Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 50–58

УДК 517.956
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23387

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ — САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Езаова[1]

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Аннотация. В работе исследована однозначная разрешимость задачи типа задачи Бицадзе — Самарского для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами в односвязной области. Краевое условие поставленной задачи содержит оператор дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса, от значений решения на характеристиках поточечно связанных со значениями решения и производной от него на линии вырождения. При определенных ограничениях типа неравенства на заданные функции и порядки дробных производных в краевом условии, методом интегралов энергии, доказана единственность решения поставленной задачи. Получены функциональные соотношения между следом искомого решения и производной от него, принесенные на линию вырождения из гиперболической и параболической частей смешанной области. При выполнении условий теорем единственности, доказано существование решения задачи путем эквивалентной редукции к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно производной от следа искомого решения, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи. Так же определены промежутки изменения порядков операторов дробного интегро-дифференцирования, при которых решение задачи существует и единственно. Установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной в уравнении на разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: оператор дробного интегро-дифференцирования, метод интегралов энергии, уравнение с разрывными коэффициентами, краевая задача, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Mathematical Subject Classification (2000): 35M10.

Образец цитирования: *Езаова А. Г.* Однозначная разрешимость одной задачи типа задачи Бицадзе — Самарского для уравнения с разрывными коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 50–58. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23387.

1. Введение

Теория краевых задач для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это обусловлено как непосредственными связями уравнений смешанного типа с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, теории интегральных преобразований и специальных функций, так и прикладными задачами механики и математической физики, сводящимися к таким уравнениям. Основы этой теории были заложены в трудах Ф. Трикоми [1] и С. Геллерстедта [2].

Следующим этапом в развитии теории уравнений смешанного типа стали работы Ф. И. Франкля [3, 4], где он заметил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. Академик И. Н. Векуа указал на важность уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а так же в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

Трехмерный аналог задачи Трикоми был впервые предложен А. В. Бицадзе [5] в случае, когда поверхность изменения типа уравнений является поверхностью временного типа. В задаче Трикоми часть характеристического многообразия Γ свободна от граничных условий. Следовательно, точки Γ не являются равноправными как носители граничных данных. Этот факт не дает возможность найти непосредственный аналог задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в многомерных областях, особенно в случае, когда поверхность изменения типа пространственно ориентирована.

В связи с этим в шестидесятых годах А. В. Бицадзе была выдвинута проблема поиска правильной постановки краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, когда все точки характеристической части границы равноправны как носители краевых данных.

В 1969 г. А. М. Нахушев [6, 7] предложил ряд нелокальных задач нового типа, которые явились непосредственным обобщением задачи Трикоми и вошли в математическую литературу под названием краевых задач со смещением. Они являются обобщением задачи Трикоми, а также содержат широкий класс корректных самосопряженных задач. Эти задачи сразу вызвали большой интерес многих авторов.

В последние годы исследования задач со смещением для уравнений смешанного и гиперболического типа ведутся особенно интенсивно. Но в этих работах краевые условия, как правило, содержат классические операторы Римана — Лиувилля. Нелокальным краевым задачам, содержащим операторы более сложной структуры, посвящено сравнительно мало работ. Начало исследований краевых задач со смещением для гиперболического уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона, где имеются обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования, было положено работами японского математика М. Сайго [8].

Результаты О. А. Репина [9] являются продолжением исследований в этом направлении и посвящены локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений гиперболического и смешанного типов с вырождением первого и второго рода. Поставленные и исследуемые задачи отличаются от изучавшихся другими авторами прежде всего тем, что краевые условия содержат обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса.

В работах для вырождающихся гиперболических и эллиптико-гиперболического типов уравнений многими авторами исследовались задачи со смещением (по терминологии А. М. Нахушева) и задачи типа задачи Бицадзе — Самарского, когда на гиперболической части границы области задано локальное условие, поточечно связывающее значения искомого решения или производной, вообще говоря, дробной определенного порядка, зависящего от порядка вырождения уравнения. Этими авторами не были рассмотрены задачи со смещением, когда в краевых условиях участвуют дробные производные или интегралы произвольных порядков, не зависящих от порядка вырождения уравнения [9, 10].

