

УДК 514.76

DOI 10.23671/VNC.2018.3.17829

СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ

А. Абу-Салеем^a, А. Р. Рустанов^b, С. В. Харитонова^c

Аннотация. Статья посвящена обобщенным многообразиям Кенмоцу, а именно исследованию их свойств интегрируемости. Исследование ведется методом присоединенных G -структур, поэтому вначале построено пространство присоединенной G -структуры почти контактных метрических многообразий. Далее определяются обобщенные многообразия Кенмоцу (короче GK -многообразия), приводится полная группа структурных уравнений таких многообразий. Определены первое, второе и третье фундаментальные тождества GK -структур. Сформулированы определения специальных обобщенных многообразий Кенмоцу (SGK -многообразий) I и II родов. В работе исследуются GK -многообразия, первое фундаментальное распределение которых вполне интегрируемо. Показано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого распределения GK -многообразия, является приближенно келеровой. Получено локальное строение GK -многообразия с замкнутой контактной формой, приведены выражения первого и второго структурных тензоров. Также в работе вычислены компоненты тензора Нейенхейса GK -многообразия. Поскольку задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, то исследуется геометрический смысл обращения в нуль этих тензоров. Получено локальное строение интегрируемой и нормальной GK -структуры. Доказано, что характеристический вектор GK -структуры не является вектором Киллинга. Основным результатом является **Теорема.** Пусть M — GK -многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) GK -многообразие имеет замкнутую контактную форму; 2) $F^{ab} = F_{ab} = 0$; 3) $N^{(2)}(X, Y) = 0$; 4) $N^{(3)}(X) = 0$; 5) M — SGK -многообразие второго рода; 6) M — локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.

Ключевые слова: обобщенное многообразие Кенмоцу, многообразие Кенмоцу, нормальное многообразие, тензор Нейенхейса, интегрируемая структура, приближенно келерова многообразие.

Mathematical Subject Classification (2000): 58A05.

1. Введение

В 1972 г. Кенмоцу [1] ввел в рассмотрение новый класс почти контактных метрических структур, характеризующихся тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y \rangle - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

© 2018 Абу-Салеем А., Рустанов А. Р., Харитонова С. В.

^a Университета Аль аль-Байт, Иордания, Аль Джубэйха, 25113, Аль-Мафрака.

^b НИУ МГСУ, Институт фундаментального образования, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

^c Оренбургский государственный университет, Россия, 460000, Оренбург, пр. Победы, 13.

E-mail: dr_ahmad57@yahoo.com, aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

Структуры Кенмоцу естественно возникают в классификации Танно связных почти контактных метрических многообразий, группа автоморфизмов которых имеет максимальную размерность [2]. Они обладают рядом интересных свойств. Например, структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы, они не являются ни сасакиевыми структурами, ни косимплектическими структурами. Известны примеры структур Кенмоцу на нечетномерных пространствах Лобачевского кривизны (-1) . Такие структуры получаются с помощью конструкции косоуго (*warped*) произведения $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^n$ в смысле Бишоп и О'Нейла [3] комплексного евклидова пространства и вещественной прямой, где $f(t) = ce^t$. Всякое конформно-плоское многообразие Кенмоцу, а также локально-симметрическое многообразие Кенмоцу локально эквивалентно многообразию Кенмоцу такого типа [1]. Кириченко В. Ф. [4] доказал, что класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием косимплектической структуры.

В своей диссертационной работе [5] Умнова С. В. изучала многообразия Кенмоцу и их обобщения. Она выделила класс почти контактных метрических многообразий, являющийся обобщением многообразий Кенмоцу и названный классом обобщенных (короче, *GK*-многообразия) многообразий Кенмоцу. Умнова С. В. выделяет два подкласса обобщенных многообразий Кенмоцу, названных *специальными обобщенными многообразиями Кенмоцу* (коротко, *SGK*-многообразия) I и II рода. В работе [5] доказано, что обобщенные многообразия Кенмоцу постоянной кривизны являются многообразиями Кенмоцу постоянной кривизны (-1) . Кроме того, доказано, что класс *SGK*-многообразий II рода совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из точнейших косимплектических многообразий каноническим преобразованием точнейшей косимплектической структуры, а также дано локальное строение этих многообразий постоянной кривизны.

В данной статье мы изучаем свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу. Работа организована следующим образом. Во введении мы приводим предварительные сведения, необходимые в дальнейшем изложении, строим пространство присоединенной *G*-структуры. В п. 2 дано определение обобщенных многообразий Кенмоцу, приведена полная группа структурных уравнений *GK*-многообразий на пространстве присоединенной *G*-структуры, сформулировано определение *SGK*-многообразий I и II родов. Исследованы *GK*-многообразия, первое фундаментальное распределение которых вполне интегрируемо. Показано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения обобщенного многообразия Кенмоцу, является приближенно келеровой структурой. Получено локальное строение *GK*-многообразия с замкнутой контактной формой, приведены аналитические выражения первого и второго структурных тензоров. В п. 3 исследуются свойства тензора Нейенхайса, получено локальное строение интегрируемой и нормальной *GK*-структуры. Доказано, что характеристический вектор *GK*-структуры не является вектором Киллинга. Также исследовано обращение в нуль тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$. Основные результаты сосредоточены в параграфах 2 и 3.

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n + 1$, $\mathcal{X}(M)$ — C^∞ -модуль гладких векторных полей на многообразии M . В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [6]. *Почти контактной структурой* на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой структуры*, ξ — векторное поле, называемое

характеристическим, Φ — эндоморфизм модуля $\mathcal{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом*. При этом

$$1) \eta(\xi) = 1; \quad 2) \eta \circ \Phi = 0; \quad 3) \Phi(\xi) = 0; \quad 4) \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi. \quad (1.1)$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ такая, что

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

то четверка $(\eta, \xi, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *почти контактной метрической структурой* (короче, *АС-структурой*).

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная (метрическая) структура, называется *почти контактным (метрическим (короче, АС-)) многообразием*.

Кососимметричный тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, называется *фундаментальной формой АС-структуры* [6].

Пусть (η, ξ, Φ, g) — почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1} . В модуле $\mathcal{X}(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m = \eta \otimes \xi$ и $l = id - m = -\Phi^2$ [5, 6]. Таким образом, $\mathcal{X}(M) = \mathbf{L} \oplus \mathbf{M}$, где $\mathbf{L} = \text{Im}(\Phi) = \ker \eta$ — так называемое *контактное распределение*, $\dim \mathbf{L} = 2n$, $\mathbf{M} = \text{Im } m = \ker(\Phi) = L(\xi)$ — линейная оболочка характеристического вектора (причем l и m являются проекторами на подмодули \mathbf{L} и \mathbf{M} соответственно).

Очевидно, распределения \mathbf{L} и \mathbf{M} инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что $\tilde{\Phi}^2 = -id$, $\langle \tilde{\Phi} X, \tilde{\Phi} Y \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, где $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\mathbf{L}}$. Следовательно, $\{\tilde{\Phi}_p, g_p|_{\mathbf{L}}\}$ — эрмитова структура на пространстве L_p .

