Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 87–93

УДК 514.113.5
DOI 10.23671/VNC.2018.3.18032

СИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОГРАННИКИ С РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ[1]

В. И. Субботин[a]

Аннотация. В работе рассматриваются замкнутые выпуклые многогранники в трехмерном евклидовом пространстве, некоторые вершины которых являются одновременно изолированными, симметричными и ромбическими. Ромбичность вершины означает, что все грани многогранника, инцидентные этой вершине, являются равными между собой ромбами в количестве n. Симметричность вершины означает, что она расположена на нетривиальной оси вращения порядка n многогранника. Учитывая, что совокупность всех ромбов вершины P называется ромбической звездой вершины P, изолированность вершины P означает, что ее ромбическая звезда не имеет общих точек с ромбическими звездами других вершин многогранника. Предположим, что в многограннике имеются также грани F_i, не принадлежащие ни одной ромбической звезде, причём у каждой грани F_i существует ось вращения, которая является локальной осью вращения звезды этой грани. Многогранники с такими условиями названы в работе RS-многогранниками (от первых букв слов rombic, symmetry). RS-многогранники оказываются связанными с многогранниками, сильно симметричными относительно вращения. Многогранники, сильно симметричные относительно вращения были ранее введены и полностью перечислены автором; они являются обобщением класса правильных (платоновых) многогранников. Отметим, что среди сильно симметричных многогранников есть семь таких, которые не являются комбинаторно эквивалентными ни правильным, ни равноугольно-полуправильным (архимедовым). В настоящей работе найдены все RS-многогранники и устанавливается связь некоторых из них с параллелоэдрами в трехмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: сильно симметричный многогранник, ромбическая вершина, RS-многогранник, TE-преобразование, параллелоооэдр.

Mathematical Subject Classification (2000): 52B10, 52B15.

Введение

Тема настоящей статьи относится к направлению, в котором рассматриваются различные обобщения правильных (платоновых) многогранников (см., например, [1–6] и ссылки в списке литературы в [2]). К таким обобщениям относятся, в частности, классы сильно симметричных многогранников, рассмотренные автором в работах [2–4]; особенностью этих обобщений является то, что в основу положены свойства симметрии элементов многогранника. Например, в [2] рассматривается класс многогранников, *сильно*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности, проект № 16-41-240670.

[a] Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Первомайская, 164–148.
E-mail: `geometry@mail.ru`

симметричных относительно вращения граней. Напомним, что замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется *сильно симметричным относительно вращения граней*, если у каждой грани имеется ось вращения многогранника, перпендикулярная этой грани и пересекающая ее относительную внутренность. В [2] найден полный перечень таких многогранников, а также двойственных им — сильно симметричных относительно вращения многогранных углов. В числе этих многогранников имеются семь, которые даже комбинаторно не эквивалентны правильным и архимедовым.

В [4] было доказано, что глобальное условие на ось вращения можно ослабить, а именно, была доказана лемма: *для того чтобы многогранник был сильно симметричным, необходимо и достаточно, чтобы у каждой грани F имелась ось вращения, которая является осью вращения звезды грани F.* Под звездой грани F (вершины V) понимается совокупность всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с гранью F (вершиной V).

В настоящей работе вводится и полностью перечисляется класс замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с симметричными ромбическими вершинами (класс RS) и устанавливается связь этого класса с параллелоэдрами в E^3.

Следующие определения являются подготовительными для введения понятия многогранника с ромбическими вершинами.

Определение 1. Вершина V многогранника называется *ромбической*, если ее звезда состоит из равных ромбов, имеющих общей вершиной V. При этом все ромбы одинаково расположены, т. е. сходятся в вершине V либо острыми, либо тупыми углами.

Если число таких ромбов равно n, то вершину будем называть *n-ромбической.*

Определение 2. n-ромбическая вершина называется *симметричной*, если она расположена на нетривиальной оси вращения порядка n многогранника.

Определение 3. Ромбическая вершина называется *изолированной*, если ее звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой ромбической вершины многогранника.