Естественным обобщением теории нелокальных краевых задач явились нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений с операторами более сложной структуры — обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса. Этому направлению посвящено немало работ, среди которых работы таких авторов как М. С. Салахитдинова, О. А. Репина, С. К. Кумыковой, А. В. Псху и др. В опубликованных работах, краевые условия содержат классические операторы или операторы дробного в смысле Римана — Лиувилля интегро-дифференцирования [10–15].

В данной работе рассматривается смешанное гиперболо-параболическое уравнение с разрывными коэффициентами, краевое условие которого содержит оператор дробного интегро-дифференцирования. Путем редукции задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода определены промежутки изменения порядков операторов дробного интегро-дифференцирования, при которых решение существует и единственно. Также установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной в уравнении на разрешимость задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} cu_{xxx}+p_2(x,y)u_{xx}+p_1(x,y)u_x+p_0(x,y)u-u_y, & y>0,\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}+p(-y)^{\frac{m}{2}-1}u_x, & y<0,\ m\geqslant 2, \end{cases} \tag{1}$$

где $p=\mathrm{const}\neq 0$ — вещественная постоянная в односвязной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x=0$, $y=1$, $x=1$ соответственно при $y>0$, и характеристиками

$$AC: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0, \quad BC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения (1) при $y<0$.

Пусть $\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$, $I\equiv AB$ — интервал $0<x<1$ прямой $y=0$; $\Theta_0(x)=\frac{x}{2}-i\left[\frac{m+2}{4}x\right]^{\frac{2}{m+2}}$ — точка пересечения характеристики уравнения (1) при $y<0$, выходящей из точки $(x,0)\in I$ с характеристикой AC.

Задача 1. Найти функцию $u\,(x,y)$ такую, что

$$u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_2)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2),$$

являющуюся решением уравнения (1) в области Ω при $y\neq 0$ и удовлетворяющей условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u(1,y)=\varphi_2(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_3(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{2}$$

$$p(x)D^a_{0x}\delta(x)u\left[\Theta_0(x)\right]+c(x)u(x,0)-\gamma(x)u_y(x,0)=f(x)\quad (\forall\, x\in I), \tag{3}$$

где $c(x)$, $p(x)$, $\gamma(x)$, $f(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i=1,2,3)$ — заданные известные функции, причем $c(x)$, $p(x)$, $\gamma(x)$, $f(x)\in C'(\overline{I})\cap c^3(I)$; $p_i(x,y)\in C^i(\overline{\Omega})$; выполняется неравенство $c^2(x)+p^2(x)+\gamma^2(x)\neq 0$; $\varphi_i(y)\in C[0,1]\cap C^2]0,1[$; D^a_{0x} — оператор дробного интегро-дифференцирования [4].

Подобного типа задачи изучались ранее в работах Репина О. А. [9], Кумыковой С. К. [10].

3. Основные результаты

Обозначим

$$\alpha = \frac{m-2p}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2p}{2(m+2)}, \quad \varepsilon = \alpha+\beta = \frac{m}{m+2}, \quad \gamma = \frac{2}{m+2}.$$

Теорема 1. *Пусть $|p| < \frac{m}{2}$. Тогда решение задачи (1)–(3) в Ω единственно, если выполняются следующие условия:*

$$p_2(x,0) \geqslant 0, \quad p''_{2x}(x,0) - p'_{1x}(x,0) + 2p_0(x,0) \leqslant 0, \quad p_i(x,y) \in C^i(\Omega_1), \tag{4}$$