Комплексификация $\mathcal{X}(M)^C$ модуля $\mathcal{X}(M)$ распадается в прямую сумму $\mathcal{X}(M)^C = D_{\Phi}^{\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}} \oplus D_{\Phi}^0$ собственных подпространств структурного эндоморфизма Φ , отвечающих собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ и 0 соответственно. Причем проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы [6]

$$\pi = \sigma \circ l = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ l = -\frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi),$$

$$m = id + \Phi^2, \quad \sigma = \frac{1}{2}(id - \sqrt{-1}\Phi), \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(id + \sqrt{-1}\Phi).$$

Отображения $\sigma_p : L_p \rightarrow D_{\Phi}^{\sqrt{-1}}$ и $\bar{\sigma}_p : L_p \rightarrow D_{\Phi}^{-\sqrt{-1}}$ являются соответственно изоморфизмом и антиизоморфизмом эрмитовых пространств. Поэтому к каждой точке $p \in M^{2n+1}$ можно присоединить семейство реперов пространства $T_p(M)^C$ вида $(p, \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_{\hat{1}}, \dots, \epsilon_{\hat{n}})$, где $\epsilon_a = \sqrt{2}\sigma_p(e_a)$, $\epsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}_p(e_a)$; $\epsilon_0 = \xi_p$, где $\{e_a\}$ — ортонормированный базис эрмитова пространства L_p . Такой репер называется *А-репером* [6]. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в А-репере имеют вид

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где I_n — единичная матрица порядка n . Хорошо известно [6, 7], что совокупность таких реперов определяет G -структуру на M со структурной группой $\{1\} \times U(n)$, пред-

ставленной матрицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$, где $A \in U(n)$. Эта G -структура называется

присоединенной [6, 7].

Подчеркнем, что пространство присоединенной G -структуры состоит из комплексных реперов, т. е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной G -структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. В свою очередь, комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Следуя общепринятой традиции, будем называть такой тензор вещественным. В частности, сумма чистого комплексного тензора и комплексно сопряженного ему тензора является вещественным тензором.

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы i, j, k, \dots пробегает значения от 0 до $2n$, индексы a, d, c, d, f, g, \dots — значения от 1 до n , и положим $\hat{a} = a + n$, $\hat{a} = a$, $\hat{0} = 0$. Поскольку Φ и g — тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$ соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$d\Phi_j^i + \Phi_j^k \theta_k^i - \Phi_k^i \theta_j^k = \Phi_{j,k}^i \omega^k, \quad dg_{ij} - g_{kj} \theta_i^k - g_{ik} \theta_j^k = g_{ij,k} \theta^k, \quad (1.3)$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\theta_j^i\}$ — компоненты форм смещения и форм римановой связности ∇ соответственно, $\Phi_{j,k}^i$, $g_{ij,k}$ — компоненты ковариантного дифференциала Φ и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \quad (1.4)$$

С учетом (1.2) и (1.4) соотношения (1.3) на пространстве присоединенной G -структуры переписуются в форме [6]

$$\begin{aligned} \Phi_{b,i}^a &= 0, & \Phi_{b,i}^{\hat{a}} &= 0, & \Phi_{0,i}^0 &= 0, & \theta_a^0 &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,i}^0 \omega^i, & \theta_a^0 &= \sqrt{-1} \Phi_{\hat{a},i}^0 \omega^i, \\ \theta_0^a &= \sqrt{-1} \Phi_{0,i}^a \omega^i, & \theta_0^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,i}^{\hat{a}} \omega^i, \\ \theta_b^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,i}^a \omega^i, & \theta_b^{\hat{a}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,i}^{\hat{a}} \omega^i, & \theta_0^0 &= 0, & \theta_j^i + \theta_j^{\hat{j}} &= 0. \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\overline{\omega^i} = \omega^{\hat{i}}$, $\overline{\theta_j^i} = \theta_j^{\hat{i}}$, $\overline{\Phi_{j,k}^i} = \Phi_{j,\hat{k}}^{\hat{i}}$, где $t \rightarrow \bar{t}$ — оператор комплексного сопряжения.

С учетом этих соотношений первая группа структурных уравнений римановой связности $d\omega^i = -\theta_j^i \wedge \omega^j$ почти контактного метрического многообразия на пространстве присоединенной G -структуры запишется в следующей форме [6]:

- 1) $d\omega = C_{ab} \omega^a \wedge \omega^b + C^{ab} \omega_a \wedge \omega_b + C_a^b \omega^a \wedge \omega_b + C_a \omega \wedge \omega^a + C^a \omega \wedge \omega_a$;
- 2) $d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + B^{ab} \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B^a_b \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b$;
- 3) $d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b$,

где $\omega = \pi^*(\eta)$, π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразии M ,

$$\begin{aligned} B^{ab}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^a; & B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[b,c]}^a; & B^a_b &= \sqrt{-1} \Phi_{0,b}^a; \\ B^{ab} &= \sqrt{-1} \left(\Phi_{0,\hat{b}}^a - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^a \right); & B_{ab}^c &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^{\hat{a}}; & B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[b,c]}^{\hat{a}}; \\ B_a^b &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}}; & B_{ab} &= -\sqrt{-1} \left(\Phi_{0,b}^{\hat{a}} - \frac{1}{2} \Phi_{\hat{b},0}^{\hat{a}} \right); \end{aligned}$$

$$C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi_{[a,b]}^0; \quad C^{ab} = \sqrt{-1}\Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0;$$

$$C_b^a = -\sqrt{-1}(\Phi_{\hat{a},b}^0 + \Phi_{b,\hat{a}}^0) = B_b^a - B_b^{\hat{a}}; \quad C_a = \sqrt{-1}\Phi_{a,0}^0; \quad C^a = -\sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},0}^0.$$

При этом

$$\overline{B^{abc}} = B_{abc}, \quad \overline{B^{ab}} = B_{ab}, \quad \overline{\theta_a^b} = -\theta_b^a.$$

Введем обозначения:

$$C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a; \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,c}^{\hat{a}}; \quad (1.5)$$

$$F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; \quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi_{a,b}^0.$$

Для тензорных компонент формы римановой связности имеют место следующие соотношения на пространстве присоединенной G -структуры [6]:

$$\begin{aligned} 1) \theta_b^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},i}^a\omega^i; & 2) \theta_b^{\hat{a}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{b,i}^{\hat{a}}\omega^i; & 3) \theta_0^a &= \sqrt{-1}\Phi_{0,i}^a\omega^i; \\ 4) \theta_0^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1}\Phi_{0,i}^{\hat{a}}\omega^i; & 5) \theta_a^0 &= -\sqrt{-1}\Phi_{a,i}^0\omega^i; & 6) \theta_{\hat{a}}^0 &= \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},i}^0\omega^i; \\ 7) \theta_0^0 &= 0; & 8) \theta_j^i + \theta_i^{\hat{j}} &= 0; & 9) \theta_{0,i}^0 &= \theta_{b,i}^a = \theta_{\hat{b},i}^{\hat{a}} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

2. Обобщенные многообразия Кенмоцу

Пусть $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — почти контактное метрическое многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [1]. Почти контактная метрическая структура, характеризующаяся тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = -\eta(Y)\Phi X - \langle X, \Phi Y \rangle, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M),$$

называется *структурой Кенмоцу*.

