

УДК 51-72

DOI 10.23671/VNC.2019.2.32112

ВИБРОТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ВЫСОКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

К. И. Ильин¹, А. Б. Моргулис^{2,3}

¹ Йоркский университет,

Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD;

² Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,

Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

³ Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича ЮФУ,

Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk, morgulisandrey@gmail.com

Аннотация. В статье приведена высокочастотная асимптотика системы Навье — Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в области, ограниченной вибрирующей поверхностью. Граничные условия требуют совпадения векторов скоростей материальной частицы жидкости и той точки границы, в которой частица находится; тем самым исключается как скольжение жидкости вдоль границы (условие прилипания), так и протекание первой через вторую. Предполагается, что движение граничной поверхности задано и периодически по времени, причем ограниченная ею область в среднем покоится, но может, вообще говоря, изменять форму. Частота колебаний границы стремится к бесконечности, а амплитуда — к нулю, но отношение амплитуды к толщине стоксова слоя остается величиной порядка единицы. Основной результат — явный вид уравнений и граничных условий, определяющих среднее течение в самом общем случае, без специальных предположений о данных задачи. На этой основе исследован ряд конкретных течений, в частности, течение в круглой трубе, вызываемое нормальной вибрацией ее стенок.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, высокочастотная асимптотика, вибрация, среднее течение.

Mathematical Subject Classification (2010): 76D05, 76D10, 76D17, 35Q30, 35Q35.

Образец цитирования: Ильин К. И., Моргулис А. Б. Вибротечения вязкой несжимаемой жидкости

при высоких числах Рейнольдса // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 2.—С. 5–17. DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32112.

1. Вибротечения и дрейф Стокса

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой и однородной жидкости в контейнере, вызываемое заданным периодическим движением его стенок. Сам контейнер меняет, вообще говоря, свою форму, но в среднем покоится. Характерные масштабы такого течения: усредненный размер контейнера L , амплитуда колебаний стенок контейнера A , соответствующая частота Ω . Примем L за масштаб длины, Ω^{-1} — за масштаб времени, $U = A\Omega$ — за масштаб скорости, и $\rho AL\Omega^2$ — за масштаб давления (где через $\rho = \text{const}$

обозначена плотность жидкости). Кроме того, все данные задачи (1)–(2) считаем 2π -периодическими по τ , и разыскиваем 2π -периодические по τ решения. При указанной нормировке безразмерная форма системы Навье — Стокса выглядит так:

$$\mathbf{v}_\tau + \delta(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \epsilon^2 \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } D(\tau); \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(\bar{x} + \delta \tilde{Y}, \tau) = \tilde{Y}_\tau, \quad \bar{x} \in \bar{S}. \quad (2)$$

Здесь $\tau = \Omega t$, $\delta = A/L$, $\epsilon^2 = \nu/(\Omega L^2)$, и ν — вязкость жидкости. Далее, через $D(\tau)$ обозначена область, занятая жидкостью в момент времени τ , $\tilde{Y} = \tilde{Y}(\bar{x}, \tau, \delta)$ — текущее смещение точки $\bar{x} \in \bar{S}$, $\bar{S} = \partial \bar{D}$, и \bar{D} — отсчетная область, которую мы считаем заданной и постоянной.

Введем число Рейнольдса $\text{Re} = (LU)/\nu = LA\Omega/\nu = \delta/\epsilon^2$. Формально устремив $\epsilon \rightarrow +0$ и $\delta \rightarrow +0$, получим линеаризованные уравнения Эйлера с «лишним» граничным условием:

$$\mathbf{v}_\tau = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ в } \bar{D}, \quad \mathbf{v} = \tilde{Y}_\tau|_{\delta=0} \text{ на } \bar{S}. \quad (3)$$

Эта система не имеет, вообще говоря, решения. Если же ограничиться лишь нормальной проекцией граничного условия (3), то решение легко найти, полагая $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. Чтобы удовлетворить граничное условие, к найденному полю придется прибавить погранслоиную поправку. Следовательно, в главном приближении мы получим безвихревое ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) течение в «теле» жидкости, а завихренность, создаваемая вязким трением о стенку, сосредоточится в узком слое вблизи стенки (стоксов слой). Толщина стоксова слоя — порядка ϵ . Однако в старших приближениях появляется *глобальное* среднее вихревое течение (в англоязычной литературе известно как *steady streaming*).

Несмотря на относительную малость скорости, глобальное среднее течение может повлиять на процесс перемешивания масс жидкости на больших временах. В самом деле, рассмотрим уравнение (безразмерное) движения частиц жидкости

$$dx/dT = \delta^{-1} \mathbf{v}(x, \tau, \delta),$$

где $T = \delta^2 \tau$ — «медленное» время. Пусть поле \mathbf{v} периодически по τ с периодом 2π ,

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}(x, \tau) + \delta(\bar{\mathbf{v}}(x) + \tilde{\mathbf{v}}_1(x, \tau)) + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0,$$

$\bar{\mathbf{v}}(x)$ — среднее поле, а члены, отмеченные тильдой, имеют нулевое среднее за период. Тогда

$$x = \bar{x}(T) + \delta(\bar{x}_1(T) + \tilde{x}(\tau, T)) + O(\delta^2), \quad \delta \rightarrow 0,$$

$$d\bar{x}/dT = \bar{\mathbf{v}}(x) + [\overline{\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}}] / 2, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{w}}_\tau,$$

где квадратные скобки обозначают стандартный коммутатор векторных полей. Вообще говоря, оба слагаемых в выражении $d\bar{x}/dT$ имеют ненулевой rot . Вторая из них известна как поправка или дрейф Стокса. Течение жидкости с полем скорости $\bar{\mathbf{v}}(x) + [\overline{\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}}] / 2$ назовем *эффективным вибротечением*.

