,1}(-\mu_2 t^\alpha). \end{aligned}$$

На рис. 1, 2 приведены графики фазовых траекторий в случае отрицательных корней характеристического уравнения. Как видно на рис. 1, фазовые траектории приближаются к началу координат при $t \rightarrow +\infty$. Они совпадают с полуосью u , когда $v_0 = 0$, и с полуосью v , когда $u_0 = 0$. В этом случае особой точкой является устойчивый узел.

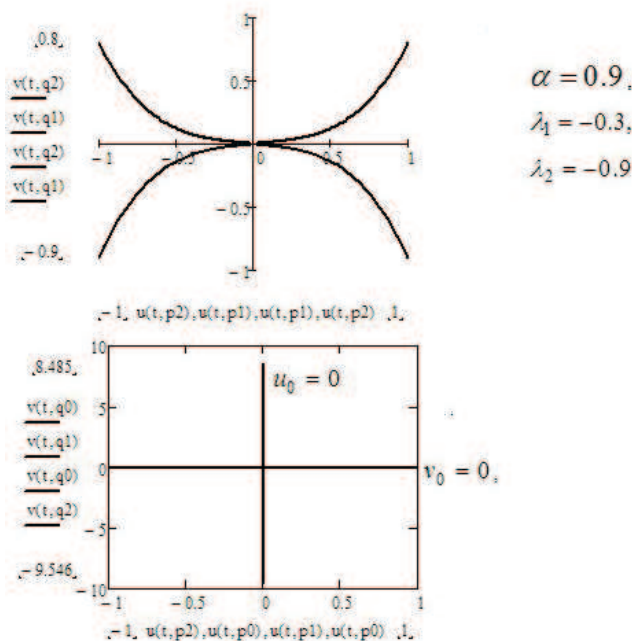


Рис. 1. Графики фазовых траекторий в случае отрицательных корней характеристического уравнения.

А когда $\alpha \rightarrow 0$ и $t \rightarrow +\infty$, как видно на рис. 2, происходит топологическое изменение фазовой плоскости.

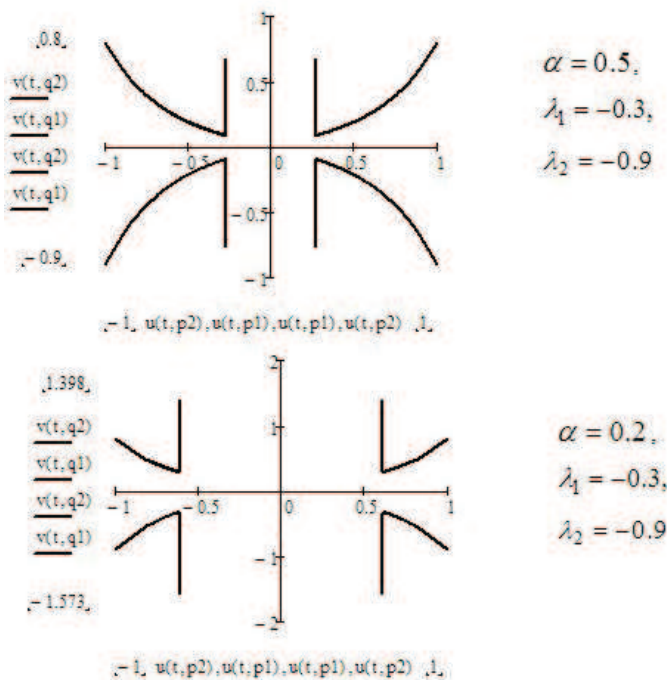


Рис. 2. Графики фазовых траекторий в случае, когда $\alpha \rightarrow 0$.

Пусть оба корня λ_1 , λ_2 положительны. На рис. 3 приведены графики фазовых траекторий в случае положительных корней характеристического уравнения. Как видно на рис. 3, фазовые траектории отдаляются от начала координат при $t \rightarrow \infty$. В этом случае особой точкой является неустойчивый узел.

