Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 67–75

УДК 517.983
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23389

О ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Д. А. Полякова[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `forsites1@mail.ru`

Аннотация. В работе рассматриваются пространства ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на числовой прямой, задаваемые весами определенного вида. Указанные пространства представляют собой обобщенные проективные аналоги известных классов Жевре. В данных пространствах исследуется неоднородное уравнение свертки (дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами), определяемое символом, имеющим только простые нули и удовлетворяющим естественным ограничениям роста. По нулям символа в явном виде строится симметричная последовательность точек действительной оси, в которых модуль символа имеет подходящую оценку снизу. Построенная последовательность порождает абсолютно представляющую систему экспонент с мнимыми показателями в рассматриваемом пространстве. Это позволяет разложить правую часть исследуемого уравнения в абсолютно сходящийся ряд по указанной системе и выписать частное решение уравнения также в виде абсолютно сходящегося ряда, коэффициенты которого, естественно, определяются правой частью уравнения. В этом заключается основной результат работы. Доказательство существенным образом опирается на аналогичные результаты, полученные ранее в случае пространств на конечном интервале, а также на свойство устойчивости слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем. В работе приводятся конкретные примеры построения нужной последовательности точек.

Ключевые слова: пространство ультрадифференцируемых функций, неоднородное уравнение свертки.

Mathematical Subject Classification (2000): 44A35, 46E10.

Образец цитирования: *Полякова Д. А.* О частном решении неоднородного уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 68–75. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23389.

1. Введение

Пусть ω — весовая функция, φ^*_ω — сопряженная по Юнгу с $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$. Пространством ультрадифференцируемых функций (УДФ) Берлинга нормального типа на числовой прямой, задаваемым весом ω, называется следующее пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ |f|_{\omega,q,l} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi^*_\omega(j/q)} < \infty \ \ (\forall\, q \in (0,1),\ \forall\, l \in (0,\infty)) \right\}.$$

Пространства УДФ нормального типа (как на числовой прямой, так и на конечном интервале) достаточно активно изучаются в последние 10–15 лет. Одним из основных направлений является исследование уравнений свертки в указанных пространствах. В частности, в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ к настоящему времени полностью изучена (см. [1]) задача о разрешимости неоднородного уравнения свертки

$$T_\mu f = g. \tag{1}$$

Здесь T_μ — оператор свертки, действующий линейно и непрерывно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$; μ — его символ, т. е. целая функция, удовлетворяющая определенным условиям роста. Затем в работе [2] рассматривался вопрос о частном решении уравнения (1) определенного вида. Именно, по символу μ уравнения (1) строилась последовательность точек $(\nu_j)_{j=1}^\infty$ действительной и мнимой оси так, чтобы система $\left\{e^{-i\nu_j x}\ :\ j\in\mathbb{N}\right\}$ была абсолютно представляющей системой (АПС) в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и чтобы для $|\mu(\nu_j)|$, $j\in\mathbb{N}$, выполнялись подходящие оценки снизу. Это позволило установить, что если правая часть g уравнения (1) разложена в абсолютно сходящийся ряд $\sum_{j=1}^\infty g_j e^{-i\nu_j x}$, то функция

$$f=\sum_{j=1}^\infty \frac{g_j}{\mu(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x} \tag{2}$$

является решением уравнения (1) в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Естественным недостатком результатов работы [2] можно считать то, что система точек $(\nu_j)_{j=1}^\infty$ строится неконструктивно. Вызвано это тем, что в [2] рассматривается случай произвольного веса ω.

В настоящей работе исследуется важный с точки зрения приложений случай весов $\omega(t)=t^{\rho(t)}$, где $\rho(t)\to\rho\in(0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Соответствующие пространства $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ представляют собой обобщенные проективные аналоги известных классов Жевре. Известно, что в этих пространствах все уравнения свертки представляют собой дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^\infty a_k f^{(k)} = g. \tag{3}$$

Основной результат работы заключается в явном построении последовательности $(\nu_j)_{j=1}^\infty$, которая позволяет выписать частное решение уравнения (3) в виде (2). Заметим, что точки ν_j выбираются симметрично на действительной оси. Доказательство базируется на аналогичных результатах из [3], полученных для случая конечного интервала, а также на свойстве устойчивости слабо достаточных множеств (СДМ) и АПС из [4].