Многообразие, снабженное структурой Кенмоцу, называется *многообразием Кенмоцу*.

Положим в этом тождестве $Y = X$. Тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)X = -\eta(X)\Phi X, \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

В полученном тождестве сделаем замену $X \rightarrow X + Y$ (поляризация по X), тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y, \quad X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (2.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [5]. Класс почти контактных метрических многообразий, характеризующихся тождеством (2.1), называется *обобщенными многообразиями Кенмоцу* (короче, *ГК-многообразиями*).

Расписав тождество (2.1) на пространстве присоединенной G -структуры, получим следующее.

Предложение 2.1. Компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма на пространстве присоединенной G -структуры удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} 1) \Phi_{0,i}^0 &= \Phi_{b,0}^a = \Phi_{\hat{b},0}^{\hat{a}} = 0; & 2) \Phi_{i,0}^0 &= \Phi_{0,0}^i = 0; & 3) \Phi_{0,a}^b &= -\Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1}\delta_a^b; \\ 4) \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} &= \Phi_{\hat{b},c}^a = 0; & 5) \Phi_{0,b}^{\hat{a}} + \Phi_{b,0}^{\hat{a}} &= 0; & 6) \Phi_{0,\hat{b}}^a + \Phi_{\hat{b},0}^a &= 0; \\ 7) \Phi_{a,b}^0 + \Phi_{b,a}^0 &= 0; & 8) \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 + \Phi_{b,\hat{a}}^0 &= 0; & 9) \Phi_{a,\hat{b}}^0 + \Phi_{\hat{b},a}^0 &= 0; \\ 10) \Phi_{a,b}^{\hat{c}} + \Phi_{b,a}^{\hat{c}} &= 0; & 11) \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^{\hat{c}} + \Phi_{b,\hat{a}}^{\hat{c}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

С учетом предложения 2.1 первая группа структурных уравнений GK -многообразий примет вид [8]

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega &= F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta_b^a\omega \wedge \omega^b; \\ 3) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta_a^b\omega \wedge \omega_b, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} C^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a; \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}}; \quad C^{[abc]} = C^{abc}; \quad C_{[abc]} = C_{abc}; \\ \overline{C^{abc}} &= C_{abc}; \quad F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; \quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0; \\ F^{ab} + F^{ba} &= 0; \quad F_{ab} + F_{ba} = 0; \quad \overline{F^{ab}} = F_{ab}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует

Предложение 2.2 [5]. Если $C^{abc} = C_{abc} = 0$ и $F^{ab} = F_{ab} = 0$, то GK -многообразие является многообразием Кенмоцу.

Предложение 2.2 дает примеры GK -многообразий.

Стандартная процедура дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений GK -многообразий позволяет получить следующую теорему.

Теорема 2.1. Полная группа структурных уравнений GK -многообразий на пространстве присоединенной G -структуры имеет вид

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega &= F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega^a &= -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta_b^a\omega \wedge \omega^b; \\ 3) \quad d\omega_a &= \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta_a^b\omega \wedge \omega_b; \\ 4) \quad d\theta_b^a &= -\theta_c^a \wedge \theta_b^c + \left(A_{bc}^{ad} - 2C^{adh}C_{hbc} - \frac{3}{2}F^{ad}F_{bc} \right) \omega^c \wedge \omega_d \\ &+ \left(-\frac{1}{3}\delta_b^a F_{cd} + \frac{2}{3}\delta_c^a F_{db} + \frac{2}{3}\delta_d^a F_{bc} \right) \omega^c \wedge \omega^d + \left(\frac{1}{3}\delta_b^a F^{cd} - \frac{2}{3}\delta_b^c F^{da} - \frac{2}{3}\delta_b^d F^{ac} \right) \omega_c \wedge \omega_d; \\ 5) \quad dC^{abc} + C^{dbc}\theta_a^d + C^{adc}\theta_b^d + C^{abd}\theta_c^d &= C^{abcd}\omega_d - 2\delta_d^{[a}F^{bc]}\omega^d - C^{abc}\omega; \\ 6) \quad dC_{abc} - C_{dbc}\theta_a^d - C_{adc}\theta_b^d - C_{abd}\theta_c^d &= C_{abcd}\omega^d - 2\delta_{[a}^d F_{bc]}\omega_d - C_{abc}\omega; \\ 7) \quad dF^{ab} + F^{cb}\theta_c^a + F^{ac}\theta_c^b &= -2F^{ab}\omega; \\ 8) \quad dF_{ab} - F_{cb}\theta_c^a - F_{ac}\theta_c^b &= -2F_{ab}\omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом

$$A_{[bc]}^{ad} = A_{bc}^{[ad]} = 0; \quad C^{a[bcd]} = \frac{3}{2}F^{a[b}F^{cd]}; \quad F_{ad}C^{dbc} = 0;$$

и формулы комплексно сопряженные.

Продифференцировав внешним образом уравнения (2.5), получаем

$$\begin{aligned} 1) \quad dA_{bc}^{ad} + A_{bc}^{hd}\theta_h^a + A_{bc}^{ah}\theta_h^d - A_{hc}^{ad}\theta_b^h - A_{bh}^{ad}\theta_c^h &= A_{bch}^{ad}\omega^h + A_{bc}^{adh}\omega_h + A_{bc}^{ad}\omega; \\ 2) \quad dC^{abcd} + C^{hbcd}\theta_h^a + C^{ahcd}\theta_h^b + C^{abhd}\theta_h^c + C^{abch}\theta_h^d &= C^{abcdh}\omega_h + C^{abcd}\omega; \\ 3) \quad dC_{abcd} - C_{hbcd}\theta_a^h - C_{ahcd}\theta_b^h - C_{abhd}\theta_c^h - C_{abch}\theta_d^h &= C_{abcdh}\omega^h + C_{abcd}\omega. \end{aligned}$$

При этом справедливы следующие тождества:

- 1) $A_{b[ch]}^{ad} = 0$; 2) $A_{bc}^{a[dh]} = 0$;
- 3) $A_{bc0}^{ad} = -2A_{bc}^{ad} - 4C^{adh}C_{hbc} + F^{ad}F_{bc} - 2\delta_b^a F^{dh}F_{hc} - 2\delta_c^a F^{dh}F_{hb} - 2\delta_b^d F^{ah}F_{hc}$;
- 4) $(A_{b[c}^{ag} - 2C^{agf}C_{fb[c}])C_{|g|dh]} = 0$;
- 5) $\left(A_{b[c}^{ah} - \frac{3}{2}F^{ah}F_{b[c}\right)F_{|h|d]} = 0$;
- 6) $C^{abcg}C_{gdh} = 0$; 7) $C^{abch}F_{hd} = 0$;
- 8) $2F^{ab}F_{cd} = (\delta_d^a F_{ch} - \delta_c^a F_{dh})F^{hb} + (\delta_c^b F_{dh} - \delta_d^b F_{ch})F^{ha}$;
- 9) $2F^{ab}F^{cd} = F^{ac}F^{db} + F^{ad}F^{bc}$

и формулы комплексно сопряженные.