Имеются различные теории эффективного вибротечения. Различия, главным образом, заключаются в предположении о числе Рейнольдса вибротечения (the streaming Reynolds number)

$$\text{Re}_s = (\Omega A^2)/\nu = \delta^2/\epsilon^2.$$

На самом деле, $\sqrt{\text{Re}_s}$ не что иное, как отношение характерной амплитуды вибрации границы к толщине слоя Стокса. Мы предполагаем, что они одного порядка, так что

$$\delta \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \sqrt{\text{Re}_s} = \delta/\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \beta \equiv \text{const} \sim 1, \quad \text{Re} = \beta\epsilon^{-1} \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Различные конкретные течения с таким соотношением масштабов на физическом уровне строгости рассматривали Craik и Leibovich [1], Duck и Smith [2], Haddon и Riley [3], Gopinath [4]. Наш подход, более общий и формальный, основан на методе Вишика — Люстерника. Левенштам [5] использовал близкий подход в случае неподвижных границ и вибрирующей массовой силы, и дал строгое обоснование полученной асимптотике. Владимиров [6], а затем Ильин и Моргулис [7], применяли технику Вишика — Люстерника непосредственно к течениям с вибрирующими границами. При этом, однако, рассматривались специальные классы течений. Асимптотическое решение общей задачи (1), насколько нам известно, в литературе не излагалось. Данная работа восполняет этот пробел и наш анализ приводит к универсальному описанию эффективного вибротечения без каких-либо дополнительных предположений о данных задачи (1), кроме оценки (4). На этой основе мы рассматриваем ряд конкретных вибротечений.

Весьма детальный обзор результатов, относящихся к масштабам (4), а также обсуждение преимуществ техники Вишика — Люстерника по сравнению с другими подходами, приведены в статье [7]. О течениях с соотношениями масштабов, отличными от (4), см. в обзоре Riley [8], а также работы Longuet-Higgins [9, 10], где (на физическом уровне строгости) рассмотрен наиболее трудный случай $Re_s \gg 1$.

2. Уравнения вибротечения

Начнем со вспомогательных определений. Напомним ортогональное (в смысле метрики кинетической энергии) разложение векторного поля \mathbf{a} , заданного на области \bar{D} : $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \nabla\chi$, где $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$ и $\mathbf{b} \parallel \bar{S}$. Обозначим Π , Π' проекторы, ассоциированные с указанным разложением: $\Pi : \mathbf{a} \mapsto \nabla\chi$, $\Pi' : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$. Ротор поля \mathbf{a} обозначаем $\nabla \times \mathbf{a}$, а также $\operatorname{rot} \mathbf{a}$, дивергенцию — $\nabla \cdot \mathbf{a}$, а также $\operatorname{div} \mathbf{a}$.

Пусть $g = g(\tau) — 2\pi$ -периодическая векторнозначная функция. Имеет место разложение

$$g = \tilde{g} + \bar{g}, \quad \bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d\tau.$$

Очевидно, $\tilde{\bar{g}} = \bar{\tilde{g}} = 0$. В дальнейшем изложении черта сверху обозначает усреднение, а тильда — члены с нулевым средним. Через

$$\partial_{\tau}^{-1} : g \mapsto f, \quad \partial_{\tau} f = g$$

обозначаем правый обратный к оператору дифференцирования, действующий на подпространстве функций $g : \bar{g} = 0$.

Пусть a — формальный степенной ряд по положительным степеням некоторой переменной с векторными коэффициентами. Через ${}_m a$ обозначим формальный многочлен порядка m , полученный урезанием этого ряда. Если b, c, \dots такие полиномы, то $\operatorname{op}(b, c, \dots)$ — многочлен, представляющий собой алгебраическое выражение от многочленов b, c, \dots

Пусть $\epsilon \rightarrow +0$ и при этом выполняется условие (4). Соответствующее асимптотическое разложение решения \mathbf{v} , p системы (1) ищем в виде

$$\mathbf{v}(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \left(\mathbf{v}^i(x, \tau) + \mathbf{v}^b(x, \tau, \eta) \right),$$

$$p(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \left(p_k^a(x, \tau) + p_k^b(x, \tau, \eta) \right),$$

$$\eta = \rho/\epsilon, \quad (\mathbf{v}_k^b, p_k^b)(\cdot, \eta) = o(\eta^{-n}), \quad \eta \rightarrow \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

где ρ — некоторая координата вблизи поверхности \bar{S} , трансверсальная к ней (например, расстояние до \bar{S}). Таким образом, верхний индекс a (b) отмечает члены внутреннего (пограничного) разложения, предназначенного для описания течения в толще жидкости (в пристенном слое Стокса). Отметим, что результат не зависит от выбора координаты ρ .

Подстановка указанных разложений в систему (1) дает цепь уравнений для коэффициентов внутреннего разложения

$$\partial_\tau \mathbf{v}_k^a = -\nabla p_k^a + \mathbf{f}_k, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_k^a = 0 \text{ в } \bar{D}, \quad \bar{\mathbf{v}}_k^a \cdot \bar{\mathbf{n}} = \gamma_k \text{ на } \bar{S}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $\mathbf{f}_k = \operatorname{op}({}_{k-1}\mathbf{v}^a)$, $\gamma_k = \operatorname{op}({}_{k-1}\mathbf{v}^b, {}_{k-1}\mathbf{v}^a, {}_k\tilde{Y})$ и $\bar{\mathbf{n}}$ обозначает поле *внутренней нормали* на \bar{S} . Периодическое по τ решение (\mathbf{v}_k^a, p_k^a) существует при условии $\Pi' \mathbf{f}_k = 0$, а в противном случае — не существует. В случае существования, решение определено с точностью до средних полей $\bar{\mathbf{v}}_k^a, \bar{p}_k^a$. Уравнения относительно среднего поля следуют из условий разрешимости последующих уравнений в цепи (5).

Обратимся к деталям. Полагаем

$$\mathbf{N}\tilde{\gamma} \stackrel{def}{=} \nabla \phi: \quad \Delta \phi = 0 \text{ в } \bar{D}, \quad \bar{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi = \tilde{\gamma} \text{ на } S.$$

Запускаем итерационный процесс, полагая $\mathbf{f}_0 = 0$, $\tilde{\gamma}_0 = \bar{\mathbf{n}} \cdot \tilde{Y}_{0\tau}$, $\tilde{Y}_0 = \tilde{Y}(x, \tau, 0)$ и $\tilde{\gamma}_0 = 0$. Последнее равенство имеет место, поскольку в среднем область покоится. Тогда

$$\mathbf{v}_0^a = \bar{\mathbf{v}}_0^a + \mathbf{N}\tilde{\gamma}_0, \quad \nabla \bar{p}_0^a = -\partial_\tau \mathbf{N}\tilde{\gamma}_0.$$

Далее, решаем уравнения (5) при $k = 1$. Возникает условие разрешимости

$$\Pi'(\bar{\mathbf{v}}_0^a, \nabla)\bar{\mathbf{v}}_0^a = 0, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_0^a = 0 \text{ в } \bar{D}. \quad (6)$$

Таким образом, получены уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости. Ниже, в разделе 3, мы увидим, что эти уравнения следует решать с условием $\bar{\mathbf{v}}_0^a = 0$ на \bar{S} . Получившаяся краевая задача имеет тривиальное решение $\bar{\mathbf{v}}_0^a \equiv 0$. Нетривиальные решения также существуют, но мы не обсуждаем здесь эту возможность.