2. Предварительные сведения

В настоящем параграфе содержатся все необходимые сведения о рассматриваемых пространствах и операторах свертки в них. Кроме того, приводятся некоторые понятия и факты из теории СДМ и АПС, нужные для дальнейшего.

Начнем с более подробного определения исследуемых пространств. Напомним, что настоящая работа посвящена пространствам $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ Берлинга нормального типа на числовой прямой, порождаемым весами $\omega(t)=t^{\rho(t)}$, $\rho(t)\to\rho\in(0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Однако для удобства изложения мы введем пространства в случае произвольного веса ω и на произвольном интервале.

Итак, пусть ω — неквазианалитическая весовая функция, т. е. непрерывная неотрицательная неубывающая функция на $[0,\infty)$, обладающая определенными свойствами (см. [3]). Положим $\omega(z):=\omega(|z|)$, $z\in\mathbb{C}$; $\varphi_\omega(x):=\omega(e^x)$, $x\geqslant 0$; $\varphi^*_\omega(y)=\sup\{xy-\varphi_\omega(x):x\geqslant 0\}$, $y\geqslant 0$. Для заданной величины $0<a\leqslant\infty$ определим *пространство УДФ Берлинга нормального типа* на интервале $I=(-a,a)$ (который может быть как конечным, так и бесконечным):

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)=\bigl\{f\in C^\infty(I):\,|f|_{\omega,q,l}<\infty\quad\bigl(\forall\,q\in(0,1),\,\forall\,l\in(0,a)\bigr)\bigr\}.$$

Величина $|f|_{\omega,q,l}$ была определена во введении. Пространство $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ наделяется естественной топологией, задаваемой набором преднорм $\{|\cdot|_{\omega,q,l}:\,q\in(0,1),\,l\in(0,a)\}$, и является с ней (FS)-пространством (см. [5]).

Сильное сопряженное пространство $\bigl(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\bigr)'_\beta$ посредством преобразования Фурье — Лапласа функционалов

$$F:\varphi\in\bigl(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\bigr)'\mapsto\widehat{\varphi}(z):=\varphi_x(e^{-ixz}),\quad z\in\mathbb{C},$$

реализуется (см. [6]) в виде следующего весового пространства целых функций:

$$H^1_{(\omega),I}=\bigcup_{q\in(0,1)}\bigcup_{l\in(0,a)}H_{\omega,q,l},$$

где

$$H_{\omega,q,l}=\left\{f\in H(\mathbb{C}):\,\|f\|_{\omega,q,l}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{\exp\bigl(q\omega(z)+l|\operatorname{Im}z|\bigr)}\right\}<\infty.$$

Пространство $H^1_{(\omega),I}$ наделяется естественной индуктивной топологией и относится к классу (DFS)-пространств (см. [5]).

Оператор свертки T_μ в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ определяется как сопряженный к оператору умножения $\Lambda_\mu:f\mapsto\mu f$, действующему в пространстве $H^1_{(\omega),I}$. *Символ* μ представляет собой целую функцию, являющуюся мультипликатором пространства $H^1_{(\omega),I}$. В общем случае действие оператора T_μ на функции из $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ определяется равенством

$$(T_\mu f)(x):=\langle\psi_\mu,f(x+\cdot)\rangle,\quad x\in I,\ f\in\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I).$$

Здесь $\psi_\mu:=F^{-1}(\mu)\in\bigl(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\bigr)'$.

Известно (см. [3] и бибиографию там), что если целая функция $\mu(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k(-i)^kz^k$ является *сильным мультипликатором* пространства $H^1_{(\omega),I}$, т. е. удовлетворяет условию

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)}}<\infty\quad(\forall\,\varepsilon>0),$$

то оператор T_μ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами: $T_\mu f=\sum_{k=0}^\infty a_kf^{(k)}$, $f\in\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$.

