

УДК 519.17

DOI 10.23671/VNC.2018.4.23386

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА
С ПАРАМЕТРАМИ (117, 36, 15, 9)

А. К. Гутнова¹, А. А. Махнев²

¹ Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44-46;

² Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

E-mail: gutnovaalina@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Аннотация. В предшествующих работах авторов найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-3}(s, t)$. В частности, локально псевдо $pG_2(5, 2)$ -граф является сильно регулярным графом с параметрами (117, 36, 15, 9). Основным результатом данной статьи является теорема, в которой найдены возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (117, 36, 15, 9). Этот граф имеет спектр $36^1, 9^2, -3^9$. Порядок клики в Γ не превосходит $1 + 36/3 = 13$, порядок коклики в Γ не превосходит $117 \cdot 3/39 = 9$. Далее из этого результата выведено следствие, что если группа G автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (117, 36, 15, 9) действует транзитивно на множестве вершин, то цокль T группы G изоморфен либо $L_3(3)$ и $T_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $T \cong L_4(3)$ и $T_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

Образец цитирования: Гутнова А. К., Махнев А. А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (117, 36, 15, 9) // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 43–49. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23386.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит v вершин, регулярен степени k , и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

В работах А. А. Махнева и А. К. Гутновой [1–3] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-3}(s, t)$. В частности, локально псевдо $pG_2(5, 2)$ -граф является сильно регулярным графом с параметрами $(117, 36, 15, 9)$.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы для сильно регулярного графа с параметрами $(117, 36, 15, 9)$. Этот граф имеет спектр $36^1, 9^{26}, -3^{90}$. Порядок клики в Γ не превосходит $1 + 36/3 = 13$, порядок коклики в Γ не превосходит $117 \cdot 3/39 = 9$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с параметрами $(117, 36, 15, 9)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 26, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l , взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 26$ делится на p . Если $|g| = p^2$, p — простое число, то p^2 делит $\chi_1(g^p) - 26$.

◁ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 26 & 13/2 & -13/4 \\ 90 & -15/2 & 9/4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/36$. Подставляя $\alpha_2(g) = 117 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 1]. ▷

Лемма 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с параметрами $(117, 36, 15, 9)$, A — трехвершинный подграф из Γ , y_i — число вершин из $\Gamma - A$, смежных точно с i вершинами из A . Если A — коклика, то $y_0 = 33 - y_3$, если A — объединение изолированной вершины и ребра, то $y_0 = 40 - y_3$, если A — геодезический путь, то $y_0 = 47 - y_3$, а если A — клика, то $y_0 = 54 - y_3$.

◁ Пусть A — коклика. Тогда $y_1 = 54 + 3y_3$, $y_2 = 27 - 3y_3$ и $y_0 = 33 - 3y_3$. Пусть A — клика. Тогда $y_1 = 18 + 3y_3$, $y_2 = 42 - 3y_3$ и $y_0 = 54 - 3y_3$. Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи. ▷

Пусть до конца работы Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(117, 36, 15, 9)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Заметим, что если a , b — две вершины из Ω и $p > 13$, то $[a] \cap [b] \subset \Omega$.

Лемма 3. Выполняются следующие утверждения:

- (1) в Γ нет собственных сильно регулярных подграфов с параметрами $(v', k', 15, 9)$;
- (2) если Ω — пустой граф, то $p = 13$, $\alpha_1(g) = 39$ и $\alpha_2(g) = 78$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 36l - 9$ и $\alpha_2(g) = 126 - 36l$;
- (3) если Ω является n -кликкой, то $n > 1$ и либо $p = 5$, $n = 2, 7, 12$, $\alpha_1(g) = 60l + 75 - 15n$ и $\alpha_2(g) = 42 + 14n - 60l$, либо $p = 2$, $n = 5, 7, 9, 11, 13$, $\alpha_1(g) = 24l + 39 - 3n$ и $\alpha_2(g) = 78 + 2n - 24l$;
- (4) если Ω не является кликой или пустым графом, то Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 13$.

◁ Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 15, 9)$. Так как $n^2 = 36 + 4(k' - 9)$, то $n = 2u$, $k' = u^2$ и Δ имеет собственные значения $u + 3$, $-(u - 3)$. Кратность $u + 3$ равна $(u - 4)u(u^2 + u - 3)/18$, поэтому $u \geq 6$.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $117 = 13 \cdot 9$, то $p \in \{3, 13\}$. Положим $\alpha_i(g) = pw_i$. Пусть $p = 13$. Тогда $\chi_1(g) = 13(w_1/3 - 1)/4$, поэтому $\alpha_1(g) = 39$ и $\alpha_2(g) = 78$. Пусть

$p = 3$. Тогда $\chi_1(g) = (w_1 - 13)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 36l - 9$ и $\alpha_2(g) = 126 - 36l$.