Главные члены, описывающие глобальное среднее течение: $\bar{\mathbf{v}}_1^a, \bar{p}_1^a$. Уравнения относительно этих полей получаются из условий разрешимости уравнения (5) при $k = 3$, так как при $k = 2$ условие разрешимости не возникает. Итак, в главном приближении глобальное среднее течение описывают уравнения

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}_1^a - \nabla H_1 = \beta \bar{\boldsymbol{\omega}}_1^a \times \mathbf{V}; \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}_1^a = 0; \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_1^a = \nabla \times \bar{\mathbf{v}}_1^a; \quad (7)$$

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}}_1^a + \beta [\overline{\boldsymbol{\xi}_\tau}, \bar{\boldsymbol{\xi}}]/2, \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{N}(\partial_\tau^{-1} \tilde{\gamma}_0). \quad (8)$$

Отсюда видно, что за перенос вихря отвечает поле \mathbf{V} , при этом стоков дрейф описывает член $\beta [\overline{\boldsymbol{\xi}_\tau}, \bar{\boldsymbol{\xi}}]/2$. При выводе этого уравнения полезно тождество

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \mathbf{c} \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \mathbf{b} \times [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \nabla(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))$$

для любой тройки бездивергентных векторных полей $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Уравнения (7)–(8) выводились многими авторами при исследовании различных конкретных течений, возникающих в осциллирующих внешних полях, см., например, [1]. Приятная особенность нашей задачи — возможность получить универсальные граничные условия, замыкающие систему (7)–(8).

3. Граничные условия для вибротечения

Перейдем к рассмотрению течения в стоксовом слое. В приграничной полоске области \bar{D} вводим координаты $x \mapsto (\rho, \theta)$, где $\rho(x) = \text{dist}(x, \bar{S})$, и θ — точка на \bar{S} , ближайшая к x . Указанные координаты индуцируют разложение $\mathbf{h} = \mathbf{h}^{\parallel} + \mathbf{h}^{\perp}$, где первое слагаемое — касательная, а второе — нормальная[‡] компонента \mathbf{h} . Переписываем систему (1) относительно координат (ρ, θ) , разделяем ее нормальную и тангенциальную проекции, и раздуваем стоксов слой с помощью растянутой нормальной координаты $\eta = \rho/\epsilon$. Ввиду предположения (4), изменения границы после раздувания уже не малы, поэтому уравнения пограничного слоя приходится рассматривать в переменной области Σ плоскости переменных η, τ , зависящей от θ , как от параметра:

$$\Sigma = \{\eta > \beta\tilde{\eta}_0(\theta, \tau)\}; \quad \tilde{\eta}_0(\theta, \tau) = (\tilde{Y}_0)_{\mathbf{n}}|_{\rho=0} = \partial_{\tau}^{-1}\tilde{\gamma}_0(\theta, \tau). \quad (9)$$

Оказывается, что степенные разложения нормальной и тангенциальной скорости, а также давления в стоксовом слое начинаются с членов разных порядков, так что

$$(\mathbf{v}_0^{\flat})_{\mathbf{n}} = p_0^{\flat} = p_1^{\flat} = 0.$$

В связи с этим, вводим обозначения

$$(\mathbf{v}_{k+1}^{\flat})_{\mathbf{n}} = u_k^{\flat}, \quad p_{k+2}^{\flat} = P_k^{\flat}, \quad \mathbf{w}_k^{\flat} = (\mathbf{v}_k^{\flat})^{\parallel}, \quad \mathbf{w}_k^{\perp} = (\mathbf{v}_k^{\perp})^{\parallel}, \quad (\mathbf{v}_k^{\perp})_{\mathbf{n}} = u_k^{\perp}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Уравнения погранслоиных поправок и граничные условия к ним принимают вид

$$(\partial_{\tau} + \beta\tilde{\gamma}_0\partial_{\eta} - \partial_{\eta}^2)\mathbf{w}_k^{\flat} = \mathbf{F}_k; \quad \partial_{\eta}u_k^{\flat} = S_k; \quad \partial_{\eta}P_k^{\flat} = R_k \text{ в } \Sigma, \quad (10)$$

$$\mathbf{w}_k^{\flat} = \beta^k(\tilde{Y}_{k\tau} - \mathbf{b}_k)^{\parallel} - \mathbf{w}_k^{\perp}; \quad u_k^{\perp} = \beta^k(\tilde{Y}_{k\tau} - \mathbf{b}_k)_{\mathbf{n}} - u_{k-1}^{\flat} \text{ на } \partial\Sigma, \quad (11)$$

$$(\mathbf{w}_k^{\flat}, u_k^{\flat}, P_k^{\flat}) = o(\eta^{-n}), \quad \eta \rightarrow \infty \quad (\forall n \in \mathbb{N}); \quad (12)$$

$$\mathbf{b}_k = \text{op}({}_{k-1}\mathbf{v}^{\perp}, {}_{k-1}\mathbf{w}^{\flat}, {}_{k-1}u^{\flat}, {}_k\tilde{Y}); \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_k = \text{op}({}_{k-1}u^{\flat}, {}_{k-1}\mathbf{w}^{\flat}, {}_{k-1}P^{\flat}, {}_{k-1}\mathbf{v}^{\perp}, {}_{k-1}p^{\perp}); \quad (14)$$

$$S_k = \text{op}({}_k\mathbf{v}^{\perp}, {}_k p^{\perp}, {}_{k-1}u^{\flat}, {}_{k-1}P^{\flat}, {}_k\mathbf{w}^{\flat}); \quad (15)$$

$$R_k = \text{op}({}_k\mathbf{v}^{\perp}, {}_k p^{\perp}, {}_k u^{\flat}, {}_{k-1}P^{\flat}, {}_k\mathbf{w}^{\flat}). \quad (16)$$