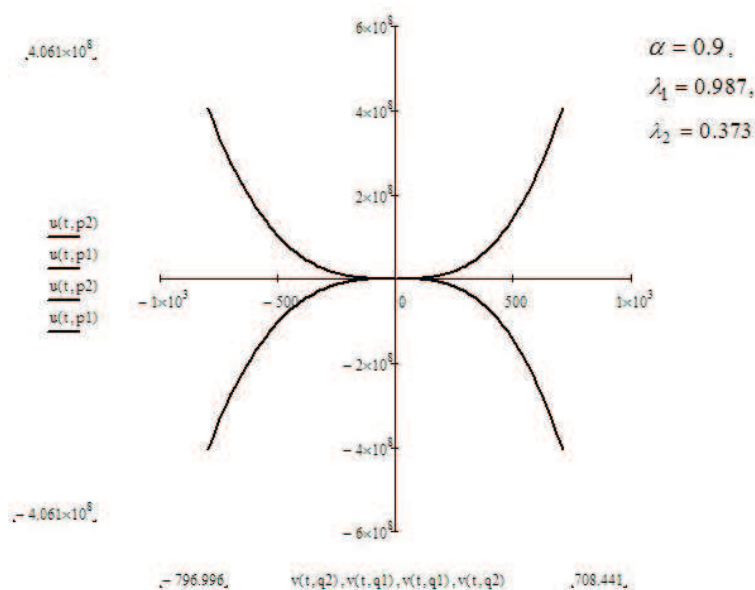


Рис. 3. Графики фазовых траекторий в случае положительных корней характеристического уравнения.

Теперь предположим, что оба корня λ_1, λ_2 действительные, но противоположных знаков. Пусть $\lambda_1 = -\lambda < 0$, а $\lambda_2 = \mu > 0$. Тогда

$$u(t) = u_0 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha),$$

$$v(t) = v_0 E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha).$$

Полуоси u, v являются траекториями, соответствующими $u_0 = 0$ и $v_0 = 0$. Если $u_0 v_0 \neq 0$, то $u \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$. На рис. 4 приведены графики фазовых траекторий в случае, когда оба корня λ_1, λ_2 действительные, но противоположных знаков. В этом случае особой точкой является седло.

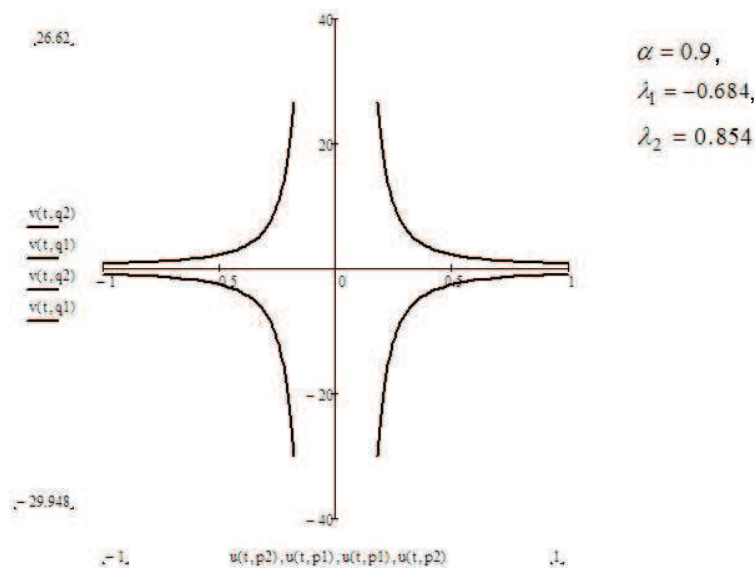


Рис. 4. Графики фазовых траекторий в случае, когда оба корня λ_1, λ_2 действительные, но противоположных знаков.

А когда $|\lambda_i| \geq 1$, $\alpha \rightarrow 0$ и $t \rightarrow +\infty$, как видно на рис. 5, происходит топологическое изменение фазовой плоскости, т. е. из одного состояния с особой точкой типа седло (рис. 4) переходит в другое с особой точкой типа неустойчивый узел.