Определение 4. Фигура, состоящая из ромбов звезды изолированной симметричной n-ромбической вершины, называется *симметричной n-ромбической шапочкой*, а сама вершина называется *вершиной шапочки.*

Определение 5. Две равные симметричные n-ромбические шапочки, расположенные друг к другу своими вогнутыми сторонами, будем называть *зеркально расположенными*, если они либо симметричны относительно плоскости, либо могут быть совмещены при помощи зеркального поворота вокруг оси, проходящей через их вершины.

Зеркальный поворот вокруг оси L — это композиция поворота вокруг оси L и отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Из определения 5, в частности, следует, что *ромбоэдр* — это выпуклый многогранник, составленный из двух равных симметричных зеркально расположенных 3-ромбических шапочек.

Если рассматривать многогранники, каждая вершина которых является симметричной ромбической, но не изолированной, то, как известно, класс таких многогранников исчерпывается двумя многогранниками: ромбическим додекаэдром и ромботриаконтаэдром [2].

1. Многогранники с ромбическими вершинами

Далее будем рассматривать многогранники, каждая ромбическая вершина которых является симметричной и изолированной. При этом каждая грань F, не входящая в звезду ромбической вершины, имеет ось вращения, перпендикулярную F. Предполагается, что эта ось вращения является осью вращения звезды грани F. Такой класс многогранников будем обозначать RS.

Теорема. *Всякий многогранник класса RS может быть получен при помощи преобразования отсечения некоторых трехгранных вершин одного из сильно симметричных относительно вращения граней многогранников и последующего симметричного продления полученных треугольных сечений до ромбов.*

$\triangleleft$ Операция отсечения вершины определяется, например, в [6, с. 76], [7, с. 439]. Преобразование отсечения вершины и последующего симметричного продления в своей плоскости получившейся в результате отсечения грани, упомянутое в теореме, будем называть *TE-преобразованием.*

Рассмотрим некоторый RS-многогранник M. Пусть A — некоторая его изолированная n-ромбическая вершина. Проведем плоскость p, опорную к M в точке A перпендикулярно оси вращения, проходящей через A. Сдвинем параллельно плоскость p в направлении от точки A к внутренности M до тех пор, пока эта плоскость пройдет через меньшие диагонали всех ромбов ромбической шапочки с вершиной A. Удалим часть многогранника, лежащую по ту сторону от плоскости p, которая содержит вершину A. Пересечение плоскости p с M представляет собой грань F. Через внутренность F проходит ось вращения многогранника M. Каждое ребро грани F является стороной треугольника, входящего в звезду F. Эти треугольники образуют замкнутую зону граней. Обозначим эту зону Z. Любые два соседние треугольника зоны Z имеют только одну общую вершину, которая является также и вершиной грани F. Ни через один из этих n треугольников не будет проходить ось вращения многогранника M.

Проделаем это с каждой ромбической вершиной многогранника M. Получим многогранник M', у которого через каждую грань, исключая треугольные, проходят оси вращения. Далее рассуждаем аналогично случаю многогранников с изолированными несимметричными поясами [4], т. е. рассмотрим один из треугольников T зоны Z. Продолжим три грани, имеющие общие ребра с T, до их пересечения в одной точке. Проделаем это с каждым треугольником каждой зоны. Получим новый многогранник M''.

Через центр каждой грани многогранника M'' будет проходить ось вращения многогранника. Таким образом, M'' является сильно симметричным относительно вращения граней.

Проведем теперь все построения в обратном порядке. Получим из многогранника M'' многогранник M с изолированными симметричными ромбическими вершинами. $\triangleright$

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что для каждой ромбической вершины V достаточно считать ось вращения, проходящую через V, *локальной* осью вращения фигуры, состоящей из ромбической шапочки с вершиной V и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с ромбами этой шапочки.

Далее *преобразование удлинения* (вдоль оси вращения) многогранника означает такой сдвиг его двух равных симметричных ромбических шапочек вдоль оси вращения этих шапочек, что расстояние между вершинами шапочек увеличивается. При этом раздвигаемые общие вершины ромбов шапочек, отличные от вершин шапочек, будут концами новых равных и параллельных оси сдвига ребер.