Тождество $F^{ad}C_{dbc} = 0$ назовем *первым фундаментальным тождеством* GK-структуры; тождество $A_{b[c}^{ad}C_{gf]d} = 2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d} -$ *вторым фундаментальным тождеством*; тождество $A_{b[c}^{ad}F_{|d|g]} = \frac{3}{2}F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ — *третьим фундаментальным тождеством*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 [5]. GK-структура называется: *специальной обобщенной структурой Кенмоцу I рода* (коротко, *SGK-структурой I рода*), если $C^{dbc} = C_{dbc} = 0$; *специальной обобщенной структурой Кенмоцу II рода* (коротко, *SGK-структурой II рода*), если $F_{ad} = F^{ad} = 0$.

Заметим, что из вида уравнения (2.5(1)) вытекает тождество

$$d\eta(X, Y) + d\eta(\Phi X, \Phi Y) = 0,$$

а также равносильное ему тождество $d\eta(\Phi X, Y) = d\eta(X, \Phi Y)$ для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} (d\eta)_{ab} &= d\eta(\epsilon_a, \epsilon_b) = -d\eta(\Phi\epsilon_a, \Phi\epsilon_b) = F_{ab}, & (d\eta)_{\hat{a}\hat{b}} &= d\eta(\epsilon_{\hat{a}}, \epsilon_{\hat{b}}) = d\eta(\Phi\epsilon_{\hat{a}}, \Phi\epsilon_{\hat{b}}) = 0, \\ (d\eta)_{a\hat{b}} &= d\eta(\epsilon_a, \epsilon_{\hat{b}}) = d\eta(\Phi\epsilon_a, \Phi\epsilon_{\hat{b}}) = 0, & (d\eta)_{\hat{a}\hat{b}} &= d\eta(\epsilon_{\hat{a}}, \epsilon_{\hat{b}}) = -d\eta(\Phi\epsilon_{\hat{a}}, \Phi\epsilon_{\hat{b}}) = F^{ab}, \\ (d\eta)_{a0} &= d\eta(\epsilon_a, \xi) = -d\eta(\Phi\epsilon_a, \Phi\xi) = 0, & (d\eta)_{\hat{a}0} &= d\eta(\epsilon_{\hat{a}}, \xi) = -d\eta(\Phi\epsilon_{\hat{a}}, \Phi\xi) = 0, \\ (d\eta)_{0a} &= d\eta(\xi, \epsilon_a) = -d\eta(\Phi\xi, \Phi\epsilon_a) = 0, & (d\eta)_{0\hat{a}} &= d\eta(\xi, \epsilon_{\hat{a}}) = -d\eta(\Phi\xi, \Phi\epsilon_{\hat{a}}) = 0, \\ (d\eta)_{00} &= d\eta(\xi, \xi) = -d\eta(\Phi\xi, \Phi\xi) = 0. \end{aligned}$$

Обратно, очевидно, что выполнение этих соотношений влечет справедливость тождества $d\eta(X, Y) + d\eta(\Phi X, \Phi Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Пусть M — GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо. Дифференциальная 1-форма $\omega = \eta \circ \pi_*$, π — естественная проекция в главном расслоении реперов над многообразием M , а π_* — порожденное ей увлечение π -связных векторных полей на многообразии M , является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, т. е. кобазисом кораспределения ассоциированного с первым фундаментальным распределением L . По классической теореме Фробениуса вполне интегрируемость первого фундаментального распределения равносильна существованию формы θ , что $d\omega = \theta \wedge \omega$.

Теорема 2.2. GK-многообразиие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо, является SGK-многообразием II рода.

◁ Почти контактная метрическая структура является вполне интегрируемой, если $d\eta \wedge \eta = 0$. Так как $\omega = \pi^*(\eta)$, π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразии M , из (2.5(1)) следует, что для того чтобы первое фундаментальное распределение было вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы слагаемые $F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega$ и $F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega$ были равны нулю. Значит, необходимо, чтобы $F_{ab} = F^{ab} = 0$. Согласно определению 2.3 GK -структура является SGK -структурой II рода. ▷

Поскольку всякое SGK -многообразие II рода локально канонически конциркулярно точнее косимплектическому многообразию [5], а точнее косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [6], то предыдущую теорему можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2.3. *GK -многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо, локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Пусть M — GK -многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо. Тогда первая группа структурных уравнений такого многообразия имеет вид

$$\begin{aligned} 1) & \quad d\omega = 0; \\ 2) & \quad d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \delta_b^a \omega \wedge \omega^b; \\ 3) & \quad d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \delta_a^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned}$$

Пусть $N \subset M$ — интегральное многообразие максимальной размерности первого фундаментального распределения GK -многообразия M . Тогда на нем естественным образом индуцируется почти эрмитова структура (J, \tilde{g}) , где $J = \Phi|_N$, $\tilde{g} = g|_N$. Так как форма ω является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, то первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры на N имеет вид

$$\begin{aligned} 1) & \quad d\omega = 0; \\ 2) & \quad d\omega^a = -\theta_b^a \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c; \\ 3) & \quad d\omega_a = \theta_a^b \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c. \end{aligned}$$

Используя таблицу «Обобщенные классы Грея — Хервеллы» [6], получаем, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения GK -многообразия M , является приближенно келеровой структурой.

Теорема 2.4. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения GK -многообразия M , является приближенно келеровой структурой.*

Теорема 2.5. *GK -многообразие с замкнутой контактной формой является SGK -многообразием II рода, т. е. многообразием локально канонически конциркулярным произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

◁ Поскольку $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразии M , то из (2.5(1)) следует, что контактная форма GK -многообразия замкнута тогда и только тогда, когда $F_{ab} = F^{ab} = 0$, т. е. согласно определению 2.3, тогда и только тогда, когда многообразие является SGK -многообразием II рода. А значит, локально канонически конциркулярным произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. ▷

Рассмотрим системы функций на пространстве присоединенной G -структуры: 1) $C = \{C^i_{jk}\}$, положив $C^a_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}$, $C^{\hat{a}}_{bc} = C_{abc}$, все остальные компоненты — нулевые; 2) $F = \{F^i_j\}$, положив $F^a_{\hat{b}} = F^{ab}$, $F^{\hat{a}}_b = F_{ab}$, все остальные компоненты F — нулевые.

По Основной теореме тензорного анализа с учетом (2.5(5))–(2.5(8)) семейства функций C и F определяют вещественные тензорные поля типа (2,1) и (1,1) на многообразии M , которые мы обозначим теми же символами. Назовем эти тензоры *первым* и *вторым структурными тензорами GK-структуры*.