В заключение параграфа приведем необходимые сведения, касающиеся СДМ, АПС и связи между ними. В соответствии с [7], последовательность $(x_j)_{j=1}^\infty$ элементов локально выпуклого пространства E называется АПС в E, если любой элемент $x\in E$раскладывается в абсолютно сходящийся ряд $x=\sum_{j=1}^\infty c_jx_j$.

Далее, пусть заданы нормированные пространства целых функций

$$H_k=\left\{f\in H(\mathbb{C}^N):\,\|f\|_k=\sup_{z\in\mathbb{C}^N}\frac{|f(z)|}{\exp\varphi_k(z)}<\infty\right\},\quad k\in\mathbb{N},$$

где $0 < \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, — некоторые заданные функции. Тогда можно ввести пространство $H = \cup_{k=1}^{\infty} H_k$ и наделить его топологией индуктивного предела $\operatorname{ind}_k H_k$. Множество $S \subset \mathbb{C}^N$ называется *слабо достаточным* для H (см. [8]), если исходная топология $\operatorname{ind}_k H_k$ совпадает с топологией $\operatorname{ind}_k H_{k;S}$ индуктивного предела полунормированных пространств

$$H_{k;S} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : \ \|f\|_k = \sup_{z \in S} \frac{|f(z)|}{\exp \varphi_k(z)} < \infty \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Результат о связи АПС и СДМ содержится, например, в [9, теорема K].

3. Основной результат

Итак, мы будем исследовать неоднородное уравнение свертки $T_\mu f = g$ в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, задаваемом весом $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Напомним, что в соответствии с введенными выше обозначениями, $\left(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\right)'_\beta \simeq H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$.

Будем предполагать, что символ $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-i)^k z^k$ рассматриваемого уравнения задан своими простыми нулями:

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right), \quad |\lambda_s| \uparrow \infty\,,$$

причем последовательность нулей удовлетворяет условию

$$\lim_{s \to \infty} \frac{s}{|\lambda_s|^{\rho(\lambda_s)}} = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) обеспечивает то, что μ имеет нулевой тип при порядке $\rho(r)$, а значит, является сильным мультипликатором пространства $H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$. Соответственно, исследуемое уравнение свертки представляет собой дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами (3).

Будем также считать, что последовательность (λ_s) образует R-множество (см. [10]): точки λ_s расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, не имеющих других общих точек, причем если перенумеровать точки множества (λ_s) внутри любого из этих углов в порядке возрастания их модулей, то для точек, попавших внутрь одного угла,

$$|\lambda_{s+1}| - |\lambda_s| > d|\lambda_s|^{1-\rho(\lambda_s)}, \quad s \in \mathbb{N}, \ d > 0. \tag{5}$$

При этом μ будет иметь вполне регулярный рост при порядке $\rho(r)$, так что вне некоторого исключительного множества кружков $C_s = \{z : |z - \lambda_s| < r_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, будет выполняться асимптотическое равенство

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\ln|\mu(z)|}{|z|^{\rho(z)}} = 0. \tag{6}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае в качестве радиусов r_s исключительных кружков можно взять любое фиксированное число $\gamma > 0$ (см. [11, замечание после теоремы 1.2.6]). В силу [1, теорема 2], данное условие обеспечивает то, что уравнение (3) разрешимо в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

На основании перечисленных свойств функции μ построим возрастающую последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел, которая будет порождать в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ АПС экспонент $\left\{e^{\mp i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$.

При каждом $p \in \mathbb{N}$ возьмем число $\gamma^{(p)}$ так, чтобы выполнялись следующие условия: $\gamma^{(p)} < \frac{1}{4\cdot 2^p}$; $\gamma^{(p+1)} < \gamma^{(p)}$; исключительные кружки $C_s^{(p)} = \{z : |z-\lambda_s| < \gamma^{(p)}\}$, $s = 1, 2, \ldots$, вне которых выполняется равенство (6), попарно не пересекаются. Рассмотрим функцию $\sin 2^p z$ и ее положительные нули $\frac{\pi n}{2^p}$, $n \in \mathbb{N}$. Разобьем их на две возрастающие последовательности $\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots$ и $\eta_1^{(p)}, \eta_2^{(p)}, \ldots$ по правилу: точки $\pm\eta_j^{(p)}$ не попадают в исключительные кружки $C_s^{(p)}$, а $\xi_j^{(p)}$ или $-\xi_j^{(p)}$ попадают в $C_s^{(p)}$. Будем считать, что точек $\xi_j^{(p)}$ бесконечно много, поскольку это наиболее сложная ситуация. Положим $K_{j,\pm}^{(p)} = \{z : |z \mp \xi_j^{(p)}| < \gamma^{(p)}\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Далее, на основании теоремы 1.2.3 из [11] выделим из последовательности $\left(\frac{\pi}{2\cdot 2^p} + \frac{\pi n}{2^p}\right)_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $(\zeta_k^{(p)})_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\pm\zeta_k^{(p)} \notin \bigcup_s C_s^{(p)}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\left(\zeta_k^{(p)}\right)^{\rho(\zeta_k^{(p)})}} = \frac{1}{\pi}\,\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{2};$$

