Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 5–17

УДК 517.9
DOI 10.46698/u5398-4279-7225-c

ОГРАНИЧЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Абанин[1,2]**, Ю. В. Кораблина**[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: avabanin@sfedu.ru, anaconda210150@mail.ru

Посвящается 90-летию профессора
Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. В работе устанавливаются критерии ограниченности классических операторов, действующих из абстрактных банаховых пространств голоморфных в области функций в весовые пространства тех же функций с равномерной нормой. Представлено дальнейшее развитие идеи Н. Зорбоска, в соответствии с которой условия ограниченности операторов весовой композиции, включая операторы умножения и обычной композиции, и интегрального оператора Вольтерра могут быть сформулированы в терминах норм δ-функций в соответствующих сопряженных пространствах. В качестве приложений получены критерии ограниченности упомянутых операторов в обобщенных пространствах Бергмана и Фока. В конкретных пространствах эти критерии удается сформулировать в терминах весов, определяющих пространства, и функций, задающих композицию. По сравнению с предшествующими результатами существенно расширен класс весовых пространств голоморфных в единичном круге функций с равномерными нормами, для которых удается реализовать метод Н. Зорбоска. Кроме того, разработано распространение этого подхода на весовые пространства целых функций. На этом пути введен класс почти гармонических весов и получены оценки норм δ-функций в пространствах, сопряженных с обобщенными пространствами Фока, определяемыми почти гармоническими весами.

Ключевые слова: весовые пространства голоморфных функций, оператор весовой композиции, оператор Вольтерра, пространства Бергмана, пространства Фока.

Mathematical Subject Classification (2010): 47B38, 46E15, 30H20.

Образец цитирования: *Абанин А. В., Кораблина Ю. В.* Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 5–17. DOI: 10.46698/u5398-4279-7225-c.

Введение

Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех голоморфных в G функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из G. Всюду далее X — банахово пространство голоморфных в G функций с нормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$. Через X^* будем обозначать сопряженное с X банахово пространство всех линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\phi\|^* := \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\phi(f)|$, $\phi \in X^*$. При исследовании свойств классических операторов в пространствах X из классов Бергмана, Харди, Фока и др. в ряде случаев решающую роль в установлении нужного результата играет непрерывность исследуемого оператора из X в какое-либо вспомогательное весовое пространство $H_v(G)$ с sup-нормой $\|\cdot\|_v$, задаваемой весом v. В частности, это касается динамических свойств операторов сдвига, дифференцирования и интегрирования (см. [1, 2] и библиографию в них).

В статье [3] Н. Зорбоска для случая, когда $G=\mathbb{D}$ — единичный круг и v — радиальный вес на $\mathbb{D}$, установила критерий непрерывности абстрактного линейного оператора T из X в $H_v(\mathbb{D})$, формулируемый с помощью весовой оценки композиций T с δ-функциями (см. [3, теорема 2.1]). С помощью этого критерия в [3] был получен ряд результатов о непрерывности и компактности операторов Вольтерра и композиции в пространствах Харди, Бергмана и Блоха.

Основная цель настоящей работы — распространить теорему 2.1 из [3] на произвольные области G и веса v, а затем применить полученный критерий не только к случаю круга, но и к пространствам целых функций. Более того, в статье будет разработано развитие некоторых идей из [3], которое позволяет не только осуществить переход от $\mathbb{D}$ к $\mathbb{C}$, но и получить далеко идущее обобщение результатов из [3] для круга.

1. Абстрактный критерий и его приложения

Весом в области G будем называть произвольную непрерывную функцию $v : G \to (0,\infty)$. Каждый вес v в G порождает банахово пространство

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

Как известно, $H_v(G) \hookrightarrow H(G)$, где $\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения, и δ-функция $\delta_z : f \mapsto f(z)$ является линейным непрерывным функционалом на $H(G)$ при любом $z\in G$. Отсюда, в частности, следует, что $\delta_z \in (H_v(G))^*$ при любом $z \in G$.

Следующий результат обобщает теорему 2.1 (i) из [3] на случай произвольных областей и весов.

Теорема 1. *Линейный оператор $T : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда $\delta_z \circ T \in X^*$ при всех $z \in G$ и*

$$|T|_{X,v} := \sup_{z\in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} < \infty. \tag{1}$$

В случае ограниченности $T : X \to H_v(G)$ имеем, что $\|T\| = |T|_{X,v}$.

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть $T : X \to H_v(G)$ ограничен. Тогда, так как δ_z является линейным непрерывным функционалом на $H_v(G)$, то $\delta_z \circ T \in X^*$ при любом $z \in G$.

Далее, поскольку $T : X \to H_v(G)$ ограничен, то

$$\|T\| := \sup\{\|Tf\|_v : \|f\| \leqslant 1\} < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$|(Tf)(z)| \leqslant \|T\|\, v(z) \quad (\forall\, z \in G,\ f \in X,\ \|f\| \leqslant 1).$$

Поэтому при каждом $z \in G$

$$\|\delta_z \circ T\|^* = \sup\big\{ |(Tf)(z)| : \|f\| \leqslant 1 \big\} \leqslant \|T\|\, v(z),$$

откуда заключаем, что верно неравенство

$$|T|_{X,v} \leqslant \|T\| < \infty, \tag{2}$$

из которого следует (1).