Теорема 2.6. *Структурные тензоры GK-структуры имеют следующие выражения:*

$$\begin{aligned} 1) \quad C(X, Y) &= -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X; \\ 2) \quad (X) &= \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\nabla_X \xi - \Phi^2 X \\ &= -\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)). \end{aligned}$$

◁ В [8] получено аналитическое выражение первого структурного тензора

$$\begin{aligned} C(X, Y) &= \frac{1}{4} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X \} \\ &= -\frac{1}{4} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X \} \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Продифференцировав ковариантно равенство $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$, получим $\nabla_Y(\Phi)\Phi X + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X = \xi \nabla_Y(\eta)X + \eta(X)\nabla_Y \xi$. В последнем равенстве сначала сделаем замену $X \rightarrow \Phi X$, а затем на полученное тождество подействуем оператором Φ^2 . Тогда получим $\Phi \circ \nabla_Y(\Phi)\Phi X = \Phi^2 \circ \nabla_Y(\Phi)\Phi^2 X$. В полученном тождестве сделаем замену $Y \rightarrow \Phi Y$. Тогда

$$\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)). \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) равенство (2.6) запишется в виде

$$C(X, Y) = -\frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)).$$

Напомним [6, 9], что третий, четвертый и пятый структурные тензоры почти контактной метрической структуры имеют следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} 1) \quad D(X) &= -\frac{1}{2} \left\{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \frac{1}{2}\Phi \circ \nabla_{\xi}(\Phi)\Phi^2 X + \frac{1}{2}\Phi^2 \circ \nabla_{\xi}(\Phi)\Phi X \right\}; \\ 2) \quad E(X) &= -\frac{1}{2} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi \}; \\ 3) \quad F(X) &= \frac{1}{2} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi \} \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Применив процедуру восстановления тождества [6, 7] к равенству $\Phi^b_{0,a} = -\sqrt{-1}\delta^b_a$, получим $\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = -2\Phi X$ для любого $X \in \mathcal{X}(M)$. Подействуем оператором Φ на обе части последнего равенства. Тогда $\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = 2\Phi^2 X$ для любого $X \in \mathcal{X}(M)$.

Поскольку третий и пятый структурные тензоры для любого $X \in \mathcal{X}(M)$ связаны соотношением $D(X) = -\frac{3}{2}F(X)$, то

$$\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi \circ \nabla_{\xi}(\Phi)\Phi^2 X - \Phi^2 \circ \nabla_{\xi}(\Phi)\Phi X = 0 \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)).$$

В (2.1) положим $Y = \xi$. Тогда получим $\nabla_X(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)X = -\Phi X$ ($\forall X \in \mathcal{X}(M)$).

В последнем тождестве подставим сначала $X \rightarrow \Phi X$, а затем $X \rightarrow \Phi^2 X$. Тогда получим

$$\begin{aligned} 1) \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)\Phi X &= -\Phi^2 X; \\ 2) \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X &= \Phi X \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

На обе части равенства (2.9 (1)) подействуем оператором Φ^2 , а на обе части равенства (2.9 (2)) подействуем оператором Φ . Тогда получим

$$\begin{aligned} 1) \Phi^2 \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi^2 \nabla_\xi(\Phi)\Phi X &= \Phi^2 X; \\ 2) \Phi \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi \nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X &= \Phi^2 X \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Продифференцировав ковариантно равенство $\eta \circ \Phi = 0$, получаем

$$\nabla_X(\eta)(\Phi Y) + \eta \circ \nabla_X(\Phi)Y = 0 \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)). \quad (2.11)$$

В частности, если в последнем равенстве положить $Y = \xi$, то $\eta\{\nabla_X(\Phi)\xi\} = 0$ для любого $X \in \mathcal{X}(M)$.

Продифференцировав ковариантно равенство $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$, получаем

$$\nabla_X(\Phi)\Phi Y + \Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y = \xi \nabla_X(\eta)Y + \eta(Y)\nabla_X \xi.$$

В полученном равенстве сделаем замену $Y = \xi$. Тогда с учетом тождества $\nabla_X(\eta)\xi = 0$ для любого $X \in \mathcal{X}(M)$, получим тождество

$$\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y = \nabla_X \xi \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \quad (2.12)$$

С учетом (2.10) и (2.12) для (2.8(3)) имеем

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{2} \{ \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi \} = \frac{1}{2} \{ \nabla_{\Phi^2 X} \xi - \Phi \circ \nabla_{\Phi X} \xi \} \\ &= \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\nabla_X \xi - \Phi^2 X \\ &= -\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \quad \triangleright \end{aligned}$$

3. Свойства интегрируемости GK-многообразий

Напомним [6], что компоненты тензора Нейенхейса

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] \}$$

на пространстве присоединенной G -структуры имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) N_{ab}^0 &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[a,b]}^0; & 2) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= -N_{\hat{b}\hat{a}}^0 = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{(\hat{a},\hat{b})}^0; & 3) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{[\hat{a},\hat{b}]}^0; \\ 4) N_{\hat{b}0}^a &= -N_{0\hat{b}}^a = \frac{\sqrt{-1}}{4} \Phi_{\hat{b},0}^a - \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{0,\hat{b}}^a; & 5) N_{\hat{b}\hat{c}}^a &= \sqrt{-1} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^a; \\ 6) N_{\hat{b}0}^{\hat{a}} &= -N_{0\hat{b}}^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{0},\hat{b}}^{\hat{a}} - \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{\hat{b},0}^{\hat{a}}; & 7) N_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{[\hat{b},\hat{c}]}^{\hat{a}}. \end{aligned}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

С учетом (2.2) компоненты тензора Нейенхейса $N_\Phi(X, Y)$ GK -структуры на пространстве присоединенной G -структуры примут следующий вид:

$$\begin{aligned} 1) N_{ab}^0 &= \frac{1}{2}F_{ab}; & 2) N_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{1}{2}F^{ab}; & 3) N_{\hat{b}0}^a &= -N_{0\hat{b}}^a = \frac{3}{4}F^{ab}; \\ 4) N_{\hat{b}\hat{c}}^a &= 2C^{abc}; & 5) N_{\hat{b}0}^a &= -N_{0\hat{b}}^a = \frac{3}{4}F_{ab}; & 6) N_{bc}^a &= 2C_{abc}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

Теорема 3.1. Тензор Нейенхейса оператора Φ GK -структуры обладает свойствами:

$$\begin{aligned} 1) N_\Phi(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + N_\Phi(\Phi X, \Phi Y) &= 0; \\ 2) N_\Phi(\Phi^2 X, \Phi Y) - N_\Phi(\Phi X, \Phi^2 Y) &= 0; \\ 3) N_\Phi(X, \xi) &= -\frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi X} \xi + 2 \nabla_X \xi + \Phi^2 X \} \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)). \end{aligned}$$

\triangleleft 1): Применяя процедуру восстановления тождества [4, 7] к равенствам $N_{\hat{a}\hat{b}}^0 = N_{\hat{a}\hat{b}}^c = N_{\hat{a}\hat{b}}^{\hat{c}} = 0$, получим тождество $N_\Phi(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + N_\Phi(\Phi X, \Phi Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

2): Сделав в последнем тождестве замену $Y \rightarrow \Phi Y$, для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ получаем тождество $N_\Phi(\Phi^2 X, \Phi Y) - N_\Phi(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0$.

