Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 58–71

УДК 517.53
DOI 10.46698/g8728-5783-4755-h

КРИТЕРИЙ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ ТИПА САЛИНАСА-КОРЕНБЛЮМА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ[#]

Р. А. Гайсин[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru

Девяностолетию Юрия Фёдоровича Коробейника посвящается

Аннотация. Как известно, проблема квазианалитичности класса $C_I(M_n)$ для отрезка I решается теоремой Данжуа-Карлемана. Как следует из хорошо известного примера Д. Е. Меньшова, не только эта теорема, но и сама постановка задачи квазианалитичности класса $C_K(M_n)$ не распространяется на случай произвольного континуума K комплексной плоскости. Рядом авторов проблема квазианалитичности изучалась для жордановых областей и спрямляемых (в частности, квазигладких) дуг. В настоящей статье обсуждаются теоремы типа Данжуа-Карлемана в выпуклых областях комплексной плоскости, а именно связь между критериями квазианалитичности Р. С. Юлмухаметова класса Карлемана $H(D, M_n)$ для произвольной выпуклой области D и Р. Салинаса класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$ для угла $\Delta_\alpha = \{z : |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1\}$. Проблема квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ заключается в следующем: найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять последовательность $\{M_n\}$ и точка $z_0 \in \partial D$ для того, чтобы класс $H(D, M_n)$ был квазианалитическим в данной точке. В терминах специального интегрального условия, характеризующего степень близости границ области D и угла Δ_α в окрестности начала координат получен ответ на вопрос об одновременной квазианалитичности или неквазианалитичности этих классов Карлемана в точке $z = 0$. Приводятся геометрическая интерпретация данного интегрального условия и конкретные примеры, показывающие существенность этого условия.

Ключевые слова: класс Карлемана, выпуклая область, критерий Салинаса, интегральное условие локальной близости границ.

Mathematical Subject Classification (2000): 30D60.

Образец цитирования: *Гайсин Р. А.* Критерий квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для выпуклых областей // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 58–71.
DOI: 10.46698/g8728-5783-4755-h.

Пусть D — произвольная выпуклая область комплексной плоскости $\mathbb{C}$,

$$H(D, M_n) = \left\{ f:\ f \in H(D),\ \sup_{z\in D} |f^{(n)}(z)| \leqslant a_f A_f^n M_n,\ n \geqslant 0 \right\}$$

— класс Карлемана. Предполагаем, что $M_0 > 0$. Тогда функции $f(z) \equiv \mathrm{const}$ принадлежат любому классу $H(D, M_n)$. Если кроме них данный класс не содержит ни одной функции, он называется тривиальным. Например, если D — вся конечная плоскость $\mathbb{C}$, то любой класс $H(D, M_n)$, очевидно, тривиален (теорема Лиувилля). В другом крайнем случае, когда D — ограниченное множество, необходимым и достаточным условием нетривиальности класса $H(D, M_n)$ является требование $M_1 > 0$.

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00095 А.

Всякая выпуклая область D обладает следующим важным свойством: все производные $f^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ функции $f \in H(D, M_n)$ непрерывно продолжаются до границы ∂D. Исходя из этого, класс Карлемана $H(D, M_n)$ называют *квазианалитическим в точке* $z_0 \in \partial D$, если в данном классе нет отличной от тождественного нуля функции f такой, что $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \geqslant 0)$, где $f^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ — производные, непрерывно продолженные до границы ∂D. Это определение распространяется на любую жорданову область, а также на континуумы, в том числе и без внутренних точек, например, на спрямляемые жордановы дуги.

Проблема квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ заключается в следующем: найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять последовательность $\{M_n\}$ и точка $z_0 \in \partial D$ для того, чтобы класс $H(D, M_n)$ был квазианалитическим в данной точке.