Достаточность. Пусть $\delta_z \circ T \in X^*$ при всех $z \in G$ и выполнено (1). Тогда

$$\|\delta_z \circ T\|^* \leqslant |T|_{X,v}\, v(z) \quad (\forall\, z \in G).$$

Следовательно, при каждом $z \in G$

$$|(Tf)(z)| \leqslant |T|_{X,v} \cdot v(z) \quad (\forall\, f \in X,\ \|f\| \leqslant 1).$$

Поэтому

$$\|T\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|Tf\|_v = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \sup_{z \in G} \frac{|(Tf)(z)|}{v(z)} \leqslant |T|_{X,v} < \infty, \tag{3}$$

и, значит, $T : X \to H_v(G)$ ограничен.

Для завершения доказательства остается заметить, что из (2) и (3) следует равенство $\|T\| = |T|_{X,v}$. $\triangleright$

Применим теорему 1 к классическим операторам весовой композиции, умножения и Вольтерра.

Обозначим через $S(G)$ семейство тех функций $\varphi \in H(G)$, для которых $\varphi(G) \subset G$. Оператор $W_{u,\varphi}$ весовой композиции определяется по фиксированным функциям $u \in H(G)$ и $\varphi \in S(G)$ следующим образом:

$$(W_{u,\varphi} f)(z) = u(z) f(\varphi(z)), \quad f \in H(G),\ \ z \in G.$$

Этот оператор действует непрерывно из $H(G)$ в $H(G)$. Так как

$$(\delta_z \circ W_{u,\varphi})(f) = u(z) \cdot f(\varphi(z)) = u(z) \cdot \delta_{\varphi(z)}(f),$$

то $\|\delta_z \circ W_{u,\varphi}\|^* = |u(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|^*$ при каждом $z \in G$. Использовав это равенство и применив теорему 1, получаем такой результат.

Предложение 1. *Пусть v — вес на G, $u \in H(G)$ и $\varphi \in S(G)$. Оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z \in G} \frac{|u(z)|\, \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $W_{u,\varphi} : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|W_{u,\varphi}\| = \sup_{z \in G} \frac{|u(z)|\, \|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Заметим, что если $u(z) \equiv 1$ в G, то оператор $W_{u,\varphi}$ является оператором обычной композиции и обозначается через C_φ; таким образом, $C_\varphi : f \to f(\varphi(z))$. Если же $u \in H(G)$ произвольна, а $\varphi(z) \equiv z$ в G, то $W_{u,\varphi}$ превращается в оператор умножения на $u(z)$ и обозначается через M_u, т. е. $M_u : f \mapsto u(z) \cdot f(z)$. Применив предложение 1 к этим частным случаям, приходим к следующим результатам.

Следствие 1. *Пусть v — вес на G, $\varphi \in S(G)$. Оператор композиции $C_\varphi : X \to H_v(G)$ корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $C_\varphi : X \to H_v(G)$ ограничен,

$$\|C_\varphi\| = \sup_{z \in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|^*}{v(z)}.$$

Следствие 2. *Пусть* v *— вес на* G, $u \in H(G)$. *Оператор умножения* $M_u : X \to H_v(G)$ *корректно определен и ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{|u(z)|\,\|\delta_z\|^*}{v(z)} < \infty.$$

В случае, когда $M_u : X \to H_v(G)$ *ограничен,*

$$\|M_u\| = \sup_{z\in G} \frac{|u(z)|\,\|\delta_z\|^*}{v(z)}.$$

Теперь рассмотрим оператор Вольтерра. Пусть G — односвязная область в комплексной плоскости. Без ограничения общности будем считать, что $0 \in G$. Для фиксированной функции $g \in H(G)$ оператор Вольтерра определяется по правилу

$$T_g : f \mapsto \int\limits_0^z f(s)g'(s)\,ds, \quad z \in G,$$

где интегрирование ведется по любому спрямляемому пути, соединяющему начало с точкой z и лежащему в G. Нетрудно видеть, что этот оператор действует непрерывно из $H(G)$ в $H(G)$. При $g(z) \equiv z$ он совпадает с оператором интегрирования I.

При некоторых дополнительных предположениях вопрос об ограниченности оператора T_g удается свести к вопросу об ограниченности оператора умножения. Заметим попутно, что T_g отображает $H(G)$ в его замкнутое подпространство $H_0(G) := \{f \in H(G) : f(0) = 0\}$. В связи с этим нам потребуется соответствующее замкнутое подпространство $H_{v,0} := \{f \in H_v(G) : f(0) = 0\}$ в $H_v(G)$.

Предложение 2. *Пусть имеются два веса* v *и* w *на* G *такие, что оператор дифференцирования* D *является изоморфизмом между* $H_{v,0}(G)$ *и* $H_w(G)$. *Тогда ограниченность оператора Вольтерра* $T_g : X \to H_{v,0}(G)$ *эквивалентна ограниченности оператора умножения* $M_{g'} : X \to H_w(G)$.

$\lhd$ Очевидно, что $D \circ T_g = M_{g'}$ на $H(G)$. Так как по условию $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ ограничен, то отсюда следует, что из ограниченности оператора $T_g : X \to H_{v,0}(G)$ вытекает ограниченность $M_{g'} : X \to H_w(G)$.