Пусть Ω является n -кликкой, a — вершина из Ω . Если $n = 1$, то p делит 36 и 80, поэтому $p = 2$, противоречие с тем, что для вершины $u \in \Gamma - a^\perp$, подграф $[u] \cap [u^g]$ пересекает Ω .

Если $n > 1$, то p делит 20, 50 и $17 - n$, поэтому либо $p = 5$ и $n = 2, 7, 12$, либо $p = 2$ и $n = 3, 5, \dots, 13$. В любом случае $\chi_1(g) = (n + pw_1/3 - 13)/4$.

В случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 60l + 75 - 15n$ и $\alpha_2(g) = 42 + 14n - 60l$. В случае $p = 2$ число $(n + 2w_1/3 - 13)/4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 24l + 39 - 3n$ и $\alpha_2(g) = 78 + 2n - 24l$. Если $n = 3$, то некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ не смежна с вершинами из Ω , противоречие.

Пусть Ω является m -кликкой, $m > 1$. Тогда p делит 9 и 26, противоречие.

Пусть Ω содержит ребро и является объединением $t \geq 2$ изолированных клик. Тогда p делит 9 и 20, противоречие.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. Если $p > 13$, то Ω — сильно регулярный граф с $\lambda = 15$ и $\mu = 9$, противоречие с утверждением (1). \triangleright

Лемма 4. Пусть Ω содержит геодезический путь b, a, c . Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если Ω содержит вершину a степени 36, то либо $p = 3$ и $\alpha_0(g) = 45$, либо $p = 2$, $37 \leq \alpha_0(g) \leq 63$ и число $\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13$ делится на 8;

(2) p не больше 7;

(3) если $p = 7$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (26, 15, 8, 9) и $\alpha_1(g) = 24$.

\triangleleft Пусть Ω содержит вершину a степени 36. Ввиду леммы 2 любая $\langle g \rangle$ -орбита длины p не содержит 3-кликки. Так как любая вершина из $\Gamma - a^\perp$ смежна с 9 вершинами из $[a]$, то любая $\langle g \rangle$ -орбита длины p не содержит геодезических 2-путей. Если $p > 2$, то любая $\langle g \rangle$ -орбита длины p является кликой и $p \leq 7$. В этом случае

$$\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + (117 - \alpha_0(g))/3 - 13)/4,$$

поэтому $\alpha_0(g) = 6l + 3$ для $p > 3$ и $\alpha_0(g) = 18l + 9$ для $p = 3$. Отсюда $p = 3$ и $\alpha_0(g) = 45$.

Если $p = 2$, то число $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ четно. Утверждение (1) доказано.

Пусть $p = 13$. Тогда $\lambda_\Omega = 2, 15$, $\mu_\Omega = 9$, $|\Omega| = 13, 26, 39, 52$ и степени вершин в Ω равны 10, 23. Если $|\Omega| = 13$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами (13, 10, 2, 9), противоречие.

Пусть $|\Omega| = 26$. Если Ω содержит вершину a степени 23, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно 18, но не меньше $23 \cdot 7$, противоречие. Значит, Ω — сильно регулярный граф с параметрами (26, 10, 2, 9), противоречие.

Пусть $|\Omega| = 39$. Если Ω содержит вершину a степени 10, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $28 \cdot 9$, но не больше $20 \cdot 10$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 23, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 52$. Если Ω содержит вершину a степени 10, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $41 \cdot 9$, но не больше $10 \cdot 21$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 23, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $28 \cdot 9 = 20y + 7(23 - y)$, поэтому $y = 13$. Но если b, c — две вершины степени 2 в графе $\Omega(a)$, то $[b] \cap [c]$ содержит 13 вершин из $[a] - \Omega$ и не менее 12 вершин из $\Omega_2(a)$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $\lambda_\Omega = 4, 15$, $\mu_\Omega = 9$, $|\Omega| = 18, 29, 40, 51$ и степени вершин в Ω равны 14, 25. Если Ω содержит вершину a степени 14, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $14 \cdot 9$, равно $9(|\Omega| - 15)$, но не больше $14 \cdot 20$, поэтому $|\Omega| = 40$ и указанное число

равно $9 \cdot 25 = 20y + 9(14 - y)$. $y = 9$. Но если b, c — две вершины из $\Omega(a)$, смежные с 20 вершинами из $\Omega_2(a)$, то $[b] \cap [c]$ содержит a и не менее 15 вершин из $\Omega_2(a)$, противоречие.