Заметим, что граничные условия (11) ставятся на изменяющейся поверхности

$$\Gamma = \partial\Sigma = \{\eta = \beta\tilde{\eta}_0(\theta, \tau)\}.$$

Замена переменной $s = \eta - \beta\tilde{\eta}_0 > 0$ преобразует первое уравнение в (10) в стандартное уравнение теплопроводности, а область Σ в неподвижную область $\{(s, \tau) : s > 0\}$; граничные условия при этом смещаются на прямую $s = 0$. Выполнение *первого* из граничных условий (11) с точностью до среднего ставит граничное условие первому уравнению в (10); выполнение *второго* из граничных условий (11) с точностью до среднего ставит граничное условие нормальной скорости внешнего потока. Выполнение *обоих* граничных условий (11) *в среднем* ставит граничные условия тангенциальной и нормальной компонентам среднего поля $\bar{\mathbf{v}}_k^{\perp}$. Для вычисления этих граничных значений необходимы $\bar{\mathbf{w}}_k^{\flat}$ и \bar{u}_k^{\flat} , которые определяются из осредненных уравнений в (10). Подчеркнем, что усреднение по τ выполняется относительно подвижной системы координат, т. е. *сначала* переходим к переменной s , а затем усредняем. Особо отметим, что все уравнения решаются с условием затухания на бесконечности (12).

[‡] Нормаль направлена внутрь жидкости.

Система (10)–(16) обладает треугольной структурой, которая позволяет нам найти сначала \mathbf{w}_k^b , затем u_k^b , и, наконец, P_k^b . Начинаем итерационный процесс, полагая $\mathbf{b}_0 = 0$, $\mathbf{F}_0 = 0$. Тогда $\bar{\mathbf{w}}_0^b = 0$ и $\bar{\gamma}_0 = 0$, и уравнение (6) снабжается однородными граничными условиями, как и говорилось в разделе 2.

Опуская громоздкие вычисления, приведем граничные условия для поля $\bar{\mathbf{v}}_1^z$. В частности, через \hat{Y}_m обозначим последовательность коэффициентов Фурье функции $\tilde{Y}_0 = \tilde{Y}(x, \tau, 0)$. На поверхности \bar{S} определим поле $\mathbf{q} = \tilde{Y}_0 - \boldsymbol{\xi}$, где поле $\boldsymbol{\xi}$ задано в (8). По определению $\mathbf{q} \parallel \bar{S}$. Обозначим через $\hat{\mathbf{q}}_m$, $m \in \mathbb{Z}$, последовательность коэффициентов Фурье поля $\hat{\mathbf{q}}$. Итак,

$$\begin{aligned} \beta^{-1} \bar{\mathbf{w}}_1^z \Big|_{\bar{S}} &= \overline{(\nabla'' \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q}_\tau} / 2 - \overline{[\tilde{Y}_{0\tau}'', \tilde{Y}_0'']} / 2 - \nabla'' (\boldsymbol{\xi}_\tau \cdot \tilde{Y}_0'') - \tilde{\eta}_0 \nabla'' \tilde{\eta}_{0\tau} - 2 \tilde{\eta}_{0\tau} (\tilde{Y}_0'', \nabla) \nabla \rho \\ &\quad - \overline{(\nabla'' \cdot (\tilde{Y}_0 \times \nabla \rho)) (\nabla \rho \times \boldsymbol{\xi}_\tau)} - \frac{1}{2} \sum |m| \left(\nabla'' \cdot (\hat{Y}_m \times \nabla \rho) \right) (\nabla \rho \times \hat{\mathbf{q}}_{-m}) \\ &\quad - 2 \overline{(\text{rot}(\boldsymbol{\xi} \times \nabla \rho) \cdot \nabla \rho - \tilde{\eta}_0 \Delta \rho) \mathbf{q}_\tau} - \sum |m| (\nabla'' |\hat{\mathbf{q}}_m|^2 \\ &\quad + 4 (\nabla'' \cdot \hat{\mathbf{q}}_m) \hat{\mathbf{q}}_{-m}) / 4 - \beta \overline{(\tilde{Y}_0'' \cdot \nabla \tilde{\eta}_0) \mathbf{W}_s} \Big|_{s=0}; \\ \mathbf{W}_\tau &= \mathbf{W}_{ss}, \quad s > 0, \quad \mathbf{W}(0, \tau) = \mathbf{q}_\tau, \quad \mathbf{W}(\infty, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\beta^{-1} \bar{u}_1^z \Big|_{\bar{S}} = \beta^{-1} \bar{\gamma}_1^z = \overline{[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}_\tau]_n} / 2. \quad (18)$$

Уравнения (7)–(8) вместе с граничными условиями (17)–(18) дают полную скорость вихротечения \mathbf{V} .

Заметим, что поле \mathbf{V} — всегда касательное к \bar{S} .

5. Примеры: тангенциальные и крутильные вибрации

Под тангенциальными вибрациями понимаются такие движения границы, при которых область не изменяется. Пример — крутильные колебания шара. Такие движения естественны, если отсчетная область \bar{D} инвариантна относительно подгруппы группы движений \mathbb{R}^3 . При тангенциальных вибрациях

$$(\tilde{Y}_0)_n = \tilde{\eta}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\xi} = 0; \quad \bar{u}_1^z = 0; \quad \mathbf{q} = \tilde{Y}_0''.$$

Поэтому стоксов дрейф всегда равен нулю.

Пусть жидкость заполняет полупространство $z > 0$. Рассмотрим поступательные движения границы

$$\rho = z; \quad \tilde{Y}_0 = \tilde{Y}_0(\tau) \parallel Oxy; \quad \mathbf{q} = \tilde{Y}_0; \quad \nabla'' |\hat{\mathbf{q}}_k|^2 = 0; \quad \nabla'' \cdot (\hat{\mathbf{q}}_k \times \nabla \rho) = 0.$$

При таких данных правые части во всех уравнениях (17)–(18) равны 0, т. е. $\bar{u}_1^z = 0$ и $\bar{w}_1^z = 0$ на плоскости $z = 0$. Следовательно, среднее поле $\bar{\mathbf{v}}_1^z$ должно быть определено из уравнения (7) при нулевом граничном условии на \bar{S} . Следовательно, $\bar{\mathbf{v}}_1^z = 0$ всюду. Таким образом, *поступательные колебания плоских границ не создают вихротечений в главном приближении*. Данный вывод согласуется с рассмотренными [6].