$$\zeta_{k+1}^{(p)} - \zeta_k^{(p)} > d_p\left(\zeta_k^{(p)}\right)^{1-\rho(\zeta_k^{(p)})}, \quad k \in \mathbb{N},\ d_p > 0.$$

При этом $\zeta_k^{(p)} \notin \bigcup_j K_{j,\pm}^{(p)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Построенные последовательности $\left(\eta_k^{(p)}\right)_{k=1}^{\infty}$ и $\left(\zeta_k^{(p)}\right)_{k=1}^{\infty}$ объединяем в одну возрастающую последовательность $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$. При этом система $\left\{1, e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, где $I^{(p)} = (-2^p, 2^p)$ (более подробно об этом см. ниже в доказательстве леммы 1). Кроме того, все точки $\pm\nu_j^{(p)}$ лежат вне исключительных кружков $C_s^{(p)}$.

Отметим некоторые очевидные свойства последовательностей $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$, $p \in \mathbb{N}$. Во-первых, понятно, что $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty} \subset \left(\nu_j^{(p+1)}\right)_{j=1}^{\infty}$, $p \in \mathbb{N}$. Далее, если обозначить через $n^{(p)}(r)$, $r > 0$, количество элементов последовательности $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$ на промежутке $(0, r]$, то

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n^{(p)}(r)}{r} < \infty, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Действительно, на любом полуинтервале длиной π количество элементов последовательности $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$ не превышает 2^{p+1}. Следовательно, если $l\pi < r \leqslant (l+1)\pi$, $l \in \mathbb{N}$, то $n^{(p)}(r) \leqslant (l+1)2^{p+1} \leqslant \left(\frac{r}{\pi}+1\right)2^{p+1}$. Таким образом, $\limsup_{r\to\infty} \frac{n^{(p)}(r)}{r} \leqslant \frac{2^{p+1}}{\pi} < \infty$.

Сделаем еще одно полезное замечание. Понятно, что если нули λ_s символа $\mu(z)$ отграничены от действительной оси, т. е. если

$$|\operatorname{Im}\lambda_s| \geqslant \delta_0, \quad s \geqslant s_0, \tag{7}$$

то при каждом $p \in \mathbb{N}$ в качестве точек $\eta_k^{(p)}$ можно взять $\eta_k^{(p)} = \frac{\pi k}{2^p}$, $k \in \mathbb{N}$.

Перейдем, наконец, к построению искомой последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Возьмем элементы последовательности $\left(\nu_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}$, лежащие на промежутке $(0, l_1\pi]$ (натуральные числа $l_1 < l_2 < \ldots$ будут выбраны ниже). Занумеруем их по возрастанию: $\nu_1, \ldots, \nu_{j_1}$. Затем выберем элементы последовательности $\left(\nu_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty}$, попадающие на промежуток $\left(l_1\pi, (l_1+l_2)\pi\right]$, и обозначим их $\nu_{j_1+1}, \ldots, \nu_{j_2}$. Далее, пусть $\nu_{j_2+1}, \ldots, \nu_{j_3}$ — занумерованные по возрастанию элементы последовательности $\left(\nu_j^{(3)}\right)_{j=1}^{\infty}$ из промежутка