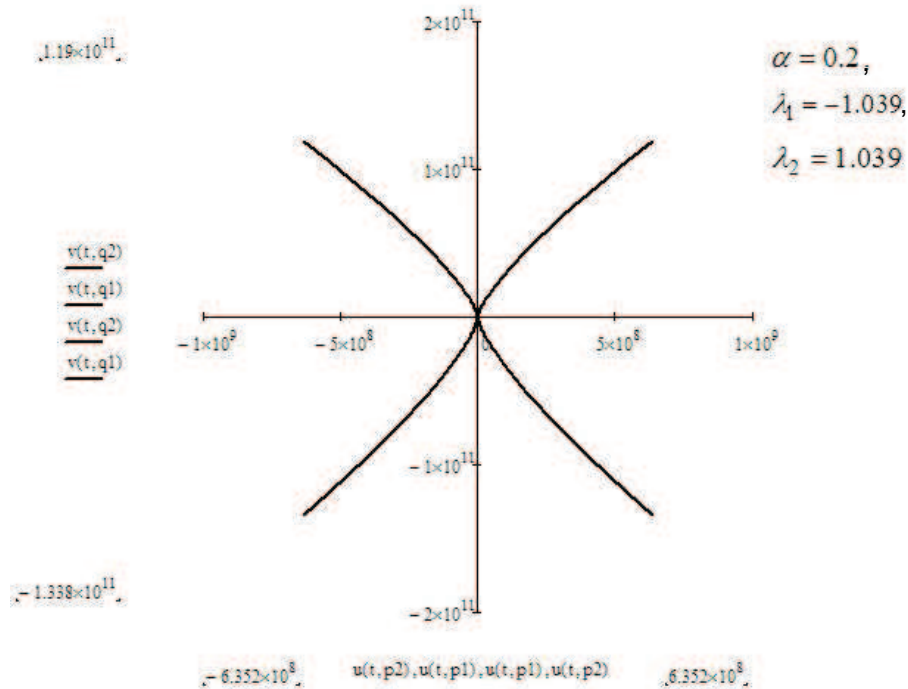


Рис. 5. Графики фазовых траекторий в случае, когда корни действительные, противоположных знаков, $|\lambda_i| \geq 1$ и $\alpha \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическое уравнение имеет один корень λ и этот корень действительный.

Тогда приведенная система имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u(t) &= \lambda u, \\ \partial_{0t}^\alpha v(t) &= u + \lambda v. \end{aligned} \tag{6}$$

Решением системы (6) будет

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha), \\ v(t) &= v_0 E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) + u_0 t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k t^{\alpha k} E_{\alpha,\alpha k + \alpha + 1}(\lambda t^\alpha). \end{aligned} \tag{7}$$

Допустим сначала, что $\lambda < 0$. Как видно на рис. 6, в случае, когда $u_0 = 0$ и $v_0 > 0$, фазовые траектории представляют собой положительную полуось v , а когда $v_0 < 0$ — отрицательную полуось v .

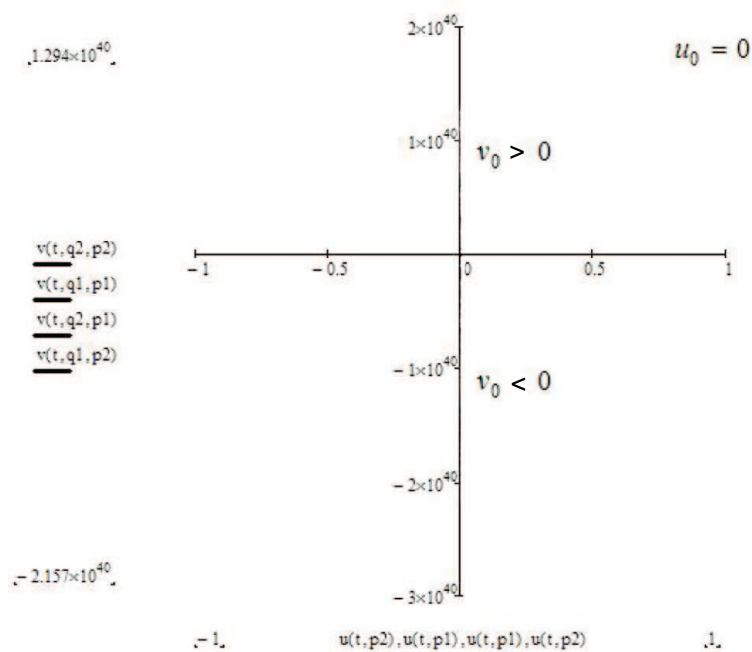


Рис. 6. Графики фазовых траекторий в случае, когда характеристическое уравнение имеет один корень $\lambda < 0$ и $u_0 = 0$.