Напомним, что *усеченный ромбический триаконтаэдр* и 2*-й полуусеченный ромбический триаконтаэдр* — это два типа сильно симметричных многогранников из [2], которые могут быть получены отсечением вершин ромбического триаконтаэдра. *Усеченный икосаэдр* — один из полуправильных (архимедовых) многогранников, полученный отсечением вершин икосаэдра. *Удлиненный ромбический додекаэдр* — многогранник, полученный из ромбододекаэдра преобразованием удлинения вдоль оси AB 4-го порядка (рис. 2, e). *Удлиненный ромбоэдр* получается преобразованием удлинения вдоль оси AB ромбоэдра — многогранника, составленного из шести равных ромбов (рис. 2, f).

Следствие. *Следующие типы многогранников исчерпывают класс RS:*

a)–b) многогранники с 5-ромбическими вершинами, TE-преобразованные из усеченного ромбического триаконтаэдра;

c) многогранник с 5-ромбическими вершинами, TE-преобразованный из 2-го полуусеченного ромбического триаконтаэдра;

d) многогранник с 5-ромбическими вершинами, TE-преобразованный из усеченного икосаэдра;

e) удлиненный ромбический додекаэдр с 4-ромбическими вершинами;

f) удлиненные ромбоэдры с 3-ромбическими вершинами.

◁ Так как все многогранники, сильно симметричные относительно вращения граней перечислены, то достаточно выбрать из них те, которые допускают TE-преобразование. Многогранники, соответствующие типам a)–f) следствия, представлены на рис. 1 и 2.

Усеченный ромбический триаконтаэдр получен отсечением вершин степени 3 и степени 5 в ромбическом триаконтаэдре. Поэтому, применяя TE-преобразование к каждой трехгранной вершине каждой пятиугольной грани усеченного ромбического триаконтаэдра, получим многогранник пункта a). Если треугольные грани достаточно большие, т. е. будут иметь общие вершины с ромбами, то получим многогранник b).

2-й полуусеченный ромбический триаконтаэдр получен из ромбического триаконтаэдра отсечением только вершин степени 5. Поэтому, применяем TE-преобразование к вершинам 5-угольных граней 2-го полуусеченного ромбического триаконтаэдра. Получим многогранник пункта c).

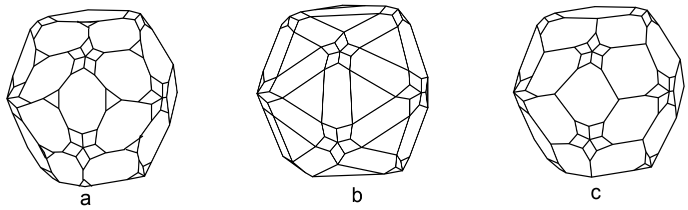

Рис. 1. RS-многогранники.

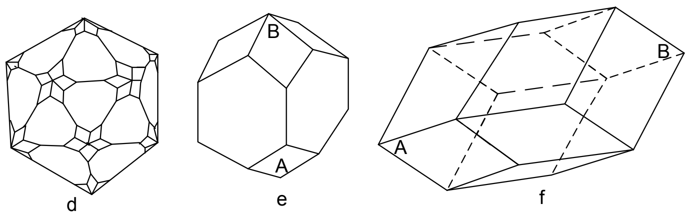

Рис. 2. RS-многогранники.

Применяя аналогично TE-преобразование к усеченному икосаэдру, получим многогранник d). Многогранник e) получается применением TE-преобразования к трехгранным углам верхнего и нижнего квадратных оснований прямоугольного параллелепипеда. Многогранник f) получается применением TE-преобразования к трехгранным углам оснований правильной 6-угольной призмы. ▷

Отметим, что наличие оси симметрии 5-го порядка в некоторых многогранниках класса RS может служить указанием на возможные их приложения в теории квазикристаллов (см., например, [8]).

2. Связь RS-многогранников с параллелоэдрами

Как известно, [9] выпуклый многогранник P называется *параллелоэдром*, если все пространство E^3 можно разбить на параллельные копии P.