3): Вид тензора Нейенхейса

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \Phi^2[X, Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] \}$$

с учетом формулы $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, выражающей отсутствие кручения связности, примет вид

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4} \{ \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y - \nabla_{\Phi Y}(\Phi)X + \Phi \nabla_Y(\Phi)X - \Phi \nabla_X(\Phi)Y \} \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)).$$

Отсюда

$$N_\Phi(X, \xi) = \frac{1}{4} \{ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi \nabla_\xi(\Phi)X - \Phi \nabla_X(\Phi)\xi \} \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \quad (3.2)$$

Положим в (2.1) $Y = \xi$. Тогда $\nabla_X(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)X = -\Phi X$ для любого $X \in \mathcal{X}(M)$. С учетом полученного равенства соотношение (3.2) примет вид

$$N_\Phi(X, \xi) = -\frac{1}{4} \{ \Phi \nabla_{\Phi X} \xi + 2 \nabla_X \xi + \Phi^2 X \} \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \triangleright$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [6]. Почти контактная метрическая структура называется *интегрируемой*, если $N_\Phi = 0$.

Теорема 3.2. Интегрируемая GK -структура является структурой Кенмоцу.

\triangleleft Пусть GK -структура является интегрируемой. Тогда, согласно определению 3.1, $N_\Phi = 0$. Последнее равенство с учетом (3.1) равносильно соотношениям $F^{ab} = F_{ab} = 0$; $C^{abc} = C_{abc} = 0$. И согласно предложению 2.2 структура является структурой Кенмоцу. \triangleright

Известно [10], что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, а именно:

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X, Y) &= N_\Phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi; & N^{(2)}(X, Y) &= (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\Phi Y}\eta)(X); \\ N^{(3)}(X) &= (\mathcal{L}_\xi\Phi)(X); & N^{(4)}(X) &= (\mathcal{L}_\xi\eta)(X) \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)), \end{aligned}$$

где \mathcal{L}_X — производная Ли в направлении векторного поля X .

Вычислим компоненты этих тензоров на пространстве присоединенной G -структуры.

Учитывая, что $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G -структуры на многообразии M , а также то обстоятельство, что на пространстве присоединенной G -структуры $\xi^a = \xi_a = 0$, $\xi^0 = 1$, согласно (1.1(1)) находим, что на этом пространстве

$$\begin{aligned} 1) (d\eta \otimes \xi)_{ij}^a &= (d\eta \otimes \xi)_{ij}^{\hat{a}} = 0; & 2) (d\eta \otimes \xi)_{ab}^0 &= F_{ab}; \\ 3) (d\eta \otimes \xi)_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= F^{ab}; & 4) (d\eta \otimes \xi)_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= (d\eta \otimes \xi)_{\hat{a}\hat{b}}^0 = 0; \\ 5) (d\eta \otimes \xi)_{0a}^0 &= (d\eta \otimes \xi)_{a0}^0 = 0; & 6) (d\eta \otimes \xi)_{0\hat{a}}^0 &= (d\eta \otimes \xi)_{\hat{a}0}^0 = 0; \\ 7) (d\eta \otimes \xi)_{00}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

С учетом соотношений (3.1) и (3.3) получаем, что на пространстве присоединенной G -структуры, тензор $N^{(1)}(X, Y) = N_{\Phi}(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} 1) (N^{(1)})_{ab}^0 &= \frac{5}{2}F_{ab}; & 2) (N^{(1)})_{\hat{a}\hat{b}}^0 &= \frac{5}{2}F^{ab}; \\ 3) (N^{(1)})_{b0}^a &= -(N^{(1)})_{0b}^a = \frac{3}{4}F^{ab}; & 4) (N^{(1)})_{b0}^{\hat{a}} &= -(N^{(1)})_{0b}^{\hat{a}} = \frac{3}{4}F_{ab}; \\ 5) (N^{(1)})_{\hat{b}\hat{c}}^a &= 2C^{abc}; & 6) (N^{(1)})_{bc}^{\hat{a}} &= 2C_{abc}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

а остальные компоненты нулевые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2 [6, 10]. Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N_{\Phi}(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0$.

Понятие нормальности было введено Сасаки и Хатакеямой [11] и является одним из наиболее фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанным с понятием интегрируемости структуры.

Теорема 3.3. *Нормальная GK -структура является структурой Кенмоцу, а значит, локально канонически конциркулярна косимплектической структуре.*

◁ Из определения 3.2 и (3.4) следует, что GK -структура является нормальной тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$, $C^{abc} = C_{abc} = 0$. Согласно предложению 2.2 GK -структура является Кенмоцу структурой. Поскольку структура Кенмоцу получается из косимплектической каноническим конциркулярным преобразованием, то нормальная GK -структура локально канонически конциркулярна косимплектической структуре. ▷

Из теорем 3.2 и 3.3 следует

Теорема 3.4. *Пусть $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — AC -структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — интегрируемая GK -структура;
- 2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — нормальная GK -структура;
- 3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — структура Кенмоцу.

Теперь вычислим компоненты тензора $N^{(2)}(X, Y) = (\mathcal{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathcal{L}_{\Phi Y}\eta)(X)$, где \mathcal{L}_X — производная Ли в направлении векторного поля X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3 [6]. Пусть M — гладкое многообразие, X — векторное поле на M , $\{F_t\}$ — соответствующая ему локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия, T — тензорное поле типа (r, s) на M . Производной Ли тензорного поля T в направлении векторного поля X называется тензорное поле $\mathcal{L}_X T$ на M , в каждой точке $p \in M$ определяемое формулой

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p).$$

Оператор $\mathcal{L}_X : T(M) \rightarrow T(M)$, сопоставляющий тензорному полю $T \in T(M)$ тензорное поле $\mathcal{L}_X T$, называется оператором дифференцирования Ли в направлении векторного поля X .

Оператор дифференцирования Ли обладает следующими свойствами [6]:

- 1) оператор \mathcal{L}_X является дифференцированием тензорной алгебры $T(M)$ многообразия, сохраняющим тип тензоров и перестановочным с операторами свертки;
- 2) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, $\forall f \in C^\infty(M)$;
- 3) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Замечательным обстоятельством является то, что перечисленные свойства оператора дифференцирования Ли однозначно определяют этот оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1 [6]. Пусть t — произвольный тензор типа (r, s) на M . Выражение $\mathcal{L}_X(t)(X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s)$, будучи линейным по аргументам $X_1, \dots, X_r, u^1, \dots, u^s$, не является линейным по аргументу X .

С учетом перечисленных свойств имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) &= \mathcal{L}_{\Phi X} \left(C_{(1)}^{(1)} \eta \otimes Y \right) = C_{(1)}^{(1)} \mathcal{L}_{\Phi X}(\eta \otimes Y) \\ &= C_{(1)}^{(1)} \mathcal{L}_{\Phi X}(\eta) \otimes Y + C_{(1)}^{(1)} \eta \otimes \mathcal{L}_{\Phi X}(Y) = \mathcal{L}_{\Phi X}(\eta) \otimes Y + \eta \otimes \mathcal{L}_{\Phi X}(Y), \end{aligned}$$

т. е. $\mathcal{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) = \mathcal{L}_{\Phi X}(\eta) \otimes Y + \eta \otimes \mathcal{L}_{\Phi X}(Y)$.