Пусть теперь ограничен оператор $M_{g'} : X \to H_w(G)$. Ясно, что обратным к оператору $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ является оператор интегрирования $I : H_w(G) \to H_{v,0}(G)$, который ограничен в силу изоморфности $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$. А поскольку $T_g = I \circ D \circ T_g = I \circ M_{g'}$, то заключаем, что из ограниченности $M_{g'} : X \to H_w(G)$ следует ограниченность $T_g : X \to H_{v,0}(G)$. $\rhd$

Из следствия 2 предложения 1 и предложения 2 непосредственным образом вытекает

Предложение 3. *Пусть веса* v *и* w *на* G *таковы, что оператор* $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ *— изоморфизм. Тогда оператор Вольтерра* $T_g : X \to H_v(G)$ *ограничен в том и только в том случае, когда*

$$\sup_{z\in G} \frac{|g'(z)|\,\|\delta_z\|^*}{w(z)} < \infty.$$

Замечание. Предложение 1 обобщает следствие 2.1 (i) из [3] на случай произвольных областей и весов. Что касается предложения 3, то оно представляет собой абстрактную версию следствия 2.1 (iii) из той же работы [3], которое касалось случая $G = \mathbb{D}$ и конкретных весов $v(r) = (1 - r^2)^{-\beta}$ и $w(r) = (1 - r^2)^{-\beta-1}$ на $\mathbb{D}$, где $\beta > 0$.

2. Критерии ограниченности классических операторов в конкретных пространствах

Для применения результатов предыдущего раздела к конкретным пространствам $X \subset H(G)$ требуется иметь способ для вычисления норм δ-функций $\|\delta_z\|^*$ или хотя бы для получения равномерных по $z \in G$ оценок $\|\delta_z\|^*$. Кроме того, для использования предложения 3 необходимо установить те пары весов v и w на G, для которых оператор $D : H_{v,0}(G) \to H_w(G)$ — изоморфизм. В связи с этим отметим, что в статье [3] был приведен ряд известных результатов о величине $\|\delta_z\|^*$ в ряде классических весовых пространств голоморфных в единичном круге функций. Именно, рассматривались пространства Харди H^p и Бергмана A^p_α. Напомним, что

$$H^p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p := \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) < \infty \right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|^p := \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) \right\}, \quad \alpha > -1, \ \ 0 < p < \infty,$$

где $dA(z)$ — нормализованная мера Лебега в $\mathbb{D}$, т. е. $dA(z) = \frac{1}{\pi} d\lambda(z)$, где $d\lambda(z)$ — мера Лебега в плоскости. Как отмечено в [3],

$$\|\delta_z\|^* = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}, \quad X = H^p;$$
$$\|\delta_z\|^* = (1-|z|^2)^{-\frac{\alpha+2}{p}}, \quad X = A^p_\alpha.$$

Этого вполне достаточно, чтобы сформулировать следствия из абстрактного критерия ограниченности оператора весовой композиции, включая его частные случаи обычной композиции умножения, действующих из H^p или A^p_α в $H_v(\mathbb{D})$. Для оператора Вольтерра в [3] аналогичные результаты приведены только для одного специального класса пространств $H_v(\mathbb{D})$, задаваемых весами вида $v(z) = (1-|z|^2)^{-\beta}$, $\beta > 0$, и обозначаемых символом H_β. Это связано в основном с тем, что лишь для этого класса пространств известно, что оператор дифференцирования осуществляет изоморфизм между $H_{\beta,0} = \{f \in H_\beta : f(0) = 0\}$ и $H_{\beta+1}$. Наша ближайшая цель — указать условия общего характера на радиальные веса v в $\mathbb{D}$, при которых удается сформулировать критерии непрерывности операторов Вольтерра из X в $H_v(\mathbb{D})$ при $X = H^p$ или $X = A^p_\alpha$. Затем этот подход будет распространен на неисследовавшийся ранее случай пространств целых функций.

Напомним, что вес v в $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ называется радиальным, если $v(z) = v(|z|)$ при всех $z \in G$, где $v : [0,a) \to (0,\infty)$ — непрерывная возрастающая на $[0,a)$ функция, $a = 1$ для $G = \mathbb{D}$ и $a = \infty$ для $G = \mathbb{C}$. Дополнительно требуем, чтобы $v(r) \to \infty$ при $r \to 1$ для $\mathbb{D}$ и $r^n = o(v(r))$ при $r \to \infty$ для $\mathbb{C}$. Эти условия обеспечивают то, что $H_v(\mathbb{D})$ отлично от хорошо изученного пространства $H^\infty(\mathbb{D})$ всех ограниченных голоморфных в $\mathbb{D}$ функций и $H_v(\mathbb{C})$ содержит все полиномы.

Как известно (см. [4] и [5]), в случае пространств, задаваемых радиальными весами, достаточно ограничиться использованием, так называемых, log-выпуклых весов v, т. е. таких, что функция $\ln v(e^x)$ выпукла на $(-\infty, 0)$ или $\mathbb{R}$. При этом, из свойств выпуклых функций следует, что log-выпуклые веса дифференцируемы на $(0,a)$ за исключением не более, чем счетного числа точек, и всюду на $(0,a)$ имеют левую и правую производные. В дальнейшем обозначение $v'(r)$ будет использоваться для обозначения правой производной функции v.