Всего существует пять аффинных типов параллелоэдров: параллелепипед, 6-угольная призма, ромбододекаэдр, удлиненный ромбододекаэдр и усеченный октаэдр.

Определение 6. *Правильным* будем называть параллелоэдр, гранями которого могут быть равные между собой ромбы и (или) правильные многоугольники и который является единственным с точностью до подобия в своем аффинном классе.

Очевидно, что правильные параллелоэдры следующие: куб, правильная 6-угольная призма с квадратными боковыми гранями, ромбододекаэдр, усеченный октаэдр с правильными 6-угольными и квадратными гранями, 12-гранник с правильными 6-угольными и ромбическими гранями — удлиненный ромбододекаэдр.

Замечание. В следующем предложении правильный плоский 6-угольник рассматривается как предельная форма 3-ромбической шапочки, у которой три ромба в вершине шапочки имеют тупые углы по $2\pi/3$. Таким образом, две зеркально расположенные ромбические шапочки совпадают и образуют в этом случае дважды покрытый плоский правильный 6-угольник; его мы будем считать замкнутым выпуклым многогранником — ромбоэдром, составленным из двух 3-ромбических шапочек. Аналогично, квадрат рассматривается как предельная форма 4-ромбической шапочки, у которой четыре ромба становятся квадратами. В этом случае две зеркально расположенные 4-ромбические шапочки совпадают и образуют дважды покрытый квадрат, который мы так же будем считать замкнутым выпуклым многогранником. Отметим, что с этой точки зрения правильная 4-угольная и правильная 6-угольная призма могут считаться предельными (вырожденными) формами RS-многогранников. Среди правильных параллелоэдров только удлиненный ромбододекаэдр является невырожденным RS-многогранником.

Предложение. *Для каждого правильного параллелоэдра P существует единственный многогранник R с ромбическими гранями такой, что P может быть получен из R либо преобразованием удлинения, либо (в случае, когда P — усеченный октаэдр) отсечением ромбических вершин.*

$\triangleleft$ Принимая во внимание предыдущее замечание, видим, что куб и правильная 6-угольная призма с квадратными боковыми гранями получаются, соответственно, путем преобразования удлинения дважды покрытых квадрата и правильного 6-угольника.

Ромбододекаэдр получаем удлинением ромбоэдра, у которого ромбы равны ромбам в ромбододекаэдре, т. е. у каждого ромба отношение диагоналей равно $\sqrt{2}$. Причем удлинение проводится вдоль зеркальной оси 6-го порядка на расстояние, равное длине стороны ромбов. Таким образом, ромбододекаэдр является частным случаем многогранника f) на рис. 2.

Полным отсечением трехгранных вершин ромбододекаэдра, при котором отсекающая плоскость проходит через концы ребер, инцидентных отсекаемой вершине, с последующим отсечением 4-гранных вершин ромбододекаэдра, получаем четвертый правильный параллелоэдр — усеченный октаэдр.

Рассмотрим теперь две зеркально расположенные симметричные 4-ромбические шапочки с совпадающими граничными вершинами на больших диагоналях ромбов шапочек. При этом шапочки выберем такие, чтобы на границе каждой шапочки все соседние ромбы составляли между собой углы по $2\pi/3$. Применяя преобразование удлинения на расстояние, равное стороне ромбов, к многограннику образованному этими шапочками, получим пятый правильный параллелоэдр — удлиненный ромбододекаэдр. $\triangleright$

Литература

1. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes.—N. Y.: Dover, 1973.
2. *Субботин В. И.* Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сб.—2016.—Т. 17, № 4.—С. 132–140.
3. *Субботин В. И.* Сильно симметричные многогранники // Зап. науч. семинаров ПОМИ.—2003.—Т. 299.—С. 314–325.
4. *Субботин В. И.* О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников // Чебышевский сб.—2015.—Т. 16, № 2.—С. 222–230.
5. *Тимофеенко А. В.* К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова.—2011.—Т. 6, № 3.—С. 155–170.
6. *Емеличев В. А., Ковалев М. Д., Кравцов М. К.* Многогранники. Графы. Оптимизация.—М.: Наука, 1981.—344 с.
7. *Циглер Г. М.* Теория многогранников.—М.: МЦНМО, 2014.—568 с.
8. *Артамонов В. А.* Квазикристаллы и их симметрии // Фундамент. и прикл. математика.—2004.—Т. 10, № 3.—С. 3–10.
9. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники.—Новосибирск: Наука, 2007.—492 с.