В этом случае независимо от u_0 и v_0 одновременно $u, v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, и особой точкой будет устойчивый узел (рис. 7).

В случае $\lambda > 0$ особой точкой будет неустойчивый узел.

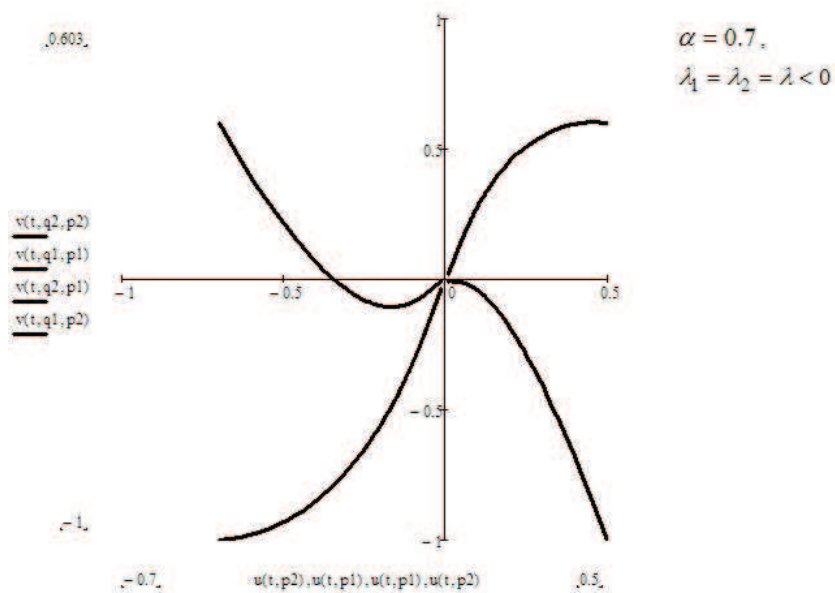


Рис. 7. Графики фазовых траекторий в случае, когда характеристическое уравнение имеет один корень $\lambda < 0$.

2. Нелинейные динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка

В работе [20] была исследована система дифференциальных уравнений с производными дробного порядка:

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^\alpha x(t) &= a + x^2 y - (b + 1)x, \\ \partial_{0t}^\alpha y(t) &= bx - x^2 y.\end{aligned}\tag{8}$$

В случае $\alpha = 1$ система (8) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a + x^2 y - (b + 1)x, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2 y.\end{aligned}\tag{9}$$

Система (9) была исследована Пригожиным и Лефевром в 1965 г. [21]. Динамическую систему, описываемую с помощью системы (9), авторы назвали брюсселятором.

Точка $\bar{x} = a$, $\bar{y} = \frac{b}{a}$, является особой точкой. С помощью замены $x = x^* + a$, $y = y^* + \frac{b}{a}$, ограничиваясь только слагаемыми первого порядка малости, система (8) приводится к линеаризованному виду

$$\begin{aligned}\partial_{0t}^\alpha x^*(t) &= (b - 1)x^* + a^2 y^*, \\ \partial_{0t}^\alpha y^*(t) &= -bx^* - a^2 y^*.\end{aligned}\tag{10}$$

Решение системы (10) имеет вид [20]

$$\begin{aligned}x^*(t) &= \frac{x_0}{2} (E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha)) \\ &+ \frac{a^2(x_0 + y_0) - \gamma x_0}{2\sqrt{\gamma^2 - a^2}} (E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha)), \\ y^*(t) &= \frac{y_0}{2} (E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha) + E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha)) \\ &- \frac{(x_0 + y_0)b - (1 - \gamma)y_0}{2\sqrt{\gamma^2 - a^2}} (E_{\alpha,1}(\lambda_2 t^\alpha) - E_{\alpha,1}(\lambda_1 t^\alpha)),\end{aligned}\tag{11}$$

где $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ — корни характеристического уравнения, $\gamma = \frac{a^2 - (b-1)}{2}$.

На рис. 8, 9 приведены рассчитанные по формулам (11) графики фазовых траекторий. На рис. 8 видно, что в случае $b > 1 + a^2$ при переходе к дробным производным по времени происходит переход от неустойчивого вида особой точки фазовой траектории к устойчивому виду. На рис. 9 видно, что в случае $b = 1 + a^2$ при переходе к дробным производным происходит топологическое изменение фазовой плоскости. Таким образом, учет эффектов памяти приводит к принципиально новым результатам, когда в системе возможны переходы между различными особыми точками фазовой траектории.