Рассмотрим *вращательно-поступательные движения круглой трубы*, так что $\bar{D} = \{0 \leq r \leq 1\}$ в цилиндрических координатах (r, θ, z) , и $Y_0 = \tilde{\kappa}_0(\tau) \mathbf{e}_\theta + \tilde{\kappa}_1(\tau) \mathbf{e}_z = \mathbf{q}$, где $\tilde{\kappa}_0(\tau)$ и $\tilde{\kappa}_1(\tau)$ — скалярные функции, равные в среднем нулю. Тогда

$$\nabla'' \cdot \mathbf{q} = 0; \quad \nabla'' |\hat{\mathbf{q}}_k|^2 = 0; \quad \nabla'' \cdot (\hat{\mathbf{q}}_k \times \nabla \rho) = 0, \quad \rho = 1 - r.$$

Таким образом, *поступательно-вращательные тангенциальные колебания круглой трубы не дают вибротечения в главном приближении.*

Рассмотрим *крутильные вибрации шара, полностью погруженного в безграничную жидкость.* Тогда $\bar{D} = \{r > 1\}$, $r = |x|$, $\bar{S} = \{r = 1\}$, $\rho = r - 1$, $\nabla\rho = \theta = x/r$,

$$\tilde{Y}_0 = \tilde{\mu}(\tau)\mathbf{k} \times \theta, \quad \mathbf{k} \equiv \text{const}, \quad |\mathbf{k}| = 1,$$

где $\tilde{\mu}$ — скалярная функция с нулевым средним. Обозначим через $\hat{\mu}_m$ ее коэффициенты Фурье. Тогда

$$\hat{\mathbf{q}}_m = \hat{\mu}_m \mathbf{k} \times \theta.$$

Отсюда вытекает, что в граничном условии (17) имеется всего два ненулевых слагаемых:

$$-\frac{1}{4} \sum |m| |\nabla^{\parallel} \hat{\mathbf{q}}_m|^2, \quad -\frac{1}{2} \sum |m| \left(\nabla^{\parallel} \cdot (\hat{Y}_m \times \nabla\rho) \right) (\nabla\rho \times \hat{\mathbf{q}}_{-m}).$$

Опуская рутинные вычисления, приводим окончательный результат:

$$\bar{u}_1^2|_{\bar{S}} = 0; \quad \bar{\mathbf{w}}_1^2|_{\bar{S}} = -(\kappa\beta/4) \sin 2\psi \mathbf{e}, \quad \kappa = \sum |m| |\hat{\mu}_m|^2, \quad \cos \psi = \mathbf{k} \cdot \theta,$$

где ψ — широтная координата на \bar{S} , выбранная так, что $\psi = \pi/2$ на экваторе, и \mathbf{e} — орт координатного направления ψ ; на экваторе \mathbf{e} сонаправлен \mathbf{k} . Итак, *крутильные вибрации шара, полностью погруженного в безграничную жидкость, создают эффективное вибротечение, перемещающее жидкость вдоль граничной сферы от полюсов к экватору[‡], что согласуется с экспериментальными данными Hollerbach и др. [11] и с теорией, данной в [4].*

Для сравнения рассмотрим возвратно-поступательные вибрации шара, полностью погруженного в безграничную жидкость. Тогда $\tilde{Y}_0 = \mu(\tau)\mathbf{k}$ (с теми же \bar{D} , \bar{S} , μ и \mathbf{k} , что и в случае крутильных вибраций). Хотя данные вибрации не тангенциальны, они, тем не менее, не вызывают стокова дрейфа, так как $[\xi_\tau, \xi] = 0$ всюду. Далее,

$$\mathbf{q} = 3\mu(\theta \times (\mathbf{k} \times \theta))/2.$$

Пусть $\mu = \sin \tau$. Тогда в граничном условии (17) ненулевое слагаемое одно:

$$-\frac{1}{4} \sum |m| \left(|\nabla^{\parallel} \hat{\mathbf{q}}_m|^2 + 4(\nabla^{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{q}}_m) \hat{\mathbf{q}}_{-m} \right).$$

Отсюда находим

$$\bar{u}_1^2 = 0; \quad \bar{\mathbf{w}}_1^2 = (45\kappa\beta/16) \sin 2\psi \mathbf{e} \quad \text{на } \bar{S}$$

(в тех же обозначениях, что и в случае крутильных колебаний). Итак, *эффективное вибротечение, создаваемое гармоническими возвратно-поступательными вибрациями шара, полностью погруженного в безграничную жидкость, перемещает жидкость вдоль граничной сферы от экватора к полюсам.*

[‡] Говоря о поведении потока вблизи границы (стенки), мы имеем в виду расстояние, малое по сравнению с характерным размером рассматриваемого течения, но много большее ϵ , т. е. толщины стокова слоя.

6. Нормальные вибрации

Под нормальными понимаются такие движения границы, что $\tilde{Y}_0^{\parallel} = 0$. В таком случае

$$\tilde{Y}_0 = \tilde{\eta}_0 \nabla \rho, \quad \mathbf{q} = -\xi^{\parallel}.$$

Рассмотрим нормальную вибрацию границы жидкого полупространства. Обозначаем через $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ орты декартовых координат $Oxyz$, относительно которых $\bar{D} = \{z > 0\}$, $\bar{S} = \{z = 0\}$ и $\rho = z$. Пусть $\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}_0(x, \tau)$. Тогда $\xi = \xi \mathbf{e}_x + \zeta \mathbf{e}_z$, $\zeta|_{z=0} = \tilde{\eta}_0$, $\mathbf{q} = -\xi \mathbf{e}_x$. Далее, $\text{rot}(\xi \times \nabla \rho) \cdot \nabla \rho = -\xi_x$, и при этом $\Delta \rho = 0$. Отсюда находим

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}_1^{\perp}|_{\bar{S}} &= w \mathbf{e}_x, \quad w = \beta \overline{\tilde{\eta}_{0x} \tilde{\eta}_{0\tau}} - (3\beta/2) (\overline{\xi_x \xi_{\tau}} + (\partial_x/2) \sum |k| |\hat{\xi}_k|^2)|_{z=0}; \\ \bar{u}_1^i &= \beta \bar{\psi}_x|_{z=0}, \quad \bar{\psi} = \overline{\zeta \xi_{\tau}}. \end{aligned}$$

Стоксов дрейф задается полем

$$\frac{\beta}{2} \overline{[\xi_{\tau}, \xi]} = \beta (\bar{\psi}_z \mathbf{e}_x - \bar{\psi}_x \mathbf{e}_z), \quad \bar{\psi} = \overline{\zeta \xi_{\tau}}.$$