Значит, Ω — регулярный граф степени 25, $|\Omega| = 40$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $14 \cdot 9$, но не меньше $9 \cdot 25$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 8, 15$, $\mu_\Omega = 2, 9$, $|\Omega| = 19, 26, 33, 40, 47, 54$ и степени вершин в Ω равны $8, 15, 22, 29$. Если $|\Omega| > 33$, то любая $\langle g \rangle$ -орбита длины 7 не содержит 3-клик. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ и в случае $\alpha_0(g) = 40$ имеем $\alpha_1(g) = 63$. В этом случае на $\Gamma - \Omega$ имеется 5 кликовых $\langle g \rangle$ -орбит и 6 орбит степени 4. Противоречие с тем, что для ребра и изолированной от него вершины из $\langle g \rangle$ -орбиты степени 4, подграф, состоящий из вершин, смежных с 0 или 3 вершинами из этой тройки, содержит 40 вершин из Ω и 2 вершины из этой $\langle g \rangle$ -орбиты, противоречие. В случае $\alpha_0(g) = 47$ имеем $\alpha_1(g) = 42$. В этом случае для геодезического 2-пути из $\langle g \rangle$ -орбиты подграф, состоящий из вершин, смежных с 0 или 3 вершинами из этой тройки, содержит 47 вершин из Ω и 2 вершины из этой $\langle g \rangle$ -орбиты, противоречие. В случае $\alpha_0(g) = 54$ имеем $\alpha_1(g) = 63$ и $\chi_1(g) = (41 + 21)/4$, противоречие.

Значит, $|\Omega| \leq 33$. Если Ω содержит вершину a степени 8, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $8 \cdot 6$ и равно $2(|\Omega| - 9)$, поэтому $|\Omega| = 33$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(33, 8, 1, 2)$. В этом случае Ω имеет собственные значения 2, -3 и кратность 2 равна $2 \cdot 8 \cdot 11/10$, противоречие.

Если Ω содержит вершину a степени 22, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $22 \cdot 6$ и не больше $10 \cdot 9$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 15, $|\Omega| = 26$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $15 \cdot 6 = 10 \cdot 9$. Отсюда Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 15, 8, 9)$ и $\chi_1(g) = (13 + \alpha_1(g)/3)/4$, поэтому $\alpha_1(g) = 24$. \triangleright

Лемма 5. Пусть Ω содержит геодезический путь b, a, c . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) число p не равно 5;
- (2) если $p = 3$, то $|\Omega| \leq 33$ или $|\Omega| = 45$;
- (3) если $p = 2$, то $|\Omega| \leq 63$.

\triangleleft Пусть $p = 5$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 5, 10, 15$, $\mu_\Omega = 4, 9$, $|\Omega| = 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52$, степени вершин в Ω равны $6, 11, 16, 21, 26, 31$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$.

Пусть Y — множество вершин из $\Omega_2(a)$, смежных с 9 вершинами из $\Omega(a)$, $y = |Y|$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $6|\Omega(a)| + 5x$. С другой стороны, указанное число ребер равно $9y + 4(|\Omega_2(a)| - y)$ и делится на 5, противоречие.

Пусть $p = 3$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 3, \dots, 15$, $\mu_\Omega = 0, 3, 6, 9$, $|\Omega| = 6, 9, \dots, 54$ и степени вершин в Ω равны $0, 3, 6, \dots, 36$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$, поэтому $(\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3.

Если $|\Omega| > 33$, то ввиду леммы 2 любая $\langle g \rangle$ -орбита длины 3 является кликой, $\alpha_1(g) = 117 - \alpha_0(g)$ и $(2\alpha_0(g)/3 + 26)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3. Поэтому $\alpha_0(g) = 45$ и $\alpha_1(g) = 72$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 3, \dots, 15$, $\mu_\Omega = 1, 3, \dots, 9$, $|\Omega| = 5, 7, \dots, 65$ и степени вершин в Ω равны $0, 2, 4, \dots, 36$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$, поэтому $(\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ четно.