Как известно, проблема квазианалитичности класса

$$C_I(M_n) = \left\{ f : \ f \in C^\infty(I), \ \max_{x \in I} |f^{(n)}(x)| \leqslant a_f A_f^n M_n, \ n \geqslant 0 \right\}$$

для отрезка $I = [0, 1]$ решается теоремой Данжуа-Карлемана [1]. Однако следует заметить, что с отрезка I на случай произвольного континуума $K \subset \mathbb{C}$ не распространяется не только теорема Данжуа-Карлемана, но и сама постановка задачи о квазианалитичности класса $C_K(M_n)$. Это следует, например, из построенного Д. Е. Меньшовым примера жордановой неспрямляемой дуги $\gamma \subset \mathbb{C}$ и функции f, непрерывной и строго возрастающей на этой дуге и имеющей всюду на ней производную $f'(z) \equiv 0$. Этот пример указывает на то, что на неспрямляемой жордановой кривой, вообще говоря, невозможно восстановить функцию по ее производной. Этот же пример показывает, что квазианалитические классы Данжуа-Карлемана на таких кривых, вообще говоря, невозможны (см. [2]).

Проблема квазианалитичности в жордановых областях и спрямляемых дугах, в частности, квазигладких, изучалась в [3]. Случай выпуклых и жордановых областей ранее рассматривался в работах [4–6]. Так, Р. С. Юлмухаметовым в [5] был установлен критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ для произвольной выпуклой области D.

Цель настоящей работы — указать связь этого результата с теоремой Р. Салинаса о квазианалитичности класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$ в точке $z = 0$ для угла

$$\Delta_\alpha = \left\{ z : \ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha, \ 0 < \alpha \leqslant 1 \right\}.$$

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, лежащая в правой полуплоскости $\Pi_0 = \{z = x + iy : x > 0\}$, $0 \in \partial D$, а Δ_α — наименьший угол, в котором содержится эта область.

Введем на ∂D натуральную параметризацию $z = z(s)$, $0 \leqslant s < S_0$, где $S_0 = |\partial D|$ — общая длина границы области D (за положительное направление считается обход границы против часовой стрелки). Таким образом, длина дуги границы от точки $z = 0$ до точки $z(s)$ в положительном направлении равна s. Через $\beta(s)$ обозначим величину угла между касательными в точках границы, равноудаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s (при $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$ вершина этого угла либо совпадает с точкой $z = 0$, либо лежит в левой полуплоскости). Касательные существуют всюду, кроме не более чем счетного множества угловых точек. В угловых точках рассматриваем правосторонние касательные в указанных точках, понимаемые соответствующим образом. Тогда функция $\beta(s)$ — неубывающая, $\lim_{s \to 0} \beta(s) = \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть D — выпуклая, необязательно ограниченная область, $z_0 \in \partial D$,*

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{M_n}$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$, $0 < M_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Через $\beta(z_0, s)$ обозначим величину угла между касательными к границе ∂D, проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s. Положим*

$$R(z_0, s) = \exp\left[\int\limits_s^{\varepsilon} \frac{\pi + \beta(z_0, x)}{\beta(z_0, x)} \frac{dx}{x}\right], \quad 0 < s \leqslant \varepsilon.$$

Тогда условие

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2 R^{-1}(z_0, r)}\, dr = \infty \qquad (1)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы класс $H(D, M_n)$ был квазианалитическим в точке z_0.

Здесь $s = R^{-1}(z_0, r)$ — функция, обратная к $r = R(z_0, s)$.

Наша задача — выяснить, в каком случае условие (1) равносильно критерию квазианалитичности Р. Салинаса класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$ в точке $z = 0$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}\, dr = \infty. \qquad (2)$$

1. Предварительные сведения. Постановка задачи

Введем необходимые обозначения. В рассматриваемом здесь случае $z_0 = 0$, поэтому обозначим, для простоты, $R(s) = R(0, s)$, $R^{-1}(r) = R^{-1}(0, r)$, $\beta(s) = \beta(0, s)$. Тогда для угла Δ_α имеем

$$\frac{\pi + \beta(s)}{\beta(s)} = \frac{1+\alpha}{\alpha} + \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{\alpha\beta(s)} = \frac{1+\alpha}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} a(s),$$

где

$$a(s) = \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{\beta(s)}.$$

Ясно, что функция $a(s)$ невозрастающая, $a(s) \to 0$ при $s \to 0$. Тогда

$$R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \exp\left(\frac{1}{\alpha} A(s)\right),$$

где

$$A(s) = \int\limits_s^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx$$

* Односторонними, где обычные касательные не существуют.