Рассмотрим течение, создаваемое плоской бегущей волной. С этой целью полагаем $\tilde{\eta}_0(x, \tau) = f(\alpha x - \tau)$, $f(\sigma) = \sum \hat{f}_k e^{ik\sigma}$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi &= \sum \hat{f}_k e^{-\alpha|k|z+ik\sigma}; \quad \xi = -i \sum \hat{f}_k \text{sgn } k e^{-\alpha|k|z+ik\sigma}; \quad \sigma = \alpha x - \tau; \\ \overline{\tilde{\eta}_{0x} \tilde{\eta}_{0\tau}} &= \overline{\xi_x \xi_{\tau}}|_{z=0} = -\alpha \overline{f'^2}; \quad \bar{\psi} = -\sum |\hat{f}_k|^2 |k| e^{-2|k|\alpha z}; \\ \bar{u}_1^i &= 0, \quad \bar{\mathbf{v}}_1^i = w \mathbf{e}_x, \quad w = \alpha \beta \overline{f'^2}/2 \equiv \text{const}, \\ \frac{\beta}{2} \overline{[\xi_{\tau}, \xi]} &= \beta \bar{\psi}'(z) \mathbf{e}_x = 2\beta \alpha \sum |\hat{f}_k|^2 k^2 e^{-2|k|\alpha z}. \end{aligned}$$

Полная скорость вибротечения

$$\mathbf{V} = W(z) \mathbf{e}_x, \quad W(z) = \alpha \beta \overline{f'^2}/2 + 2\beta \alpha \left(\sum |\hat{f}_k|^2 k^2 e^{-2|k|\alpha z} \right).$$

Таким образом, эффективное вибротечение, вызванное движением плоской волны нормальных смещений вдоль границы жидкого полупространства, перемещает материальные частицы в направлении распространения волны (так как $W(z) > 0$ для каждого $z > 0$). Линии тока везде параллельны направлению движения волны. Величина скорости зависит только от глубины и с ростом глубины экспоненциально быстро приближается к постоянной, зависящей лишь от вида бегущей волны.

Рассмотрим нормальные колебания стенки круглой трубы, создаваемые спиральной бегущей волной. Имеем $\bar{D} = \{r < 1\}$, $\bar{S} = \{r = 1\}$, $\rho = 1 - r$;

$$\tilde{\eta}_0(\theta, z, \tau) = f(\alpha z + n\theta - \tau), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f = f(\sigma) = \sum \hat{f}_k e^{ik\sigma},$$

где r, θ, z — цилиндрические координаты. Как обычно, $I_p(s)$, $p \in \mathbb{N}$, — модифицированная функция Бесселя первого рода индекса p . Вводим обозначение

$$\chi_{k,n,\alpha}(s) = \frac{d}{2ds} \left(\frac{I_{n|k|}(s)}{I'_{n|k|}(\alpha n|k|)} \right)^2; \quad \mu_{k,n,\alpha} = \frac{I_{|k|n}(\alpha|k|)}{I'_{|k|n}(\alpha|k|)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Граничные условия для средней скорости на \bar{S} таковы:

$$\bar{\mathbf{w}}_1^i = \beta C_{n,\alpha} (n \mathbf{e}_{\theta} + \alpha \mathbf{e}_z); \quad \bar{u}_1^i = 0. \quad (19)$$

Отсюда находим среднюю скорость

$$\bar{v}_1^i = \beta C_{n,\alpha} (n r \mathbf{e}_\theta + \alpha \mathbf{e}_z); \quad (20)$$

$$C_{n,\alpha} = \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 \left(\frac{3}{2} \left(1 + \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \mu_{k,n,\alpha}^2 - \frac{2\mu_{k,n,\alpha}}{|k|\alpha} - 1 \right). \quad (21)$$

Поправка Стокса и скорость \mathbf{V} эффективного вибротечения таковы:

$$(\beta/2) \overline{[\boldsymbol{\xi}_\tau, \boldsymbol{\xi}]} = \beta (v_{n,\alpha}(r) n \mathbf{e}_\theta + w_{n,\alpha}(r) \alpha \mathbf{e}_z); \quad (22)$$

$$v_{n,\alpha} = \frac{1}{r} \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 \left(\frac{d\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{dr} - \frac{\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{\alpha|k|r} \right); \quad (23)$$

$$w_{n,\alpha} = \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 \left(\frac{d\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{dr} + \frac{\chi_{k,n,\alpha}(\alpha|k|r)}{\alpha|k|r} \right); \quad (24)$$

$$\mathbf{V} = (\beta/2) \overline{[\boldsymbol{\xi}_\tau, \boldsymbol{\xi}]} + \bar{v}_1^i = \beta (v_{n,\alpha}^d n \mathbf{e}_\theta + w_{n,\alpha}^d \alpha \mathbf{e}_z); \quad (25)$$

$$v_{n,\alpha}^d = r C_{n,\alpha} + v_{n,\alpha}; \quad w_{n,\alpha}^d = C_{n,\alpha} + w_{n,\alpha}. \quad (26)$$

Таким образом, эффективное вибротечение, вызываемое спиральной волной нормальных смещений стенки круглой трубы, вызывает поступательно-вращательное движение материальных частиц, при этом осевая и вращательная скорость зависят только от расстояния от оси трубы, а линии тока представляют собой спирали.

Поправки Стокса к осевой и вращательной скорости всегда положительны, т. е. азимутальная и осевая направленности стоковского дрейфа такие же, как у волны смещений стенки трубы. Действительно, в силу модифицированного уравнения Бесселя

$$\begin{aligned} (I_p' I_p)' + s^{-1} I_p' I &= I_p'^2 + (1 + s^{-2} p^2) I_p^2; \\ (I_p' I_p)' - s^{-1} I_p' I &= (I_p' - s^{-1} I_p)^2 + (1 + (p^2 - 1) s^{-2}) I_p^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает положительность выражений (23) и (24). Несмотря на это, как осевая, так и азимутальная скорости эффективного вибротечения (26) могут менять знак, т. е. различные слои жидкости могут вращаться и (или) перемещаться вдоль трубы разнонаправленно. Действительно, рассмотрим длинноволновый предел $\alpha \rightarrow 0$, и пусть f — тригонометрический полином степени N . Тогда