$\big((l_1+l_2)\pi,(l_1+l_2+l_3)\pi\big]$. Продолжая этот процесс далее, получим возрастающую последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел. При этом по построению каждая последовательность $\big(\nu_j^{(p)}\big)_{j=1}^{\infty}$, $p\in\mathbb{N}$, за исключением конечного числа элементов будет подпоследовательностью последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Кроме того, все точки $\pm\nu_j$ будут находиться вне исключительных кружков функции μ. Следовательно, для каждого $\varepsilon>0$ найдется номер $j(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такой, что

$$|\mu(\pm\nu_j)|\geqslant \exp\big\{-\varepsilon\nu_j^{\rho(\nu_j)}\big\},\quad j\geqslant j(\varepsilon). \tag{8}$$

Отметим еще одно полезное свойство последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Именно, оценим величину $n(r)$ — количество элементов последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ на промежутке $(0,r]$. Зафиксируем $r>l_1\pi$ и найдем $p\in\mathbb{N}$ такое, что $\sum_{j=1}^{p-1}l_j\pi<r\leqslant\sum_{j=1}^{p}l_j\pi$. Тогда $n(r)\leqslant\sum_{j=1}^{p}l_j\cdot 2^{j+1}\leqslant p\cdot l_l\cdot 2^{p+1}$. При этом $r>\sum_{j=1}^{p-1}l_j\pi>l_{p-1}\cdot\pi>l_{p-1}$. Исходя из полученных оценок, числа l_p подберем так, чтобы

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{1+\varepsilon}}=0\quad(\forall\,\varepsilon>0). \tag{9}$$

Возьмем, например, $l_p=2^{p^2}$. Тогда

$$\frac{n(r)}{r^{1+\varepsilon}}\leqslant\frac{p\cdot 2^{p^2}\cdot 2^{p+1}}{2^{(1+\varepsilon)(p-1)^2}}=p\cdot 2^{-\varepsilon p^2+3p+2p\varepsilon-\varepsilon}\to 0,\quad p\to\infty,$$

так что условие (9) выполнено.

Прежде чем переходить к основным результатам работы, приведем конкретный пример построения последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$.

Пример 1. Пусть $\omega(t)=t^{\frac12}$. Нули $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ символа $\mu(z)=\prod_{s=1}^{\infty}\big(1-\frac{z}{\lambda_s}\big)$ удовлетворяют условиям (5), (6) и (7). Тогда можно взять

$$\eta_k^{(p)}=\frac{\pi k}{2^p},\quad \zeta_k^{(p)}=\frac{\pi}{2\cdot 2^p}+\frac{\pi[2^p\pi k^2]}{2^p},\quad k\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}.$$

Здесь, как обычно, через $[x]$ обозначена целая часть числа x. После этого последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ строится из точек $\eta_k^{(p)}$ и $\zeta_k^{(p)}$, $k\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$, указанным выше способом.

Докажем следующую основную лемму.

Лемма 1. *Система экспонент $\big\{e^{\mp i\nu_j x}\big\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, а множество $S=\{\pm\nu_j : j\in\mathbb{N}\}$ слабо достаточно для $H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$.*

$\lhd$ Доказательство базируется на аналогичном результате из [3], где было фактически показано, что при каждом $p\in\mathbb{N}$ система $\big\{1,e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\big\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, где $I^{(p)}=\big(-2^p,2^p\big)$. Для этого в указанной работе проверялось известное достаточное условие АПС из [12, теорема 3]. Именно, при фиксированном $p\in\mathbb{N}$ была построена целая функция $L(z)=L_1(z)\cdot L_2(z)$, где

$$L_1(z)=2^p z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\big(\eta_k^{(p)}\big)^2}\right),\quad L_2(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\big(\zeta_k^{(p)}\big)^2}\right),$$

обладающая определенными свойствами (см. [3, § 6; свойства (А), (В) и (Г)]). Из этого в [3] был сделан ошибочный, по всей вероятности, вывод о том, что система $\big\{e^{-i\nu_j^{(p)}x}\big\}_{j=1}^{\infty}$

является АПС в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$. Обусловлено это неточностью в достаточной части теоремы 3 из [12]. Именно, у функции $L(z)$ помимо точек, фигурирующих в показателях экспонент, других нулей быть не должно. Поскольку построенная в [3] функция $L(z)$ имеет нули в точках $0, \pm\nu_j^{(p)}$ (других нулей у нее нет), то можно гарантировать, что система $\{1, e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, $p \in \mathbb{N}$.