и в случае

$$a = \alpha, \quad \delta(x) = x^{-\gamma} \tag{5}$$

выполняются условия

$$A_1(x) = \frac{\Gamma\,(\varepsilon)p(x)}{\Gamma(\beta)} + c(x)x^{1-\beta} \neq 0 \quad (\forall\, x \in \overline{I}), \tag{6}$$

$$p(1) = 0, \quad \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{2}\left(\frac{p(x)}{A_1(x)}\right)' \leqslant 0; \quad \frac{x^{1-\beta}\gamma(x)}{A_1(x)} \geqslant 0, \tag{7}$$

а в случае

$$a = 1-\beta, \quad \delta(x) = 1 \tag{8}$$

выполняются условия

$$A_2(x) = p(x) + l_1 x^{\alpha}\gamma(x) \neq 0 \quad (\forall\, x \in \overline{I}) \tag{9}$$

$$p(1) = 0, \quad \sin\frac{\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{p(x)}{A_2(x)}\right)' \leqslant 0, \quad \frac{x^{\alpha}c(x)}{A_2(x)} \geqslant 0 \quad (\forall\, x \in \overline{I}), \tag{10}$$

где

$$l_1 = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\varepsilon)}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\gamma}.$$

$\lhd$ Устремляя $y \to +0$ в уравнении (1), получим основное функциональное соотношение между функциями $\tau(x) = u(x,0)$ и $v(x) = u_y(x,0)$, принесенное на $\overline{I}$ из Ω_1 в виде [16]

$$v(x) = \tau'''(x) + p_2(x,0)\tau''(x) + p_1(x,0)\tau'(x) + p_0(x,0)\tau(x), \tag{11}$$

при этом граничные условия (2) принимают вид

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(1) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0).$$

Умножим выражение (11) на $v(x)$ и, интегрируя от 0 до 1, после некоторых преобразований получим

$$J^* = \int_0^1 \tau(x)v(x)\,dx = -\frac{1}{2}(\tau'(1))^2 - \int_0^1 p_2(x,0)\tau'^2(x)\,dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \big(p''_{2x}(x,0) - p'_{1x}(x,0) + 2p_0(x,0)\tau^2(x)\,dx\big) = 0. \tag{12}$$

При выполнении условий (4) теоремы 1 получаем, что

$$J^* = \int_0^1 \tau(x)v(x)\,dx \leqslant 0.$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2 имеет вид [17]

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \gamma(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$$
$$+ \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \cdot (-y) \int_0^1 v\left[x + \gamma(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\,dt.$$

Удовлетворяя последнее условию (3), получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное на линию AB из Ω_2 вида [17, 18]

$$-p(x)\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\gamma} D_{0x}^{a}\delta(x) D_{x1}^{b-1} x^{-\alpha}\nu(x)$$
$$+ p(x)\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)} D_{0x}^{a}\delta(x) x^{\gamma} D_{0x}^{-\alpha} x^{\beta-1}\tau(x) - \gamma(x)v(x) + c(x)\tau(x) = f(x).$$

При выполнении условия (5) теоремы 1 последнее соотношение принимает вид

$$\left[\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)}p(x)x^{\beta-1} + c(x)\right]\tau(x)$$
$$= \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\gamma} p(x) D_{0x}^{\alpha} x^{-\gamma} D_{0x}^{\beta-1} x^{-\alpha} v(x) + \gamma(x)v(x) + f(x). \qquad (13)$$

Так как

$$J_1 = D_{0x}^{\alpha} x^{-\gamma} x^{-\alpha} v(x) = \gamma \frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\left[\Gamma(1-\alpha)(1-\beta)\right]^2} x^{-\alpha-\gamma} D_{0x}^{\varepsilon-1} v(x),$$

то после некоторых преобразований (13) принимает вид [2]

$$\tau(x) = B(x) D_{0x}^{\varepsilon-1} v(x) + \gamma_1(x) v(x) + f_1(x), \qquad (14)$$

где

$$B(x) = \frac{K \cdot p(x)}{A_1(x)}, \quad K = \frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\frac{m}{m+2}} \frac{\Gamma^2(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma^3(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta}, $$
$$A_1(x) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)}p(x) + c(x)x^{1-\beta} \neq 0, \quad f_1(x) = \frac{x^{1-\beta} f(x)}{A_1(x)}, \quad \gamma_5(x) = \frac{x^{1-\beta}\gamma(x)}{A_1(x)}.$$

Выражение (14) есть основное функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\gamma(x)$, принесенное на AB из Ω_2.