$$\begin{aligned} C_{n,\alpha} &= \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 (1/2 - 2/(|k|n) + O(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow 0; \\ v_{n,\alpha}^d \Big|_{r=1} &= \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 (5/2 - 4/(|k|n) + O(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow 0; \\ w_{n,\alpha}^d \Big|_{r=1} &= \sum k^2 |\hat{f}_k|^2 (5/2 - 2/(|k|n) + O(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Видно, что величина $C_{n,\alpha}$ может быть отрицательной, т. е. вращательная и осевая составляющие средней скорости (без учета стоковой поправки) могут быть направлены противоположно движению волны смещений при условии, что $n = 1, 2, 3$ и α достаточно мало. Кроме того, если $n = 1$, то величина $v_{n,\alpha}^d$ может быть отрицательной при $r = 1$, т. е. азимутальная скорость эффективного вибротечения жидкости вблизи стенки трубы может быть противоположна по знаку азимутальной скорости волны смещений стенки. Напротив, осевая скорость в $w_{n,\alpha}^d$ длинноволновом пределе всегда положительна, т. е. осевая скорость эффективного вибротечения около стенки трубы всегда сонаправлена осевой скорости волны смещений стенки.

Теперь рассмотрим окрестность оси трубы

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{v_{n,\alpha}(r)}{r} = \alpha^2 \sum_{0 < n|k| \leq 2} \frac{k^2 |\hat{f}_k|^2}{4|kn| I_{n|k|}^2(\alpha|k|)}; \quad n = 1, 2;$$

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{v_{n,\alpha}}{r} = 0, \quad n > 2; \quad w_{1,\alpha}|_{r=0} = \frac{5|\hat{f}_1|^2}{2I_1^2(\alpha)}, \quad w_{n,\alpha}|_{r=0} = 0, \quad n > 1.$$

Мы заключаем, что в длинноволновом пределе осевая скорость эффективного вобротечения $w_{n,\alpha}^d$ может быть отрицательной на оси трубы, если $n = 2, 3$. Следовательно, осевое вобротечение всегда сонаправлено волне смещений около стенки трубы, но может следовать в противоположном направлении около оси трубы. Отметим, что указанное явление заведомо невозможно, если $n = N = 1$ (напомним, что N — степень многочлена f) или $n > 3$.

Рассмотрим длинноволновый предел для угловой скорости эффективного вобротечения $\Gamma_{n,\alpha}(r) = r^{-1}v_{n,\alpha}^d = C_{n,\alpha} + r^{-1}v_{n,\alpha}$. Если $n > 3$, то жидкость и волна смещений стенки вращаются в одном направлении. В противном случае вращения сонаправлены возле стенки трубы, а около оси трубы возможно встречное вращение. Если $n = 1$, то не исключено, что жидкость и волна смещений стенки вращаются в противоположных направлениях и возле стенки трубы, и это неизбежно, если $n = N = 1$, см. рис. 1.

На рис. 1 представлены профили угловой скорости эффективного вобротечения в зависимости от расстояния до оси трубы для $f(\sigma) = \cos(\sigma)$. На правой панели отображаются графики для различных азимутальных волновых чисел, в то время как длина волны фиксирована. На левой панели отображаются графики для волн различной длины, в то время как азимутальное волновое число фиксировано. Стоит отметить, что существуют такие значения длины волны, что угловая скорость оказывается намного меньше у стенки трубы, чем у оси. Глядя на правую панель, можно увидеть, что удвоение азимутального волнового числа способно перенаправить вращение всех дрейфующих частиц. Дальнейшее увеличение волнового числа от удвоенного к утроенному снова изменяет направление вращения, однако изменение происходит не везде, а только вблизи оси.

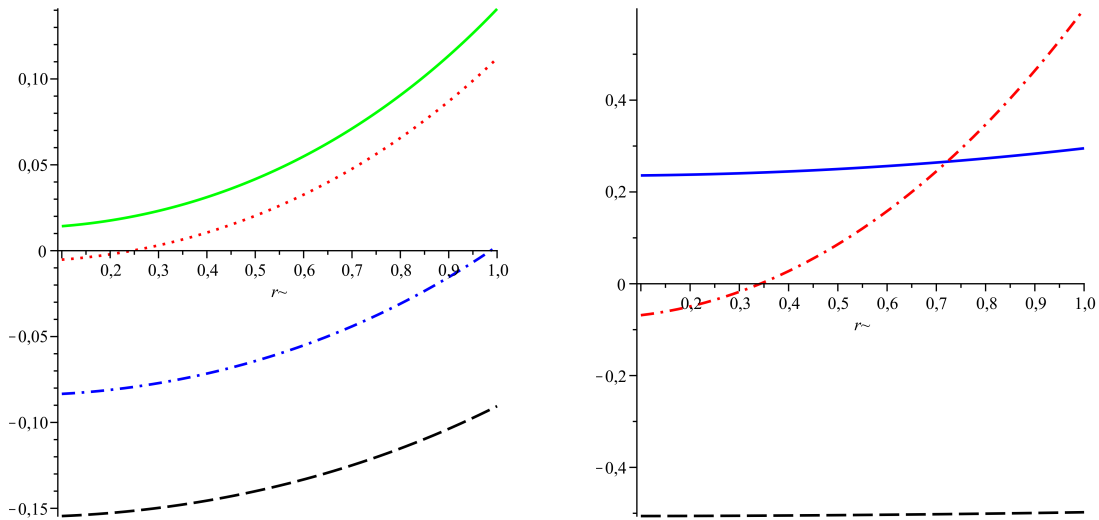


Рис. 1. Слева — графики $\Gamma_{1,\alpha}(r)$: $\alpha = 1.13$ (сплошная линия), $\alpha = 1.1$ (точки), $\alpha = 0.99$ (точки-тире) и $\alpha = 0.9$ (пунктир). Справа — графики $\Gamma_{n,1/2}(r)$: $n = 1$ (пунктир), $n = 2$ (сплошная линия) и $n = 3$ (точки-тире).