— величина, характеризующая асимптотическую близость границы ∂D к $\partial\Delta_\alpha$ при $s \to 0$. Полагая
$$R_0(s) = e^{\frac{1}{\alpha}A(s)},$$
имеем
$$R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} R_0(s), \quad 0 < s \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Функция $R_0(s)$ монотонно возрастающая. Она обладает следующими свойствами:

1) $R_0(s)$ — медленно меняющаяся (в смысле Караматы) в нуле функция (см. [7, с. 10]), т. е.
$$\lim_{s\to 0} \frac{R_0(s)}{R_0(2s)} = 1; \tag{4}$$

2) если функция $R_0(s)$ дифференцируемая, то справедливо равенство*
$$\lim_{s\to 0} \frac{sR_0'(s)}{R_0(s)} = 0;$$

3) верно соотношение
$$\lim_{s\to 0} \frac{\ln R_0(s)}{\ln \frac{1}{s}} = 0. \tag{5}$$

Докажем свойство 1). Очевидно,
$$\frac{R_0(s)}{R_0(2s)} > 1.$$
Так как функция $a(x)$ монотонна, $a(x) \to 0$ при $x \to 0$, то для всякого $\delta > 0$ существует $s_0(\delta)$ такое, что при $s < s_0(\delta)$ будет выполняться оценка
$$a(2s) < \frac{\alpha}{\ln 2}\delta.$$

Следовательно,
$$1 < \frac{R_0(s)}{R_0(2s)} \leqslant \exp\left[\frac{1}{\alpha}\int_s^{2s} \frac{a(x)}{x}\,dx\right] < e^\delta.$$
Поскольку $\delta > 0$ — любое, то равенство (4) действительно имеет место.

Для доказательства свойства 2) рассмотрим равенство
$$\ln R_0(s) = \frac{1}{\alpha}\int_s^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\,dx.$$
Отсюда имеем
$$\frac{R_0'(s)}{R_0(s)} = -\frac{1}{\alpha}\frac{a(s)}{s}.$$
Поскольку $a(s) \to 0$ при $s \to 0$, то и
$$\lim_{s\to 0} \frac{sR_0'(s)}{R_0(s)} = 0.$$

* Условия 1) и 2) для дифференцируемых функций равносильны (см. [7, с. 15]).

Равенство (5) есть простое следствие свойства 2), если функция $R_0(s)$ дифференцируема, а $\lim_{s\to 0} A(s) = \infty$. В противном случае, поскольку $a(s) \to 0$ при $s \to 0$, для всякого $\delta > 0$ существует $s_0(\delta)$ такое, что $a(s) < \frac{\delta}{2}\alpha$ при $s < s_0(\delta)$. Тогда

$$\ln R_0(s) < \frac{\delta}{2} \ln \frac{s_0}{s} + \frac{1}{\alpha} \int\limits_{s_0}^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx < \delta \ln \frac{1}{s}$$

при $s < s_1 < s_0(\delta)$, т. е. выполняется равенство (5).

Пусть $r = R(s)$, где функция $R(s)$ имеет вид (3). Поскольку функция $r = R(s)$ непрерывная и возрастающая, то существует обратная функция

$$s = s(r) = R^{-1}(r) = \varepsilon r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} e^{\frac{1}{1+\alpha} A(s)}. \tag{6}$$

Обозначим

$$K(r) = e^{\frac{1}{1+\alpha} A(s(r))} = \exp\left(\frac{1}{1+\alpha} \int\limits_{s(r)}^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx \right),$$

где

$$A(s) = \int\limits_{s}^{\varepsilon} \frac{a(x)}{x}\, dx.$$

Учитывая это, интеграл (1) перепишем в виде

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2 R^{-1}(r)}\, dr = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} K(r)}\, dr.$$

Таким образом, учитывая теорему 1, заключаем, что класс $H(D, M_n)$ квазианалитичен в точке $z = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} K(r)}\, dr = \infty, \tag{7}$$

где

$$K(r) = \exp\left(\frac{1}{1+\alpha} A(s(r)) \right),$$

$s = s(r)$ — функция, определенная формулой (6), $A(s)$ — интегральная характеристика асимптотической близости границ $\partial\Delta_\alpha$ и ∂D при $s \to 0$.