С учетом тождества $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ и свойств оператора дифференцирования Ли из полученного равенства имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Phi X}(\eta)(Y) &= \mathcal{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) - \eta(\mathcal{L}_{\Phi X} Y) = (\Phi X)(\eta(Y)) - \eta([\Phi X, Y]) \\ &= (\Phi X)(\eta(Y)) - \eta(\nabla_{\Phi X} Y) + \eta(\nabla_Y(\Phi X)) = \{(\Phi X)(\eta(Y)) - \eta(\nabla_{\Phi X} Y)\} \\ &\quad + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X + \Phi \nabla_Y X\} = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} + \eta\{\Phi \nabla_Y X\} \\ &= \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathcal{L}_{\Phi X}(\eta)(Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} \quad (\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)). \quad (3.5)$$

Рассмотрим характеристический вектор GK -многообразия. Поскольку ξ является тензором типа $(0, 1)$, то его компоненты $\{\xi^i\}$ на главном расслоении $B(M)$ реперов над M удовлетворяют дифференциальным уравнениям [6]

$$d\xi^i - \xi^k \theta_k^i = \xi^i_{,j} \theta^j, \quad (3.6)$$

где $\{\xi^i_{,j}\}$ — система функций, служащая компонентами ковариантного дифференциала вектора ξ в связности ∇ . Расписывая (3.6) на пространстве присоединенной G -структуры, с учетом соотношений $\xi^a = \xi^{\hat{a}} = 0$, $\xi^0 = 1$, и вида тензорных компонент формы римановой связности [3]:

$$1) \theta_b^a = \frac{1}{2} F^{ab} \omega + C^{abc} \omega_c; \quad 2) \theta_b^{\hat{a}} = \frac{1}{2} F_{ab} \omega + C_{abc} \omega^c;$$

$$\begin{aligned} 3) \theta_0^a &= \delta_b^a \omega^b - F^{ab} \omega_b; & 4) \theta_0^{\hat{a}} &= \delta_a^{\hat{b}} \omega_b - F_{ab} \omega^b; & 5) \theta_a^0 &= F_{ab} \omega^b - \delta_a^{\hat{b}} \omega_b; \\ 6) \theta_a^0 &= F^{ab} \omega_b - \delta_b^a \omega^b; & 7) \theta_0^0 &= 0; & 8) \theta_j^i + \theta_j^{\hat{i}} &= 0, \end{aligned}$$

получим

$$1) \xi_{,b}^a = -F^{ab}; \quad 2) \xi_{,b}^{\hat{a}} = -F_{ab}; \quad 3) \xi_{,b}^a = \delta_b^a; \quad 4) \xi_{,b}^{\hat{a}} = \delta_a^{\hat{b}},$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 3.5. *Характеристический вектор ξ GK -структуры не является вектором Киллинга.*

\triangleleft Поскольку $\delta_b^a + \delta_b^{\hat{a}} = \xi_{,b}^a + \xi_{,b}^{\hat{a}} = \xi_{a,b} + \xi_{b,\hat{a}} \neq 0$, т. е. $\langle \nabla_X \xi, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y \xi \rangle \neq 0$ для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, то ξ не является вектором Киллинга. \triangleright

Аналогично для контактной формы GK -многообразия:

$$1) \eta_{a,b} = -F_{ab}; \quad 2) \eta_{\hat{a},\hat{b}} = -F^{ab}; \quad 3) \eta_{a,\hat{b}} = \delta_b^a; \quad 4) \eta_{\hat{a},b} = \delta_b^{\hat{a}}, \quad (3.7)$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 3.6. *Контактная форма GK -структуры не является формой Киллинга.*

Согласно соотношению (3.5) $N^{(2)}(X, Y)$ примет следующий вид:

$$N^{(2)}(X, Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\{\nabla_X(\Phi)Y\}, \quad (3.8)$$

для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Из (3.7) следует, что $N^{(2)}(X, Y) = -N^{(2)}(Y, X)$, значит тензор $N^{(2)}(X, Y)$ кососимметричен, т. е. является 2-формой.

На пространстве присоединенной G -структуры тождество (3.8) примет вид

$$N_{ij}^{(2)} = \eta_{j,k} \Phi_i^k - \eta_{i,k} \Phi_j^k + \eta_k \Phi_{i,j}^k - \eta_k \Phi_{j,i}^k. \quad (3.9)$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat{a}} = \eta_a = 0$, $\eta_0 = 1$ и вида матрицы Φ на пространстве присоединенной G -структуры (1.2), из (3.9) имеем

$$1) N_{ab}^{(2)} = 4\sqrt{-1}F_{ab}; \quad 2) N_{\hat{a}\hat{b}}^{(2)} = -4\sqrt{-1}F^{ab}, \quad (3.10)$$

остальные компоненты нулевые.

Из (3.10) непосредственно следует следующая

Теорема 3.7. *На GK -многообразии $N^{(2)}(X, Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$.*

Из определения 2.2 и теоремы 3.7 следует

Теорема 3.8. *GK -многообразие с $N^{(2)}(X, Y) = 0$ является SGK -многообразием II рода.*

Используя локальное строение SGK -многообразия II рода [5], теорему 3.8 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.9. *GK -многообразие с $N^{(2)}(X, Y) = 0$ локально канонически конциркулярно точнее косимплектическому многообразию.*

Поскольку точнее косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [5], то предыдущую теорему можно сформулировать так:

Теорема 3.10. *GK -многообразие с $N^{(2)}(X, Y) = 0$ локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Рассмотрим теперь тензор

$$\begin{aligned} N^{(3)}(X) &= \mathcal{L}_\xi(\Phi)(X) = \mathcal{L}_\xi(\Phi X) - \Phi \mathcal{L}_\xi X = [\xi, \Phi X] - \Phi[\xi, X] \\ &= \nabla_\xi(\Phi X) - \nabla_{\Phi X} \xi - \Phi(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi) = \nabla_\xi(\Phi)X + \Phi \nabla_\xi X \\ &\quad - \nabla_{\Phi X} \xi - \Phi \nabla_\xi X + \Phi \nabla_X \xi = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X} \xi + \Phi \nabla_X \xi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким образом, на GK -многообразии

$$N^{(3)}(X) = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X} \xi + \Phi \nabla_X \xi \quad (\forall X \in \mathcal{X}(M)). \quad (3.12)$$

На пространстве присоединенной G -структуры тождество (3.12) равносильно соотношениям

$$1) (N^{(3)})^a_b = -3\sqrt{-1}F^{ab}; \quad 2) (N^{(3)})^{\hat{a}}_{\hat{b}} = 3\sqrt{-1}F_{ab}, \quad (3.13)$$

остальные компоненты нулевые.

Из (3.13) и определения 2.3 следует

Теорема 3.11. *На GK -многообразии $N^{(3)}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$, т. е. когда многообразие является SGK -многообразием II рода.*

Используя локальное строение SGK -многообразия II рода [5], теорему 3.11 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.12. *GK -многообразие с $N^{(3)}(X) = 0$ локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

И, наконец, рассмотрим тензор $N^{(4)}(X) = (\mathcal{L}_\xi \eta)(X)$ для любого $X \in X$. Имеем

$$\begin{aligned} N^{(4)}(X) &= (\mathcal{L}_\xi \eta)(X) = \mathcal{L}_\xi(\eta(X)) - \eta(\mathcal{L}_\xi X) = \xi(\eta(X)) - \eta([\xi, X]) \\ &= \nabla_\xi(\eta(X)) - \eta(\nabla_\xi X) + \eta(\nabla_X \xi) = \nabla_\xi(\eta)(X) + \eta(\nabla_X \xi) - \eta(\nabla_\xi X) \\ &\quad + \eta(\nabla_X \xi) = \nabla_\xi(\eta)(X) + \eta(\nabla_X \xi) = \nabla_\xi(\eta)(X), \end{aligned}$$

т. е.

$$N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X) \quad (\forall X \in X). \quad (3.14)$$

С учетом (3.7) тождество (3.14) на пространстве присоединенной G -структуры равносильно соотношениям $(N^{(4)})_i = 0$, т. е. $N^{(4)}(X) = 0$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3.13. *На GK -многообразии $N^{(4)}(X) = 0$.*

Результаты теорем 2.5, 3.9–3.12 можно сформулировать в виде следующей основной теоремы.