Замечание. Пусть r_0 — произвольная фиксированная точка из $(0, a)$. Очевидно, что радиальные веса $v(r)$ и

$$v_0(r) := \begin{cases} v(r_0), & 0 \leqslant r \leqslant r_0; \\ v(r), & r_0 < r < a \end{cases}$$

на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$ задают одно и то же весовое пространство $H_v(G)$, а нормы $\|\cdot\|_v$ и $\|\cdot\|_{v_0}$ эквивалентны, т. е. $\frac{1}{C}\|\cdot\|_v \leqslant \|\cdot\|_{v_0} \leqslant C \cdot \|\cdot\|_v$ при некотором $C > 1$. В связи с этим мы будем в дальнейшем относить к классу log-выпуклых весов те радиальные веса v на $G = \mathbb{D}$ или $G = \mathbb{C}$, для которых при некотором $r_0 \in [0, a)$ функция $v(r)$ возрастает на $[r_0, a)$, а функция $\ln v(e^x)$ выпукла на $(\ln r_0, \ln a)$ (при этом считаем, что $\ln 0 = -\infty$ и $\ln(+\infty) = +\infty$).

2.1. Ограниченность операторов в пространствах Харди и Бергмана

Поскольку формулировка следствий из предшествующих результатов об ограниченности операторов (весовой) композиции и умножения не составляет труда, мы ограничимся в данном разделе только изучением оператора Вольтерра. Для этого нам потребуется следующий вспомогательный результат, представляющий собой незначительное уточнение следствия 3.18 из [5].

Лемма 1. *Пусть v — log-выпуклый радиальный вес на $\mathbb{D}$ и $w(r) = \frac{v(r)}{1-r}$, $0 \leqslant r < 1$. Оператор $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$0 < \liminf_{r \to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} \leqslant \limsup_{r \to 1} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} < \infty. \tag{4}$$

$\lhd$ В силу теоремы Банаха об обратном операторе $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$ является изоморфным в том и только в том случае, когда он является эпиморфным и инъективным. По следствию 3.18 из [5] условие (4) необходимо и достаточно для того, чтобы эпиморфным был $D : H_v(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$. Теперь заметим, что так как $D(f(z) - f(0)) = D(f)$ для любой $f \in H(\mathbb{D})$, то $D(H_{v,0}(\mathbb{D})) = D(H_v(\mathbb{D}))$. Значит, (4) является также необходимым и достаточным для того, чтобы эпиморфизмом был $D : H_{v,0}(\mathbb{D}) \to H_w(\mathbb{D})$. Чтобы закончить доказательство, остается воспользоваться очевидным фактом об инъективности D на $H_{v,0}(\mathbb{D})$. $\rhd$

Из предложения 3 и леммы 1 следует такой результат.

Предложение 4. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (4). Оператор Вольтерра $V_g : X \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1-|z|)\,|g'(z)|\,\|\delta_z\|^*}{v(|z|)} < \infty.$$

Воспользовавшись формулами для $\|\delta_z\|^*$, приведенными выше для пространств Харди H^p и Бергмана A^p_α, получаем отсюда

Следствие 1. *Пусть v — радиальный log-выпуклый вес на $\mathbb{D}$, для которого выполнено условие (4). Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Оператор Вольтерра $V_g : H^p \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{1}{p}}|g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

(ii) *Оператор Вольтерра $V_g : A^p_\alpha \to H_v(\mathbb{D})$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{1-\frac{\alpha+2}{p}}|g'(z)|}{v(z)} < \infty.$$

Отметим, что сформулированные в следствии 1 утверждения ранее были известны лишь для конкретного классического пространства Бергмана H_β, задаваемого весом $(1-|z|)^{-\beta}$, $\beta > 0$ (обычно для его задания используют эквивалентный вес $(1-|z|^2)^{-\beta}$; см. [3, следствие 2.1 (iii)]). Покажем, что следствие 1 применимо к достаточно широкому спектру весов, содержащему $(1-|z|)^{-\beta}$ в качестве частного случая.

Пусть $\beta > 0$ и $p \in \mathbb{R}$. Положим

$$v(z) = e^\beta, \ \ 0 \leqslant |z| \leqslant \frac{e-1}{e}, \qquad v(z) = \frac{1}{(1-|z|)^\beta} \ln^p \frac{1}{1-|z|}, \ \ \frac{e-1}{e} < |z| < 1.$$

Пространство $H_v(\mathbb{D})$, определяемое этим весом, будем обозначать специальным символом $H_{\beta,p}$. Ясно, что при $p = 0$ получаем пространство H_β.

Прямой подсчет показывает, что для функции $\varphi(x) = \ln v(e^x)$ при $\ln \frac{e}{e+1} < x < 0$ имеем

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}\left(\beta + p\,\frac{e^x - \ln(1-e^x)}{\ln^2(1-e^x)}\right).$$

Поскольку $\beta > 0$ и $\frac{e^x-\ln(1-e^x)}{\ln^2(1-e^x)} \to 0$ при $x \to -0$, то функция φ выпукла на $(x_0, 0)$ при некотором $x_0 < 0$. Следовательно, v является log-выпуклым весом на $\mathbb{D}$. Кроме того, легко видеть, что

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{(1-r)v'(r)}{v(r)} = \lim_{r\to 1-0}\left(\beta - \frac{p}{\ln(1-r)}\right) = \beta.$$

Значит, для v выполнено условие (4).