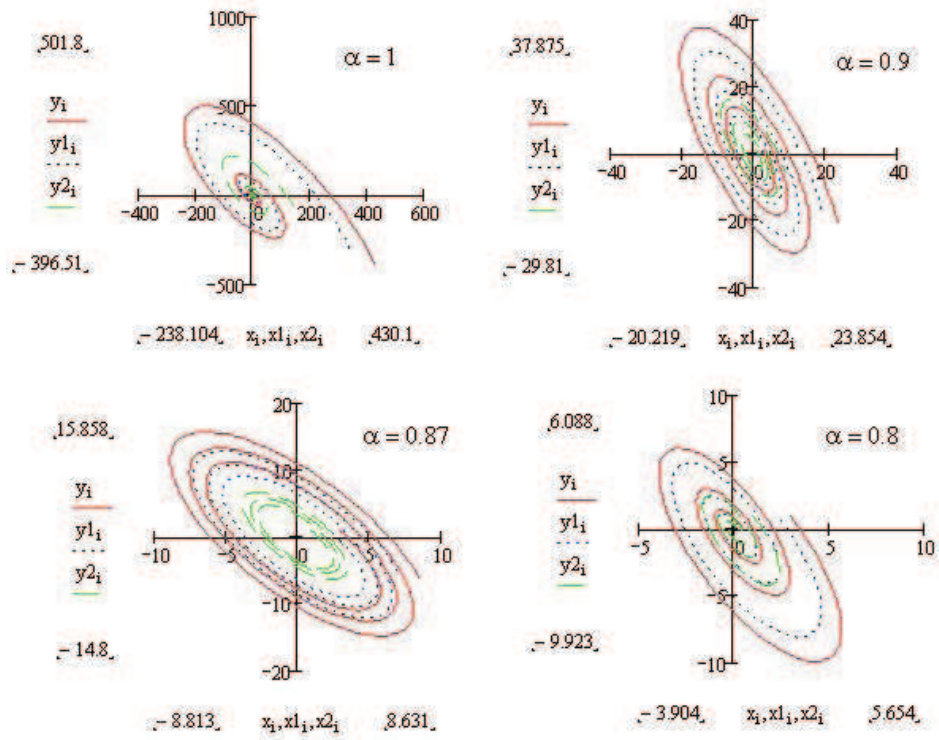


Рис. 8. Фазовые траектории при различных значениях α в случае $b > 1 + a^2$.

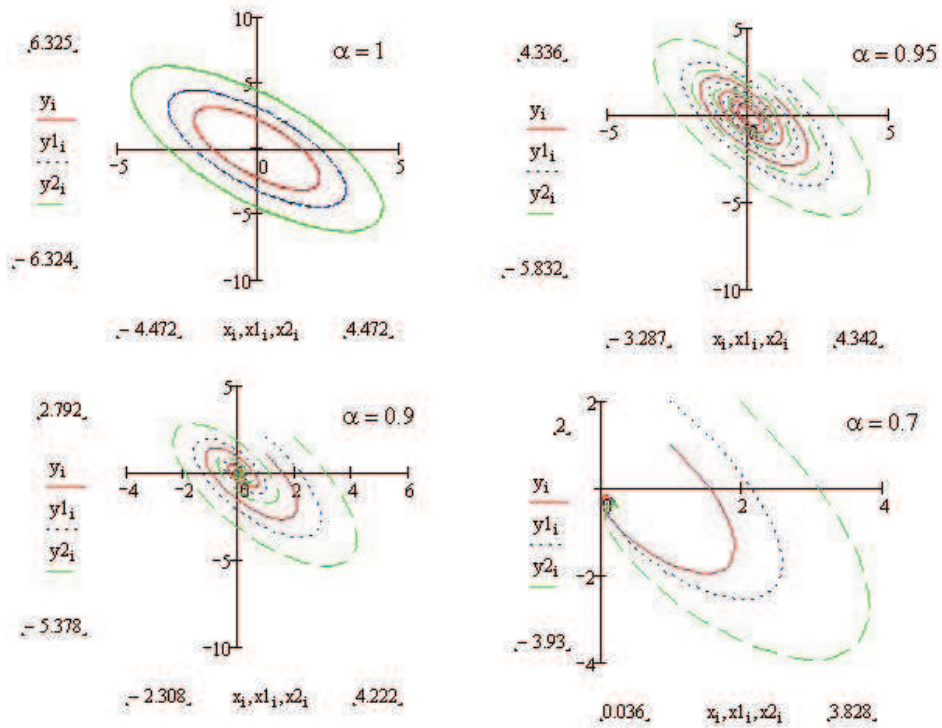


Рис. 9. Фазовые траектории при различных значениях α в случае $b = 1 + a^2$.