Основная теорема. *Пусть M — GK -многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) GK -многообразие имеет замкнутую контактную форму;
- 2) $F^{ab} = F_{ab} = 0$;

3) $N^{(2)}(X, Y) = 0$;

4) $N^{(3)}(X) = 0$;

5) M — SGK -многообразие II рода;6) M — локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.

Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Литература

1. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.—1972.—Vol. 24, № 1.—P. 93–103. DOI: 10.2748/tmj/1178241594.
2. Tanno S. The automorphisms groups of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.—1969.—Vol. 21, № 1.—P. 21–38. DOI: 10.2748/tmj/1178243031.
3. Bishop R. L., O'Neil B. Manifolds of negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 145.—P. 1–50. DOI: 10.1090/s0002-9947-1969-0251664-4.
4. Кириченко В. Ф. О геометрии многообразий Кенмоцу // Докл. РАН.—2001.—Т. 380, № 5.—С. 585–587.
5. Умнова С. В. Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. . . канд. физ.-мат. наук.—М.: МПГУ, 2002.—88 с.
6. Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. 2-е изд., доп.—Одесса: Печатный дом, 2013.—458 с.
7. Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 8.—С. 71–100.
8. Abu-Saleem A., Rustanov A. R. Curvature identities special generalized manifolds Kenmotsu second kind // Malaysian J. Math. Sci.—2015.—Vol. 9, № 2.—P. 187–207.
9. Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н. Контактные геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Мат. заметки.—2006.—Т. 80, № 2.—С. 209–219.
10. Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry.—Berlin: Springer-Verlag, 1976.—148 p.—(Lecture Notes in Mathematics; Book 509.)
11. Sasaki S., Hatakeyama J. On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II // Tohoku Math. J.—1961.—Vol. 13, № 2.—P. 281–294. DOI: 10.2748/tmj/1178244304.

Статья поступила 11 июля 2017 г.

Abu-Saleem A.^a, Rustanov A. R.^b, Kharitonova S. V.^c Integrability Properties of Generalized Kenmotsu Manifolds, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2018, vol. 20, no. 2, pp. 4–20 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.3.17829.

Abstract. The article is devoted to generalized Kenmotsu manifolds, namely the study of their integrability properties. The study is carried out by the method of associated G -structures; therefore, the space of the associated G -structure of almost contact metric manifolds is constructed first. Next, we define the generalized Kenmotsu manifolds (in short, the GK -manifolds) and give the complete group of structural equations of such manifolds. The first, second, and third fundamental identities of GK -structures are defined. Definitions of special generalized Kenmotsu manifolds (SGK -manifolds) of the I and II kinds are given. We consider GK -manifolds the first fundamental distribution of which is completely integrable. It is shown that the almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximal dimension of the first distribution of a GK -manifold is nearly Kahler. The local structure of a GK -manifold with a closed contact form is obtained,

^a Al al-Bayt University, P.O.Box 130040, Mafrq 25113, Jordan.

^b National Research University (MGSU), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow 129337, Russia.

^c Orenburg State University, 13 Pobedy av., Orenburg 460000, Russia.

E-mail: dr_ahmad57@yahoo.com, aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

and the expressions of the first and second structural tensors are given. We also compute the components of the Nijenhuis tensor of a GK-manifold. Since the setting of the Nijenhuis tensor is equivalent to the specification of four tensors $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, the geometric meaning of the vanishing of these tensors is investigated. The local structure of the integrable and normal GK-structure is obtained. It is proved that the characteristic vector of a GK-structure is not a Killing vector. The main result is **Theorem**: *Let M be a GK-manifold. Then the following statements are equivalent: 1) GK-manifold has a closed contact form; 2) $F^{ab} = F_{ab} = 0$; 3) $N^{(2)}(X, Y) = 0$; 4) $N^{(3)}(X) = 0$; 5) M — is a second-kind SGK manifold; 6) M is locally canonically concircular with the product of a nearly Kahler manifold and a real line.*

Key words: generalized Kenmotsu manifold, Kenmotsu manifold, normal manifold, Nijenhuis tensor, integrable structure, nearly Kahler manifold.

Mathematical Subject Classification (2000): 58A05.

References

1. Kenmotsu K. A Class of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. J.*, 1972, vol. 24, no. 1, pp. 93–103. DOI: 10.2748/tmj/1178241594.
2. Tanno S. The Automorphisms Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. J.*, 1969, vol. 21, no. 1, pp. 21–38. DOI: 10.2748/tmj/1178243031.
3. Bishop R. L., O’Neil B. Manifolds of Negative Curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 145, pp. 1–50. DOI: 10.1090/s0002-9947-1969-0251664-4.
4. Kirichenko V. F. On the Geometry of Kenmotsu Manifolds, *Doklady RAN* [Reports of the RAS], 2001, vol. 380, no. 5, pp. 585–587 (in Russian).
5. Umnova S. V. *Geometriya mnogoobrazij Kenmotsu i ih obobshenij: Dis...kand. fiz.-mat. nauk* [Geometry Kenmotsu Manifolds and their Generalizations: Dis... Cand. Sci. Sciences], Moscow, Moscow State Pedagogical University, 2002, 88 p. (in Russian).
6. Kirichenko V. F. *Differencial’no-geometricheskie struktury na mnogoobrazijah. 2-e izd., dop.* [Differential-Geometric Structures on Manifolds. Second edition, expanded], Odessa, Printing House, 2013, 458 p. (in Russian).
7. Kirichenko V. F., Rustanov A. R. Differential Geometry of Quasi-Sasakian Manifolds, *Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 8, pp. 1173–1201. DOI: 10.1070/SM2002v193n08ABEH000675.
8. Abu-Saleem A., Rustanov A. R. Curvature Identities Special Generalized Manifolds Kenmotsu Second Kind, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 2, pp. 187–207.
9. Kirichenko V. F., Dondukova N. N. Contactly Geodesic Transformations of Almost-Contact Metric Structures, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 80, no. 1–2, pp. 204–213. DOI: 10.1007/s11006-006-0129-0.
10. Blair D. E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Series: Lecture Notes in Mathematics; book 509*, Berlin, Springer-Verlag, 1976, 148 p.
11. Sasaki S., Hatakeyama Y. On Differentiable Manifolds with Certain Structures which are Closely Related to Almost Contact Structure. II, *Tohoku Math. J.*, 1961, vol. 13, no. 2, pp. 281–294. DOI: 10.2748/tmj/1178244304.

Received July 11, 2017