Таким образом, рассматриваемый вес удовлетворяет всем условиям предложения 4, в соответствии с которым верно

Следствие 2. *Оператор Вольтерра $V_g : X \to H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\beta+1}\,|g'(z)|\,\|\delta_z\|^*}{\ln^p \frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

В качестве частного случая при $p = 0$ следствие 2 содержит следствие 2.1 (iii) из [3]. Применив к рассматриваемому весу следствие 1, получаем обобщение на произвольное $p \in \mathbb{R}$ следствия 2.2 (i) и (iii) из [3] для пространств Харди и Бергмана.

Следствие 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) Оператор Вольтерра $V_g : H^p \to H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\beta+1-\frac{1}{p}}\,|g'(z)|}{\ln^p \frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

(ii) Оператор Вольтерра $V_g : A^p_\alpha \to H_{\beta,p}$ ограничен тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{\beta+1-\frac{\alpha+2}{p}}\,|g'(z)|}{\ln^p \frac{1}{1-|z|}} < \infty.$$

2.2. Ограниченность операторов в пространствах Фока

Покажем теперь, что наши общие результаты применимы и к ранее не исследовавшемуся случаю пространств целых функций.

Пусть непрерывная функция $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ такова, что

$$A_\psi := \int\limits_{\mathbb{C}} e^{-\psi(z)}\, dA(z) < \infty, \quad \lambda_\psi := \frac{1}{A_\psi}.$$

При каждом $0 < p < \infty$ она задает обобщенное пространство Фока:

$$F_p^\psi := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{p,\psi} := \left(\lambda_\psi \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p\, e^{-\psi(z)}\, dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

В случае $p = \infty$ полагаем $F_\infty^\psi = H_{e^\psi}(\mathbb{C})$. При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространство F_p^ψ является банаховым. Весу $\psi(z) = \frac{\alpha p}{2}|z|^2$, где $\alpha > 0$ (при этом $\lambda_\psi = \frac{p\alpha}{2\pi}$), соответствует классическое пространство Фока, которое обозначается символом F_α^2. Из [6, теорема 2.7] следует, что

$$\|\delta_z\|^* = e^{\frac{\alpha|z|^2}{2}}, \quad X = F_\alpha^2. \tag{5}$$

Подобно тому, как это было сделано выше для пространств Харди и Бергмана, с помощью (5) можно легко сформулировать ряд следствий об ограниченности операторов весовой композиции, действующих из F_α^2 в весовые пространства $H_v(\mathbb{C})$ с равномерной весовой нормой. Мы на этом останавливаться не будем, а сосредоточимся для этих операторов на исследовании пространств Фока F_p^ψ общего вида и приложениях полученных результатов к пространствам $F_\alpha^{p,q}$, задаваемых весами $\psi(z) = \frac{\alpha p}{q}|z|^q$ при $q \neq 2$. Кроме того, будет рассмотрен и вопрос об ограниченности оператора Вольтерра.

Назовем вес ψ *слабо растущим в среднем*, если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$B_\psi(z) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta| \leqslant 1} \psi(z + \zeta)\, dA(\zeta) \leqslant \psi(z) + C \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}). \tag{6}$$

Обозначим через Ψ_0 класс весов, удовлетворяющих (6).

Замечание. Наибольший интерес представляют те веса, которые являются субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями. Для них всегда

$$\psi(z) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{|\zeta| \leqslant 1} \psi(z + \zeta)\, dA(\zeta) \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Поэтому субгармонические веса из Ψ_0 естественно называть *почти гармоническими.*

В силу того, что для субгармонических функций ψ интегральное среднее по кругу не превосходит интегрального среднего по границе круга, принадлежность ψ к Ψ_0 следует из условия

$$(\exists\, C > 0) \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \psi\big(z + e^{i\theta}\big)\, d\theta \leqslant \psi(z) + C \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}), \tag{7}$$

которое иногда проще проверять, чем (6).

Лемма 2. *Для любого веса $\psi \in \Psi_0$ и пространства $X = F_p^\psi$ существует $A > 0$ такое, что*

$$\|\delta_z\|^* \leqslant A e^{\frac{\psi(z)}{p}} \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

◁ В силу теоремы 1 из работы [7] для любой функции $f \in F_p^\psi$ при каждом $z \in \mathbb{C}$

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{1}{p}\, B_\psi(z) + \ln\|f\|_{p,\psi} + \frac{1}{p}\,\ln\frac{1}{\pi}.$$

Учитывая, что $\psi \in \Psi_0$, получаем отсюда, что

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{1}{p}\,\psi(z) + \ln\|f\|_{p,\psi} + \frac{C}{p} + \frac{1}{p}\,\ln\frac{1}{\pi} \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}),$$

где C — постоянная из условия (6). Тогда для f с $\|f\|_{p,\psi} \leqslant 1$ имеем $|f(z)| \leqslant Ae^{\frac{\psi(z)}{p}}$, где $A = \frac{1}{\pi^p}\, e^{C/p}$, откуда следует требуемое. ▷

Из предложения 1 и леммы 2 непосредственным образом следует

Предложение 5. *Пусть ψ — вес из Ψ_0, v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, u и φ — фиксированные целые функции. Если*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|u(z)|\, e^{\frac{\psi(\varphi(z))}{p}}}{v(z)} < \infty,$$

то оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : F_p^\psi \to H_v(\mathbb{C})$ ограничен.