Пусть выполнены условия (6), (7) теоремы 1. Умножая (14) на $v(x)$, в случае (5) при $f_1(x) = 0$, и рассматривая интеграл

$$J^* = \int\limits_0^1 \tau(x)v(x)\,dx,$$

получим, что $J^* \geqslant 0$ для любого $x \in \overline{I}$. Следовательно, $J^* \equiv 0 \Rightarrow v(x) = 0$ и из (14) при $f_1(x) = 0$ получаем $\tau(x) = 0$. Таким образом, $u(x,y) \equiv 0$ в Ω_2, как решение задачи Коши уравнения (1) с нулевыми данными, а в Ω_1 — $u(x,y) \equiv 0$, как решение однородной задачи (1), (2).

Для доказательства существования решения задачи в случае (5) проинтегрируем трижды соотношение (11) от 0 до x. С учетом краевых условий (2) получаем

$$\tau(x) - \frac{x^2}{2}\int\limits_0^1 k(1,t)\tau(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x k(x,t)\tau(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 v(t)\,dt - \frac{x^2}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^2 v(t)\,dt + g(x), \tag{15}$$

где

$$k(x,t) = 2p_2(t,0) + 2(x-t)\left[p_1(t,0) - 2p_2'(t,0)\right] + (x-t)^2\left[p_0(t,0) - p_1'(t,0) + p"_2(t,0)\right];$$
$$g(x) = \varphi_3(0)(x - x^2) + \varphi_2(0)x^2 + \varphi_3(0)(1 - x^2 + p_2(0,0)(x - x^2)).$$

Подставляя (14) в (15) и проделав некоторые преобразования, получим

$$v(x) + \int\limits_0^1 N(x,t)v(t)\,dt = M(x), \tag{16}$$

где

$$N(x,t) = \begin{cases} N_1(x,t), & 0 \leqslant t < x; \\ N_2(x,t), & x < t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$N_1(x,t) = \frac{x^2}{2}K_1(1,t)\gamma_1(t) + \frac{1}{2}K(x,t)\gamma_1(t) + \frac{B(x)}{\Gamma(1-\varepsilon)(x-t)^2} + \frac{1-x^2}{2\Gamma(1-\varepsilon)}\int\limits_0^t \frac{K(1,z)B(z)}{(z-t)^{\varepsilon}}\,dz - \frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{x^2}{2}(1-t)^2,$$

$$N_2(x,t) = -\frac{x^2}{2}K(1,t)\gamma_1(r) - \frac{x^2}{2\Gamma(1-\varepsilon)}\int\limits_0^t \frac{K(1,z)B(z)}{(z-t)^{\varepsilon}}\,dz + \frac{x^2}{2}(1-t)^2,$$

$$M(x) = g(x) - f_1(x) + \frac{x^2}{2}\int\limits_0^1 K(1,t)f_1(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^x K(x,t)f_1(t)\,dt.$$

Уравнение (16) есть уравнение Фредгольма 2-го рода относительно функции $v(x)$, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения поставленной задачи. Единственное решение уравнения (16) находится по формуле

$$v(x) = F(x) + \int\limits_0^1 R(x,t)F(t)\,dt,$$

где $R(x,t)$ — резольвента ядра $N(x,t)$.

При выполнении условий (9)–(11) доказательство единственности и существования решения задачи проводится аналогичным образом. $\rhd$

Пусть теперь $p = \pm\frac{m}{2}$.