Литература

1. Craik A. D. D., Leibovich S. A Rational model for langmuir circulations // J. Fluid Mech.—1976.—Vol. 73, № 3.—P. 401–426. DOI: 10.1017/S0022112076001420.
2. Duck P. W., Smith F. T. Steady streaming induced between oscillating cylinders // J. Fluid Mech.—1979.—Vol. 91, № 1.—P. 93–110. DOI: 10.1017/S0022112079000057.
3. Haddon E. W., Riley N. The steady streaming induced between oscillating circular cylinders // The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.—1979.—Vol. 32, № 3.—P. 265–282. DOI: 10.1093/qjmam/32.3.265.
4. Gopinath A. Steady streaming due to small-amplitude torsional oscillations of a sphere in a viscous fluid // The Quarterly J. of Mech. and Appl. Math.—1993.—Vol. 46, № 3.—P. 501–520. DOI: 10.1093/qjmam/46.3.501.
5. Левенштам В. Б. Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2000.—Т. 40, № 9.—P. 1416–1424.
6. Vladimirov V. A. Viscous flows in a half space caused by tangential vibrations on its boundary // Stud. Appl. Math.—2008.—Vol. 121, № 4.—P. 337–367. DOI: 10.1111/j.1467-9590.2008.00418.x.
7. Ilin K. and Morgulis A. On the steady streaming induced by vibrating walls // SIAM J. on Appl. Math.—2012.—Vol. 72, № 5.—P. 1406–1427. DOI: 10.1137/110859634.
8. Riley N. Steady streaming // Annual Review of Fluid Mech.—2001.—Vol. 33.—P. 43–65. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.
9. Longuet-Higgins M. S. Mass transport in water waves // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.—1953.—Vol. 245, № 903.—P. 535–581.
10. Longuet-Higgins M. S. Peristaltic pumping in water waves // J. Fluid Mech.—1983.—Vol. 137.—P. 393–407. DOI: 10.1017/S0022112083002475.
11. Hollerbach R. et al. The flow around a torsionally oscillating sphere // Physics of Fluids.—2002.—Vol. 14, № 12.—P. 4192–4205. DOI: 10.1063/1.1518029.

Статья поступила 6 мая 2019 г.

Ильин Константин Иванович
Йоркский университет, лектор
Великобритания, Хеслингтон, Йорк YO10 5DD
E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk
<https://orcid.org/0000-0003-2770-3489>;

Моргулис Андрей Борисович
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела диф. уравнений
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета,
профессор кафедры вычислительной математики и мат. физики
РОССИЯ, 344099, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: morgulisandrey@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-8575-4917>

VIBRATIONAL FLOWS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUIDS
FOR HIGH REINOLDS NUMBERSIlin, K. I.¹, Morgulis, A. B.^{2,3}¹ The University of York, Heslington, York YO10 5DD, UK;² I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;³ Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia

E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk, morgulisandrey@gmail.com

Abstract. The article presents the high-frequency asymptotics of the Navier–Stokes system, which describes the motion of a viscous incompressible fluid in the region bounded by a vibrating surface. The boundary conditions require the coincidence of the velocity vectors of the material particle of the fluid and the point of the boundary in which the particle is located. Consequently, the fluid is not allowed either to slip along the boundary (the no-slip condition) or to penetrate through it. It is assumed that the motion of the boundary surface is given and periodic in time, and the domain confined within it stays at rest on average but, generally speaking, can be changing its shape. The frequency of oscillations of the boundary tends to infinity, and the amplitude tends to zero, but the ratio of the amplitude to the Stokes's layer thickness remains of the order of unity. The main result is the explicit form of the equations and boundary conditions that determine the mean flow in the most general case, without special assumptions about the problem data. On this basis, a number of specific flows have been investigated, in particular, a flow in a circular pipe, caused by the normal vibration of its walls.

Key words: Navier–Stokes system, high-frequency asymptotic, vibration, mean flow, steady streaming.

Mathematical Subject Classification (2010): 76D05, 76D10, 76D17, 35Q30, 35Q35.

For citation: Ilin, K. I., Morgulis, A. B. Vibrational Flows of Viscous Incompressible Fluids for High Reynolds Numbers, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 2, pp. 5–17 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.2.32112.

References

1. Craik, A. D. D. and Leibovich, S. A Rational Model for Langmuir Circulations, *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 73, no. 3, pp. 401–426. DOI: 10.1017/S0022112076001420.
2. Duck, P. W. and Smith, F. T. Steady Streaming Induced Between Oscillating Cylinders, *J. Fluid Mech.*, 1979, vol. 91, no. 1, pp. 93–110. DOI: 10.1017/S0022112079000057.
3. Haddon, E. W. and Riley, N. The Steady Streaming Induced Between Oscillating Circular Cylinders, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1979, vol. 32, no. 3, pp. 265–282. DOI: 10.1093/qjmam/32.3.265.
4. Gopinath, A. Steady Streaming due to Small-Amplitude Torsional Oscillations of a Sphere in a Viscous Fluid, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1993, vol. 46, no. 3, pp. 501–520. DOI: 10.1093/qjmam/46.3.501.
5. Levenshtam, V. B. Asymptotic Expansion of the Solution of a Problem of Vibrational Convection, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 9, pp. 1357–1365.
6. Vladimirov, V. A. Viscous Flows in a Half Space Caused by Tangential Vibrations on its Boundary, *Studies in Applied Mathematics*, 2008, vol. 121, no. 4, pp. 337–367. DOI: 10.1111/j.1467-9590.2008.00418.x.
7. Ilin, K. and Morgulis, A. On The Steady Streaming Induced By Vibrating Walls, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2012, vol. 72, no. 5, pp. 1406–1427. DOI: 10.1137/110859634.
8. Riley, N. Steady Streaming, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2001, vol. 33, pp. 43–65. DOI: 10.1146/annurev.fluid.33.1.43.

9. Longuet-Higgins, M. S. Mass Transport in Water Waves, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1953, vol. 245, no. 903, pp. 535–581.
10. Longuet-Higgins, M. S. Peristaltic Pumping in Water Waves, *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 137, pp. 393–407. DOI: 10.1017/S0022112083002475.
11. Hollerbach, R. et al. The Flow Around a Torsionally Oscillating Sphere, *Physics of Fluids*, 2002, vol. 14, no. 12, pp. 4192–4205. DOI: 10.1063/1.1518029.

Received May 6, 2018

KONSTANTIN ILIN
The University of York,
Heslington, York YO10 5DD, United Kingdom,
Lecturer

E-mail: konstantin.ilin@york.ac.uk
<https://orcid.org/0000-0003-2770-3489>

ANDREY MORGULIS
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher at the Division of Differential Equation;
I. I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences,
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344099, Russia,
Professor

E-mail: morgulisandrey@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-8575-4917>