Рассмотрим радиальные веса вида $\psi(z) = \gamma|z|^q$, где $\gamma > 0$, $q > 0$. Заметим, что они являются субгармоническими в $\mathbb{C}$ функциями. Для них справедлива

Лемма 3. *Веса $\psi(z) = \gamma|z|^q$ при всех $\gamma > 0$ и $0 < q \leqslant 2$ являются почти гармоническими.*

◁ Ясно, что достаточно рассмотреть веса $\psi(z) = |z|^q$, $0 < q \leqslant 2$, и в силу их радиальности проверить условие (7) для $z = x \geqslant 0$.

После несложных преобразований имеем при $x > 0$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta = \int\limits_{0}^{\pi} \left(\left|x + e^{i\theta}\right|^q + \left|x + e^{-i\theta}\right|^q\right) d\theta$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|x + e^{i\theta}\right|^q + \left|x - e^{i\theta}\right|^q\right) d\theta$$

$$= 2|x|^q \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q + \left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q\right) d\theta.$$

Теперь заметим, что так как $0 < q \leqslant 2$, то для всех $x > 0$

$$\left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q = \left(1 + \frac{2x\cos\theta + 1}{x^2}\right)^{\frac{q}{2}} \leqslant 1 + \frac{q}{2}\,\frac{2x\cos\theta + 1}{x^2}$$

и

$$\left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q = \left(1 - \frac{2x\cos\theta - 1}{x^2}\right)^{\frac{q}{2}} \leqslant 1 - \frac{q}{2}\,\frac{2x\cos\theta - 1}{x^2}.$$

Поэтому для всех $x > 0$

$$\left|1 + \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q + \left|1 - \frac{e^{i\theta}}{x}\right|^q \leqslant 2 + \frac{q}{x^2}.$$

Применив эту оценку, получим при всех $x > 0$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|x + e^{i\theta}\right|^q d\theta \leqslant \pi x^q \left(2 + \frac{q}{x^2}\right).$$

Отсюда следует, что при $x \geqslant 1$

$$B_\psi(x) \leqslant \frac{x^q}{2}\left(2 + \frac{q}{x^2}\right) = x^q + \frac{q}{2}x^{q-2} \leqslant \psi(x) + \frac{q}{2}.$$

Заметив еще, что $B_\psi(x) \leqslant 2^q$ при всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, получим окончательно, что при всех $x > 0$

$$B_\psi(x) \leqslant \psi(x) + 2^q. \ \triangleright$$

Из лемм 2 и 3 следует такой результат.

Лемма 4. *Для любого пространства $X = F_\alpha^{p,q}$ с $0 < q \leqslant 2$ имеем*

$$\|\delta_z\|^* \leqslant Ae^{\frac{\alpha|z|^q}{q}} \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}), \tag{8}$$

где A — некоторая постоянная.

Как уже отмечалось выше, при $q = 2$ в (8) при $A = 1$ имеет место знак равенства. Нам неизвестно, выполняется ли оценка вида $\|\delta_z\|^* \geqslant ae^{\frac{\alpha|z|^q}{q}}$ при некотором $a > 0$ и всех $z \in \mathbb{C}$ для каких-либо $0 < q < 2$. Поэтому при $0 < q < 2$ лемма 4 позволяет нам сформулировать лишь достаточные условия непрерывности классических операторов в $F_\alpha^{p,q}$, вытекающие из предложения 5 и леммы 4.

Предложение 6. *Пусть v — произвольный вес в $\mathbb{C}$, u и φ — целые функции, $\alpha > 0$, $p \in [1, \infty)$ и $0 < q \leqslant 2$. Для того чтобы оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : F_\alpha^{p,q} \to H_v(\mathbb{C})$ был ограничен, достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|u(z)|\, e^{\alpha\frac{|\varphi(z)|^q}{p}}}{v(z)} < \infty.$$

Теперь мы займемся вопросом о непрерывности оператора Вольтерра в пространствах Фока и покажем, что для достаточно широкого класса весов ψ, введенного в работе [8], для соответствующих пространств F_p^ψ имеют место аналоги результатов, установленных в п. 2.1 в случае круга.

Условимся о следующем обозначении. Пусть E, F — две вещественнозначные функции, заданные на множестве D произвольной природы. Будем писать, что $E(x) \simeq F(x)$, $x \in D$, если существуют такие положительные постоянные c и C, что $cE(x) \leqslant F(x) \leqslant CE(x)$ для всех $x \in D$.