Литература

1. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature.—New York: W. H. Freeman, 1982.—468 p.
2. Олемской А. И., Флат А. Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // Успехи физ. наук.—1993.—Т. 163, № 12.—С. 1–50.
3. Зосимов В. В., Лямшев Л. М. Фракталы в волновых процессах // Успехи физ. наук.—1995.—Т. 165, № 4.—С. 361–402.
4. Самко С. Г., Килбас Ф. Ф., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.
5. Нигмагулин Р. И. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теорет. и мат. физика.—1992.—Т. 90, № 3.—С. 354–368.
6. Чукбар К. В. Стохастический перенос и дробные производные // Журн. эксперим. и теорет. физики.—1995.—Т. 108, № 5.—С. 1875–1884.
7. Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма в журн. техн. физики.—2002.—Т. 28, № 1.—С. 67–73.
8. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение.—Нальчик, 2003.—299 с.
9. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов.—М.: Наука, 2006.—174 с.
10. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Применение матричных интегро-дифференциальных операторов в решении задачи Коши для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка // Тр. VI Всерос. науч. конф.—Самара, 2009.—Ч. 3.—С. 31–38.
11. Бейбалаев В. Д. Решение начальной задачи для дифференциального уравнения фрактального осциллятора // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки.—2009.—№ 2 (19).—С. 240–242.
12. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.—388 с.
13. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем.—М.: Наука, 1966.—568 с.
14. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.—М.: Эдиториал УРСС, 2000.—336 с.
15. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1974.—504 с.
16. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах.—М.: Мир, 1966.—230 с.
17. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.—М.: Наука, 1981.—400 с.
18. Вебер В. К. Структура общего решения системы $y^\alpha = Ay$, $0 < \alpha \leq 1$ // Тр. Киргиз. гос. ун-та. Сер. Мат. науки.—1976.—Вып. 11.—С. 26–32.
19. Назаралиев М. А., Бейбалаев В. Д. Нелинейные колебания в средах с фрактальной структурой // Сб. тр. междунар. Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики».—Нальчик — Хабез, 2010.—С. 177–180.
20. Назаралиев М. А., Мейланов Р. П., Бейбалаев В. Д., Шабанова М. Р. Особенности фазовой траектории фрактального «брюсселятора» // Сб. тр. VII Всерос. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи».—Самара, 2010.—Ч. 3.—С. 204–210.
21. Лаврова А. И., Постников Е. Б., Романовский Ю. М. Брюсселятор — абстрактная химическая реакция? // Успехи физ. наук.—2009.—Т. 179, № 12.—С. 1327–1332.

Статья поступила 27 января 2011 г.

Назаралиев Магомед-Шафи Ахмедович
 Дагестанский государственный университет,
 заведующий кафедрой прикладной математики
 РОССИЯ, 367025, Махачкала, ул. Гаджиева, 43-а
 E-mail: nazaraliev@mail.ru

Бейбалаев Ветлугин Джабраилович
 Дагестанский государственный университет,
 доцент кафедры прикладной математики
 РОССИЯ, 367025, Махачкала, ул. Гаджиева, 43-а
 E-mail: kaspj_03@mail.ru

DYNAMIC SYSTEMS DESCRIBED BY TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH DERIVATIVES OF FRACTIONAL ORDER

Nazaraliev M. A., Beibalaev V. D.

Dynamic systems described by two differential equations of fractional order are considered. The behavior of phase trajectories in case of real roots of the characteristic equation is investigated. Phase trajectories for various values of parameter are constructed and system transition from one dynamic state to another is established.

Key words: dynamic system, fractional derivative, phase trajectories, phase portrait, characteristic equation.