Теорема 2. *В области* Ω *существует единственное решение задачи* (1)–(3), *если выполняются условия* (4) *теоремы* 1, *и при* $p = \frac{m}{2}$ *выполняются условия*

$$a = 1-\varepsilon, \quad \delta(x) \equiv 1, \quad p(1) = 0, \quad \sin\frac{\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{p(x)}{f(x)}\right)' \geqslant 0, \quad \frac{c(x)}{A_7(x)} \leqslant 0,$$

$$A_3(x) = \Gamma(1-\varepsilon)p(x) - n\gamma(x) \neq 0, \quad n = \frac{m+2}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\gamma},$$

а при $p = -\frac{m}{2}$ *выполняются условия*

$$a = 1, \quad \delta(x) \equiv 1, \quad \frac{c(x)}{A_4(x)} \leqslant 0, \quad A_4(x) = p(x) - nx^{\varepsilon}\gamma(x) \neq 0.$$

$\lhd$ Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. $\rhd$

Литература

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа.—М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Gellerstedt S.* Sur un Probleme aux Limits Pour One Equation Linear aux Derives Partielles du Second Order de Type Mixed.—Thesis: Uppsala, 1935.
3. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. Мат.—1945.—Т. 9, № 2.—С. 121–142.
4. *Франкль Ф. И.* Обобщение задачи Трикоми и его применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля // Мат. сб.—1961.—Т. 54, № 2.—С. 225–236.
5. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.—М.: Наука, 1981.—448 с.
6. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 1.—С. 44–59.
7. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 187, № 4.—С. 736–739.
8. *Saigo M.* A Certain boundary value problem for the Euler–Dorboux equation. III // Mathematical Japonica.—1981.—Vol. 26, № 1.—P. 103–119.
9. *Репин О. А.* О нелокальной краевой задаче с оператором М. Сайго для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Интегральные преобразования и краевые задачи. Сб. науч. тр. ин-та матем. Украины.—Черновцы, 1996.—Вып. 13.—С. 175–181.
10. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—Вып. 9 (100).—С. 52–60.
11. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
12. *Езаова А. Г.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешенного типа третьего порядка // Изв. Кабардино-Балкарского гос. ун-та.—2011.—Т. 1, № 4.—С. 26–31.

13. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Внутреннекраевая задача с операторами Римана — Лиувилля для уравнения смешанного типа третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2016.—Т. 20, № 1.—С. 43–53.
14. *Езаова А. Г., Думаева Л. В.* Об одной внутреннекраевой задаче для уравнения третьего порядка с группой младших членов // Фундаментальные исслед.—2015.—№ 2 (27).—С. 6032–6036.
15. *Бицадзе А. В.* Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 143, № 5.—С. 1017–1019.
16. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа.—М.: Высшая школа, 1985.—304 с.
17. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.—М.: Наука, 1966.—292 с.
18. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.

Статья поступила 14 сентября 2018 г.

Езаова Алена Георгиевна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 50–58

UNIQUE SOLVABILITY OF A BITSADZE–SAMARSKIY TYPE PROBLEM FOR EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

Ezaova, A. G.[1]

[1] Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky st., Nalchik 360004, Russian
E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Abstract. In this paper, unique solvability of a Bitsadze–Samarsky type problem for a third-order equation with discontinuous coefficients in a simply connected domain is investigated. The boundary condition of the problem contains the fractional integro-differentiation operator with the Gauss hypergeometric function. Under certain inequality type constraints on given functions and orders of fractional derivatives in the boundary condition, the energy integrals method enables one to proved the uniqueness of the solution of the problem.
The functional relations between the trace of the desired solution and its derivative are obtained, which are brought to the degeneration line from the hyperbolic and parabolic parts of the mixed region. Under the conditions of the uniqueness theorem the existence of a solution to the problem is proved by equivalent reduction to the second kind Fredholm integral equations with the derivative of the sought function as an unknown, the unconditional solvability of which is deduced from the uniqueness of the solution of the problem. The limits of the change of orders of fractional integro-differential operators in which the solution of the problem exists and is unique are also determined. The effect of the coefficient of the lowest derivative in the equation on the solvability of the problem is established.