Сделаем еще одно полезное замечание, касающееся результатов из [3]. Нетрудно видеть, что свойства (А), (В) и (Г) функции $L(z)$ инварианты относительно деления на многочлен. Другими словами, если этими свойствами обладает функция $L(z)$, то ими же будет обладать и функция $\widetilde{L}(z) = \frac{L(z)}{P(z)}$, $P(z)$ — многочлен (естественно, при условии, что $\widetilde{L}(z)$ — целая функция). Это означает, что если из системы $\{1, e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\}_{j=1}^{\infty}$ отбросить любое конечное число элементов, то она останется АПС в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$.

Учитывая только что сделанное замечание и тот факт, что каждая последовательность $(\nu_j^{(p)})_{j=1}^{\infty}$, $p \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, является подпоследовательностью последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$, делаем вывод, что система $\{e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в каждом пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, $p \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу [9, теорема K], множество $S = \{\pm\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ является СДМ для каждого пространства $H^1_{(\omega), I^{(p)}}$, $p \in \mathbb{N}$.

На основании свойства устойчивости СДМ (см. [4, теорема 2]) заключаем, что множество S слабо достаточно для $H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$. Действительно, как нетрудно видеть, если положить в теореме 2 из [4]

$$h_k(z) = q_k\big(\omega(z) + |\operatorname{Im} z|\big), \quad z \in \mathbb{C},\ 0 < q_k \uparrow 1;$$
$$b_m(z) = \big(2^m - 2^{m-1}\big)|\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N};$$

то все условия указанной теоремы будут выполнены (даже в случае произвольного веса ω; и, в частности, для $\omega(t) = t^{\rho(t)}$). Заметим, что при этом необходимо воспользоваться известными свойствами весовых функций (см., например, [3, свойство (γ)] и [6, неравенство (5)]).

В заключение снова применяем теорему K из [9] и получаем, что система $\{e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Тем самым лемма доказана. $\rhd$

Лемма 1 позволяет разложить правую часть уравнения (3) в абсолютно сходящийся ряд по системе $\{e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ и найти частное решение данного уравнения также в виде ряда по указанной системе. В этом заключается основной результат работы, который представлен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть символ $\mu(z)$ уравнения* (3) *удовлетворяет перечисленным условиям; $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ — построенная последовательность положительных чисел. Предположим, что правая часть уравнения* (3) *разложена в абсолютно сходящийся ряд $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j^+ e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^- e^{i\nu_j x}$. Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^+}{\mu(\nu_j)} e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^-}{\mu(-\nu_j)} e^{i\nu_j x}$$

является частным решением уравнения (3) *в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ (последний ряд сходится абсолютно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$).*

$\lhd$ Доказательство данного результата базируется на неравенстве (8), а также на оценках норм $|e^{\mp i\nu_j x}|_{\omega,q,l}$, $q \in (0,1)$, $l \in (0,\infty)$, из [6, лемма 3]. В целом оно практически дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [3], поэтому здесь мы его опускаем. $\rhd$

Литература

1. *Абанин А. В., Абанина Д. А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 3–21.
2. *Абанина Д. А.* Представление решений уравнений свертки в неквазианалитических классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 6.—С. 1–9.
3. *Полякова Д. А.* О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 6.—С. 121–142.
4. *Абанин А. В.* О продолжении и устойчивости слабо достаточных множеств // Изв. вузов. Математика.—1987.—Т. 299, № 4.—С. 3–10.
5. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
6. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1978.—Т. 42, № 2.—С. 325–355.
8. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1974.—Vol. 197.—P. 161–180. DOI: 10.2307/1996933.
9. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
11. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
12. *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, № 4.—С. 483–497.

Статья поступила 5 апреля 2018 г.