Если $|\Omega| > 63$, то любая $\langle g \rangle$ -орбита длины 2 является кликой, $\alpha_1(g) = 117 - \alpha_0(g) = 52$ и $\chi_1(g) = (65 + 52/3 - 13)/4$, противоречие. \triangleright

Лемма 6. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(117, 36, 15, 9)$ и группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Пусть f — элемент порядка 13 из G , g — элемент простого порядка $p < 13$ из $C_G(f)$. Тогда $|C_G(f)|$

делит 26 и если инволюция $g \in G$ централизует f , то $\text{Fix}(g)$ является 13-кликкой и $\alpha_1(g) = 0$.

$\triangleleft |G|$ делится на $9 \cdot 13$. По теореме 1 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$.

Пусть G содержит подгруппу $\langle h \rangle$ порядка $13p$, p — простое число, меньшее 11, $g = h^{13}$, $f = h^p$. Ввиду теоремы 1 $\text{Fix}(f)$ — пустой граф, $p = 2$ и либо $|\Omega| = 13$ и $\alpha_1(g) = 24l$ делится на 13, либо $|\Omega| = 39$. В последнем случае $\chi_1(g) = (\alpha_1(g)/3 + 26)/4$, число $(\alpha_1(g)/3 + 26)/4$ четно и $\alpha_1(g) = 3(8l - 26)$ делится на 13, противоречие. Из действия g на $U_i = \{u \in \Gamma : d(u, u^{f^i}) = 1\}$ следует, что $\Omega = \text{Fix}(g)$ пересекает U_i для любого i , не кратного 13, поэтому Ω является 13-кликкой.

Пусть V — подгруппа порядка 4 из $C_G(f)$. Так как $\chi_1(g) - 26$ не делится на 4, то V — элементарная абелева группа. Из действия V на $U = \{u \in \Gamma : d(u, u^f) = 1\}$ следует, что $\Omega = \text{Fix}(g)$ содержится в U для любой инволюции $g \in V$, противоречие с действием V на $W = \{w \in \Gamma : d(w, w^f) = 2\}$. \triangleright

3. Основной результат

Теорема 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (117, 36, 15, 9), $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p = 13$, $\alpha_1(g) = 39$ и $\alpha_2(g) = 78$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 36l - 9$ и $\alpha_2(g) = 126 - 36l$;

(2) Ω является n -кликкой, и либо $p = 5$, $n = 2, 7, 12$, $\alpha_1(g) = 60l + 75 - 15n$ и $\alpha_2(g) = 42 + 14n - 60l$, либо $p = 2$, $n = 5, 7, 9, 11, 13$, $\alpha_1(g) = 24l + 39 - 3n$ и $\alpha_2(g) = 78 + 2n - 24l$;

(3) Ω содержит геодезический 2-путь и либо

(i) $p = 7$, Ω — сильно регулярный граф с параметрами (26, 15, 8, 9) и $\alpha_1(g) = 24$, либо

(ii) $p = 3$, $|\Omega| \leq 33$ или $|\Omega| = 45$, либо

(iii) $p = 2$ и $|\Omega| \leq 63$.

\triangleleft Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений (X, \mathcal{R}) с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l .

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1 , отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q .

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство \mathbf{C}^v является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств

W_0, \dots, W_d матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Утверждения 1)–2) следуют из леммы 3. Доказательство утверждения 3) следует из лемм 3–5. \triangleright

Следствие 1. *Если группа G автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(117, 36, 15, 9)$ действует транзитивно на множестве вершин, то цоколь T группы G изоморфен либо $L_3(3)$ и $T_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $T \cong L_4(3)$ и $T_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.*

\triangleleft Ввиду леммы 6 имеем $S(G) = O_3(G)$. Пусть $\bar{G} = G/O_3(G)$, \bar{T} — цоколь группы \bar{G} . Из действия подгруппы порядка 13 на минимальной нормальной подгруппе \bar{N} из \bar{G} следует, что $|\bar{N}|$ делится на 13. Отсюда \bar{T} — простая неабелева группа и ввиду [6, таблица 1] группа \bar{T} изоморфна $L_3(3)$, $L_2(25)$, $U_3(4)$, $PSp_4(5)$, $L_4(3)$, ${}^2F_4(2)'$, $L_2(13)$, $L_2(27)$, $G_2(3)$, ${}^3D_4(2)$, $Sz(8)$, $L_2(64)$, $U_4(5)$, $L_3(9)$, $PSp_6(3)$, $P\Omega_7(3)$, $G_2(4)$, $PSp_4(8)$, $P\Omega_8^+(3)$.