Обозначим через T семейство всех дифференцируемых функций $\tau : [0, \infty) \to (0, \infty)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\lim\limits_{r\to\infty} \tau(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r) = 0$;

(b) либо при некотором $C > 0$ функция $\tau(r)\, r^C$ возрастает, либо $\lim\limits_{r\to\infty} \tau'(r) \ln \frac{1}{\tau(r)} = 0$.

Пусть, далее, $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — возрастающая функция класса C^2 на $[0, \infty)$. Продолжим ее на всю комплексную плоскость, положив $\psi(z) := \psi(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, и предположим, что лапласиан $\Delta\psi$ положителен в $\mathbb{C}$ и, более того, что существует такая функция

$\tau \in T$, что $(\Delta\psi(z))^{-\frac{1}{2}} \simeq \tau(|z|)$, $|z| \geqslant 1$. Следуя [8], обозначим символом $\mathscr{I}$ класс всех функций ψ, обладающих указанными свойствами. В [8] отмечено, что в этот класс входят следующие функции: r^α, $\alpha > 2$; $e^{\beta r}$, $\beta > 0$; e^{e^r}.

Следующая лемма вытекает из [9, следствие 3.3] (см. также [10, лемма 2.1]).

Лемма 5. *Предположим, что $\psi \in \mathscr{I}$, и положим $\phi(r) := \psi(r)+\ln(1+\psi'(r))$, $r \in [0,\infty)$. Целая функция f принадлежит пространству F^ψ_∞ в том и только в том случае, когда f' принадлежит пространству F^ϕ_∞. При этом*

$$\|f\|_{F^\psi_\infty} \simeq |f(0)| + \|f'\|_{F^\phi_\infty}, \quad f \in F^\psi_\infty.$$

С помощью этой леммы аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 6. *Пусть ψ и ϕ — те же весовые функции, что и в лемме 5. Тогда оператор дифференцирования $D : f \mapsto f'$ является изоморфизмом из $F^\psi_{\infty,0}$ на F^ϕ_∞, где $F^\psi_{\infty,0} := \{f \in F^\psi_\infty :\ f(0) = 0\}$.*

Из предложения 3 и леммы 6 следует непосредственно

Предложение 7. *Пусть $\psi \in \mathscr{I}$. Оператор Вольтерра $T_g : X \to F^\psi_\infty$ ограничен тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)|\,\|\delta_z\|^*}{(1+\psi'(|z|))\,e^{\psi(z)}} < \infty.$$

Заметим, что предложение 7 в качестве частных случаев содержит результаты работы [10] об ограниченности оператора Вольтерра $V_g : F^\psi_p \to F^\psi_\infty$ для $\psi \in \mathscr{I}$ и $0 < p \leqslant \infty$. Из него также можно легко получить аналогичные критерии ограниченности для $V_g : F^{\psi_1}_p \to F^{\psi_2}_\infty$ в случае двух весов ψ_1 и ψ_2 из $\mathscr{I}$. Более того, полученные в данном разделе результаты позволяют исследовать и ситуацию, когда ψ_1 не обязательно содержится в $\mathscr{I}$. Именно, легко убедиться, что при $0 < q \leqslant 2$ вес $\frac{\alpha p}{q}|z|^q$ не входит в класс $\mathscr{I}$ и к нему неприменимы результаты из [8, 10]. Однако, предложение 7 и лемма 4 влекут такой результат.

Предложение 8. *Пусть $\psi \in \mathscr{I}$, $\alpha > 0$, $p \in [1,\infty)$ и $0 < q \leqslant 2$. Для того чтобы оператор Вольтерра $V_g : F^{p,q}_\alpha \to F^\psi_\infty$ был ограничен, достаточно, а если $q = 2$, то и необходимо, чтобы*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g'(z)|\,e^{\frac{\alpha}{q}|z|^q-\psi(z)}}{1+\psi'(|z|)} < \infty.$$

Благодарность. Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Г. Г. Брайчеву за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

Литература

1. *Tien P. T.* Translation operators on weighted spaces of entire functions // Proc. Am. Math. Soc.—2017.—Vol. 145, № 2.—P. 805–815. DOI: 10.1090/proc/13254.
2. *Abanin A. V., Tien P. T.* Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 89, № 3.—P. 409–438. DOI: 10.1007/s00020-017-2401-y.
3. *Zorboska N.* Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 87, № 4.—P. 581–600. DOI: 10.1007/s00020-017-2361-2.
4. *Bierstedt K. D., Bonet J., Taskinen J.* Associated weights and spaces of holomorphic functions // Studia Math.—1998.—Vol. 127, № 2.—P. 137–168. DOI: 10.4064/sm-127-2-137-168.
5. *Abanin A. V., Tien P. T.* Differentiation and integration operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Math. Nachr.—2017.—Vol. 290, № 8–9.—P. 1144–1162. DOI: 10.1002/mana.201500405.