Key words: fractional integro-differential operators, energy integrals method, equation with discontinuous coefficients, boundary value problem, second kind Fredholm integral equation.

Mathematical Subject Classification (2000): 35M10.

For citation: *Ezaova, A. G.* Unique Solvability of a Bitsadze–Samarskiy Type Problem for Equations with Discontinuous Coefficient, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 50–58 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23387.

References

1. *Tricomi F. O lineynykh uravneniyakh smeshannogo tipa* [On Linear Equations of Mixed Type], Moscow, Gostekhizdat, 1947 (in Russian).
2. *Gellerstedt S. Sur un Probleme aux Limits Pour One Equation Linear aux Derives Partielles du Second Order de Type Mixed*, Thesis, Uppsala, 1935.
3. *Frankl F. I.* On the Problems of Chaplygin for Mixed Before and Supersonic Flows, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1945, vol. 9, no. 2, pp. 121–142 (in Russian).
4. *Frankl F. I.* Generalization of the Tricomi Problem and Its Application to the Solution of the Direct Problem of Laval Nozzle Theory, *Mat. Sb.* (*N.S.*), 1961, vol. 54 (96), no. 2, pp. 225–236 (in Russian).
5. *Bitsadze A. V. Some Classes of Partial Differential Equations*, Moscow, Nauka Publ., 1981, 488 p. (in Russian).
6. *Nakhushev A. M.* On Some Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations and Equations of Mixed Type, *Differential Equations*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 44–59 (in Russian).
7. *Nakhushev A. M.* New Boundary Value Problem for a Degenerate Hyperbolic Equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, vol. 187, no. 4, pp. 736–739 (in Russian).
8. *Saigo M. A.* Certain Boundary Value Problem for the Euler-Dorboux Equation, III, *Mathematical Japonica*, 1981, vol. 26, no. 1, pp. 103–119.
9. *Repin O. A.* On a Nonlocal Boundary Value Problem with M. Saigo Operators for the Generalized Equation of Euler–Poisson–Darboux Equations, *Integral Transforms and Boundary Value Problems. Collection of Scientific Works. A Institute of Mathematics of Ukraine*, 1996, no. 13, pp. 175–181 (in Russian).
10. *Repin O. A., Kumykova S. K.* On the Problem with Generalized Operators of Fractional Differentiation for Degenerate Hyperbolic Equation Within the Domain, *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2012, no. 9 (100), pp. 52–60 (in Russian).
11. *Nakhushev A. M. Displacement Problems for Partial Differential Equations*, Moscow, Nauka Publ., 2006, 287 p. (in Russian).
12. *Ezaova A. G.* On One Nonlocal Problem for Mixed Type Equation of the Third Order, *Proceedings of the Kabardino-Balkarian State University*, 2011, vol. 1, no. 4, pp. 26–31 (in Russian).
13. *Repin O. A., Kumykova S. K.* Task with the Operators of Riemann–Liouville for the Mixed Type Equation of the Third Order, *Vestnik of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 43–53 (in Russian).
14. *Ezaova A. G., Dumaeva L. V.* On One Inner-Boundary Value Problem for the Equation of the Third Order with a Group of Younger Members, *Fundamental Research*, 2015, no. 2 (27), pp. 6032–6036 (in Russian).
15. *Bitsadze A. V.* On Mixed-Type Equations in Three-Dimensional Domains, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, vol. 143, no. 5, pp. 1017–1019 (in Russian).
16. *Smirnov M. M. Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type], Moscow, Vysshaya shkola, 1985, 304 p. (in Russian).
17. *Smirnov M. M. Vyrozhdaiushchiesia ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Elliptic and Hyperbolic Equations], Moscow, Nauka Publ., 1966, 292 p. (in Russian).
18. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya* [Integrals and Derivatives of FractiOnal Order and Some of Their Applications], Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).

Received September 14, 2018

Alena G. Ezaova
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky st., Nalchik 360004, Russian,
Associate Professor of the Department
of Algebra and Differential Equations
E-mail: alena_ezaova@mail.ru