Полякова Дарья Александровна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела математического анализа
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `forsites1@mail.ru`
http://orcid.org/0000-0002-0202-2102

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 68–75

ON A PARTICULAR SOLUTION OF A NONHOMOGENEOUS CONVOLUTION EQUATION IN SPACES OF ULTRADIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Polyakova, D. A.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova st., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: `forsites1@mail.ru`

Abstract. We consider the Beurling spaces of ultradifferentiable functions of mean type on the real axis determined by special weight functions. These spaces are the general projective analogs of the well-known Gevrey classes. In these spaces we investigate a nonhomogeneous convolution equation (differential equation of infinite order with constant coefficients) generated by the symbol which has only simple zeros and satisfies some natural growth estimates. Given the zeros of a symbol, a symmetric sequence of real numbers is explicitly constructed, in each of which the module of the symbol has a suitable lower estimate. This sequence determines a system of exponentials with imaginary indexes which is absolutely representing in the corresponding space. This allows us to represent the right-hand side of the equation as an absolutely convergent series with respect to this system. Then we establish a particular solution of the equation under considering as an absolutely convergent series with respect to this system, too. The coefficients of the series are naturally determined by the right-hand side of the equation. The proof is essentially based on the analogous results which were earlier obtained in the case of spaces on finite interval. We also use the stability property of weakly sufficient sets and absolutely representing systems. Some concrete examples of constructing the desired sequences are also given in the paper.

Key words: space of ultradifferentiable functions, nonhomogeneous convolution equation.

Mathematical Subject Classification (2000): 44A35, 46E10.

For citation: *Polyakova, D. A.* On a Particular Solution of a Nonhomogeneous Convolution Equation in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 68–75 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23389.

References

1. *Abanin, A. V. and Abanina, D. A.* Division Theorem in Some Weighted Spaces of Entire Functions, Vladikavkaz. Math. J., 2010, vol. 12, no. 3, pp. 3–21 (in Russian).
2. *Abanina, D. A.* Representation of Solutions of Convolution Equations in Nonquasianalytic Beurling Classes of Ultradifferentiable Functions of Mean Type, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 6, pp. 1–8. DOI: 10.3103/S1066369X11060016.
3. *Polyakova, D. A.* On Solutions of Convolution Equations in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *St. Petersburg Math. J.*, 2015, vol. 26, no. 6, pp. 949–963. DOI: 10.1090/spmj/1369.
4. *Abanin, A. V.* On the Continuation and Stability of Weakly Sufficient Sets, *Soviet Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 1987, vol. 31, no. 4, pp. 1–10.
5. *Zharinov, V. V.* Compact Families of Locally Convex Topological Vector Spaces, Frechet–Schwartz and Dual Frechet–Schwartz Spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1979, vol. 34, no. 4, pp. 105–143. DOI: 10.1070/RM1979v034n04ABEH002963.
6. *Abanin, A. V. and Filip'ev I. A.* Analytic Implementation of the Duals of Some Spaces of Infinitely Differentiable Functions, *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, no. 3, pp. 397–409. DOI: 10.1007/s11202-006-0052-3.
7. *Korobeinik, Yu. F.* Representing Systems, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 309–335. DOI: 10.1070/IM1978v012n02ABEH001856.
8. *Schneider, D. M.* Sufficient Sets for Some Spaces of Entire Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 197, pp. 161–180. DOI: 10.2307/1996933.
9. *Korobeinik, Yu. F.* Inductive and Projective Topologies. Sufficient Sets and Representing Systems, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1987, vol. 28, no. 3, pp. 529–554. DOI: 10.1070/IM1987v028n03 ABEH000896.
10. *Levin, B. Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions, Transl. Math. Monogr., vol.* 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972, 523 p.
11. *Leont'ev, A. F. Ryady ehksponent* [Exponential Series], Moscow, Nauka Publ., 1976, 536 p. (in Russian).
12. *Abanin, A. V.* Nontrivial Expansions of Zero and Absolutely Representing Systems, *Mathematical Notes*, 1995, vol. 57, no. 4, pp. 335–344. DOI: 10.1007/BF02304161.

Received April 5, 2018

Darya A. Polyakova
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova st., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Associate Professor Department of Mathematical Analysis;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia,
Senior Researcher
E-mail: forsites1@mail.ru