6. *Zhu K.* Analysis on Fock Spaces. Graduate Texts in Mathematics, 263.—New York: Springer, 2012.—346 p.
7. *Баладай Р. А., Хабибуллин Б. Н.* От интегральных оценок функций к равномерным и локально усредненным // Изв. вузов. Матем.—2017.—№ 10.—С. 15–25.
8. *Constantin O., Peláez J. A.* Integral operators, embedding theorems and a Littlewood–Paley formula on weighted Fock spaces // J. Geom. Anal.—2016.—Vol. 26, № 2.—P. 1109–1154. DOI: 10.1007/s12220-015-9585-7.
9. *Bonet J., Taskinen J.* A note about Volterra operators on weighted Banach spaces of entire functions // Math. Nachr.—2015.—Vol. 288, № 11–12.—P. 1216–1225. DOI: 10.1002/mana.201400099.
10. *Mengestie T., Ueki S.-I.* Integral, differential and multiplication operators on generalized Fock spaces // Complex Anal. Oper. Theory.—2019.—Vol. 13, № 3.—P. 935–953. DOI: 10.1007/s11785-018-0820-7.

Статья поступила 25 мая 2020 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
заведующий отделом математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: avabanin@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-4507-4508;

Кораблина Юлия Викторовна
Южный федеральный университет, *магистрант*
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
младший научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: anaconda210150@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-9252-4765

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 5–17

BOUNDEDNESS OF CLASSICAL OPERATORS IN WEIGHTED SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

Abanin, A. V.[1,2] and Korablina, Yu. V.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: avabanin@sfedu.ru, anaconda210150@mail.ru

Abstract. We establish some criteria of the boundedness for some classical operators acting from an abstract Banach space of holomorphic functions in a complex domain to a weighted space of the same functions equipped with sup-norm. It is presented a further development of Zorboska's idea that conditions of the boundedness of weighted composition operators including multiplication and usual composition ones and Volterra operator can be formulated in terms of δ-functions norms in the corresponding dual spaces. As a consequence we obtain criteria of the boundedness of the above mentioned operators on generalized Bergman and Fock spaces. In particular cases it is possible to state these criteria in terms of weights defining spaces and functions giving the composition operator. In comparison with the previous results we essentially extend the class of weighted holomorphic spaces in the unit disc that admits a realization of Zorboska's method.

In addition, we develop an extension of this approach to weighted spaces of entire functions. In this relation we introduce the class of almost harmonic weights and obtain some estimates of δ-functions norms in spaces dual to the generalized Fock spaces giving by almost harmonic weights.

Key words: weighted spaces of holomorphic functions, weighted composition operator, Volterra operator, Bergman spaces, Fock spaces.

Mathematical Subject Classification (2010): 47B38, 46E15, 30H20.

For citation: *Abanin, A. V. and Korablina, Yu. V.* Boundedness of Classical Operators in Weighted Spaces of Holomorphic Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 5–17 (in Russian). DOI: 10.46698/u5398-4279-7225-c.

References

1. *Tien, P. T.* Translation Operators on Weighted Spaces of Entire Functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2017, vol. 145, no. 2, pp. 805–815. DOI: 10.1090/proc/13254.
2. *Abanin, A. V. and Tien, P. T.* Invariant Subspaces for Classical Operators on Weighted Spaces of Holomorphic Functions, *Integral Equations and Operator Theory*, 2017, vol. 89, no. 3, pp. 409–438. DOI: 10.1007/s00020-017-2401-y.
3. *Zorboska, N.* Intrinsic Operators from Holomorphic Function Spaces to Growth Spaces, *Integral Equations and Operator Theory*, 2017, vol. 87, no. 4, pp. 581–600. DOI: 10.1007/s00020-017-2361-2.
4. *Bierstedt, K. D., Bonet, J. and Taskinen, J.* Associated Weights and Spaces of Holomorphic Functions, *Studia Mathematica*, 1998, vol. 127, no. 2, pp. 137–168. DOI: 10.4064/sm-127-2-137-168.
5. *Abanin, A. V. and Tien, P. T.* Differentiation and Integration Operators on Weighted Banach Spaces of Holomorphic Functions, *Mathematische Nachrichten*, 2017, vol. 290, no. 8–9, pp. 1144–1162. DOI: 10.1002/mana.201500405.
6. *Zhu, K. Analysis on Fock Spaces. Graduate Texts in Mathematics*, 263, New York, Springer, 2012, 346 p.
7. *Baladai, R. A. and Khabibullin, B. N.* From Integral Estimates of Functions to Uniform and Locally Averaged Ones, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, pp. 11–20. DOI: 10.3103/S1066369X17100036.
8. *Constantin, O. and Peláez, J. A.* Integral Operators, Embedding Theorems and a Littlewood–Paley Formula on Weighted Fock Spaces, *The Journal of Geometric Analysis*, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 1109–1154. DOI: 10.1007/s12220-015-9585-7.
9. *Bonet, J. and Taskinen J.* A Note about Volterra Operators on Weighted Banach Spaces of Entire Functions, *Mathematische Nachrichten*, 2015, vol. 288, no. 11–12, pp. 1216–1225. DOI: 10.1002/mana.201400099.
10. *Mengestie, T. and Ueki, S.-I.* Integral, Differential and Multiplication Operators on Generalized Fock Spaces, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2019, vol. 13, no. 3, pp. 935–953. DOI: 10.1007/s11785-018-0820-7.

Received May 25, 2020

Alexander V. Abanin
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis and Geometry;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis
E-mail: avabanin@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-4507-4508;

Julia V. Korablina
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Undergraduate;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Junior Researcher in the Department of Mathematical Analysis
E-mail: anaconda210150@mail.ru
https://orcid.org/0000-0001-9252-4765