Так как \bar{T} содержит максимальную подгруппу индекса, делящего $13 \cdot 9$, то либо $\bar{T} \cong L_3(3)$ и $\bar{T}_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $\bar{T} \cong L_4(3)$ и $\bar{T}_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.

В любом случае $O_3(G) = 1$. \triangleright

Литература

1. Гутнова А. К., Махнев А. А. Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s, t)$ // Докл. АН.—2014.—Т. 454, № 2.—С. 145–148. DOI: 10.7868/S0869565214020042.
2. Гутнова А. К., Махнев А. А. Локально псевдо $GQ(4, t)$ -графы // Докл. АН.—2015.—Т. 462, № 6.—С. 637–641. DOI: 10.7868/S086956521518005X.
3. Гутнова А. К., Махнев А. А. Графы диаметра, не большего 3, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s, t)$ // Докл. АН.—2015.—Т. 461, № 6.—С. 629–632. DOI: 10.7868/S0869565215120038.
4. Cameron P. J. Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts № 45).
5. Гаврилюк А. Л., Махнев А. А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.—2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
6. Zavarnitsine A. V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirian Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 29 мая 2018 г.

ГУТНОВА Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

МАХНЕВ Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

ON AUTOMORPHISMS OF A STRONGLY REGULAR GRAPH
WITH PARAMETERS (117, 36, 15, 9)Gutnova, A. K.¹ and Makhnev, A. A.²¹ North Ossetian State University,

44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia;

² N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,

16 S. Kovalevskaja st., Ekaterinburg 620990, Russia

E-mail: gutnovaalina@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Abstract. In the previous work of the authors, arrays of intersections of distance-regular graphs were found, in which the neighborhoods of the vertices are pseudogeometric graphs for $pG_{s-3}(s, t)$. In particular, a locally pseudo $pG_2(5, 2)$ -graph is a strongly regular graph with parameters (117, 36, 15, 9). The main result of this paper gives a description of possible orders and the structure of the subgraphs of fixed points of automorphisms of a strongly regular graph with parameters (117, 36, 15, 9). This graph has a spectrum of $36^1, 9^2, -3^9$. The order of clicks in Γ does not exceed $1 + 36/3 = 13$, the order of the cocliques in Γ does not exceed $117 \cdot 3/39 = 9$. Further, from this result, the following corollary is derived: if the group Γ of automorphisms of a strongly regular graph with parameters (117, 36, 15, 9) acts transitively on the set of vertices, then the socle T of the group Γ is isomorphic to either $L_3(3)$ and $T_a \cong GL_2(3)$ is a subgroup of index 117, or $T_a \cong GL_2(3)$ and $T_a \cong U_4(2).Z_2$ is a subgroup of index 117.

Key words: strongly regular graph, symmetric graph, automorphism groups of a graph.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

For citation: Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A. On Automorphisms of a Strongly Regular Graph with Parameters (117, 36, 15, 9), *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 43–49 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23386.

References

1. Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A. Completely Regular Graphs in Which Neighborhoods of Vertices are Pseudogeometric Graphs for $pG_{s-3}(s, t)$, *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 2, pp. 145–148 (in Russian). DOI: 10.7868/S0869565214020042.
2. Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A. Locally Pseudo $GQ(4, t)$ -Graphs, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 462, no. 6, pp. 637–641 (in Russian). DOI: 10.7868/S086956521518005X.
3. Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A. Graphs of Diameter not Greater than 3, in Which Neighborhoods of Vertices are Pseudogeometric Graphs for $pG_{s-3}(s, t)$, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 461, no. 6, pp. 629–632 (in Russian). DOI: 10.7868/S0869565215120038.
4. Cameron, P. J. *Permutation Groups. London Math. Soc. Student Texts, no. 45*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
5. Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A. On Automorphisms of Amply Regular Graphs with the Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Mathematics*, vol. 432, no. 5, pp. 512–515. (in Russian).
6. Zavaritsina, A. V. Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received May 29, 2018

ALINA K. GUTNOVA

North Ossetian State University,

44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia,

Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry

E-mail: gutnovaalina@gmail.com

ALEXANDER A. MAKHNEV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,

16 S. Kovalevskaja st., Ekaterinburg 620990, Russia,

Head of Department of Algebra and Topology

E-mail: makhnev@imm.uran.ru

<https://orcid.org/0000-0003-2868-6713>