Статья поступила 5 июня 2017 г.

Subbotin V. I.[a] Symmetric Polyhedra with Rhombic Vertices, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2018, vol. 20, no. 2, pp. 87–93 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.3.18032.

Abstract. Closed convex polyhedra in three-dimensional Euclidean space, some vertices of which are simultaneously isolated, symmetric and rhombic are considered in this paper. The rhombicity of the vertex means that all the faces of the polyhedron incident to this vertex are n rhombi equal to each other. The symmetry of a vertex means that it is located on a nontrivial rotation axis of order n of the polyhedron. Taking into account that the set of all rhombi of a vertex P is called a rhombic star of a vertex P, the isolation of a vertex P means that its rhombic star has no common points with rhombic stars of other vertices of a polyhedron. Suppose that in a polyhedron there are also faces F_i that do not belong to a single rhombic star, and each of F_i has a rotation axis, which is the local axis of rotation of a star of this face. Polyhedra with such conditions are called in the paper RS-polyhedra (from the first letters of the words rombic, symmetry). RS-polyhedrons are related to polyhedra that are strongly symmetric with respect to rotation. Polyhedra, strongly symmetric with respect to rotation were previously introduced and are completely listed by the author; they are a generalization of the class of regular (Platonic) polyhedra. We note that among strongly symmetric polyhedra there are seven such that are not combinatorically equivalent to either regular or equilateral semiregular (Archimedean). In the present paper, all RS-polyhedrons are found. It is shown that some of them are related to parallelohedra in three-dimensional Euclidean space.

Key words: strongly symmetrical polyhedron, rhombic vertex, RS-polyhedron, TE-transformation, parallelohedron.

Mathematical Subject Classification (2000): 52B10, 52B15.

References

1. *Coxeter H. S. M.* Regular Polytopes, New York, Dover, 1973, 346 p.
2. *Subbotin V. I.* On a Class of Strongly Symmetric Polyhedra, *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshevskii Sbornik], 2016, vol. 17, no. 4, pp. 132–140 (in Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2016-17-4-132-140.
3. *Subbotin V. I.* Strongly Symmetric Polyhedra, *Journal of Mathematical Sciences*, 2005, vol. 131, no. 1, pp. 5438–5444. DOI: 10.1007/s10958-005-0419-1.
4. *Subbotin V. I.* Some Generalizations of Strongly Symmetric Polyhedra, *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshevskii Sbornik], 2015, vol. 16, no. 2, pp. 222–230 (in Russian).

[a] Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
164–148 Pervomajskaya st., Novocherkassk 346428, Russia.
E-mail: geometry@mail.ru

5. *Timofeenko A. V.* To the list of convex polyhedra with regular faces, *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern Problems of Mathematics and Mechanics], 2011, vol. 6, no. 3, pp. 155–170 (in Russian).
6. *Emelichev V. A., Kovalev M. D., Kravtsov M. K. Mnogogranniki. Grafy. Optimizatsiya* [Polyhedra. Graphs. Optimization], Moscow, 1981, 344 p.
7. *Ziegler G. M.* Lectures on Polytopes, New York, 1995, 373 p. DOI:10.1007/978-1-4613-8431-1.
8. *Artamonov V. A.* Quasicrystals and their symmetries, *Journal of Mathematical Sciences*, 2006, vol. 139, no. 4, pp. 6657–6662. DOI: 10.1007/s10958-006-0382-5.
9. *Alexandrov A. D.* Convex Polyhedra, New York, 2005, 524 p. DOI: 10.1007/b137434.

Received June 5, 2017