Если $D = \Delta_\alpha$, то $\beta(s) \equiv \pi\alpha$ и $K(r) \equiv 1$. Если часть границы ∂D есть отрезок $[-\tau i, \tau i]$, то опять $K(r) \equiv 1$, а $\alpha = 1$. В этом случае критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z = 0$ совпадает с критерием Б. И. Коренблюма для круга (или Р. Салинаса для полуплоскости $\Delta_1 = \Pi_0$):

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{3}{2}}}\, dr = \infty.$$

Таким образом, классы $H(D, M_n)$ и $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичны или неквазианалитичны в точке $z = 0$ одновременно в том и только в том случае, когда расходятся или сходятся одновременно интегралы (2) и (7).

Далее имеем $1 \leqslant K(r) = e^{\frac{1}{1+\alpha} A(s(r))}$. Если $\sup_{0<s\leqslant\varepsilon} A(s) = \lim_{s\to 0} A(s) = A < \infty$, то интегралы (2) и (7) равносходятся. Значит, как показано в [3], классы $H(D, M_n)$ и $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичны или неквазианалитичны в точке $z = 0$ одновременно.

В случае, когда интеграл (2) расходится, а интеграл (7) сходится (т. е. когда класс $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичен, а $H(D, M_n)$ — нет), необходимо

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x}\, dx = \infty. \tag{8}$$

В этой ситуации $1 \leqslant K(r) \uparrow \infty$ при $r \to \infty$. Возникает следующий вопрос: что можно утверждать о квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке $z = 0$, если интегралы (2) и (8) расходятся?

Покажем, что интеграл (7) при этом может как сходиться, так и расходиться — все зависит от конкретной функции $K(r) \uparrow \infty$ при $r \to \infty$, от последовательности $\{M_n\}$ и от области D.

2. Существенность интегрального условия $A < \infty$

Приведем конкретные примеры. Для этого рассмотрим функцию $M(r) = e^{m(r)}$, где

$$m(r) = \frac{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}{r \ln^\nu r}, \quad r > 1,\ 0 < \nu < 1,$$

причем $\nu + \frac{\alpha}{1+\alpha} > 1$ (например, можно взять $\nu = \frac{1}{\frac{\alpha}{2}+1}$). Легко проверяется, что функция $y = \ln M(e^x) = m(e^x)$ выпукла и возрастает при $x \geqslant x_0$ (это проверяется дифференцированием: $0 < y'(x) \uparrow \infty$ при $x \geqslant x_0$). Положим

$$T_0(e^x) = e^{m_0(e^x)},$$

где

$$m_0(e^x) = \begin{cases} m(e^x), & \text{если } x \geqslant x_0; \\ \frac{m(e^{x_0})}{e^{x_0}} e^x, & \text{если } 0 \leqslant x < x_0. \end{cases}$$

Выберем x_0 достаточно большим. Тогда функция $\ln T_0(e^x) = m_0(e^x)$ будет выпуклой и возрастающей при $x > 0$. Положим теперь

$$M_n^c = \sup_{r \geqslant 1} \frac{r^n}{T_0(r)}, \quad n \geqslant 0, \qquad T_c(r) = \sup_{n \geqslant 0} \frac{r^n}{M_n^c}.$$

Непосредственно проверяется, что последовательность $\{M_n^c\}$ логарифмически выпукла. Напомним также, что функция $T_c(r)$ называется функцией следа для последовательности $\{M_n^c\}$, причем $T_c(r) = T(r)$. Здесь $T(r)$ — функция следа любой последовательности $\{M_n\}$, для которой $\{M_n^c\}$ является ее выпуклой регуляризацией посредством логарифмов.

Далее нам понадобятся следующие леммы о свойствах преобразования Юнга — Фенхеля (см. [8]).

Лемма 1. *Пусть функция $\varphi(x)$ определена при $x > 0$ и $\frac{\varphi(x)}{x} \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Тогда двойственная по Юнгу функция*

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = \sup_{x>0}(x\xi - \varphi(x))$$

выпукла вниз при $\xi > 0$ и $\frac{\widetilde{\varphi}(\xi)}{\xi} \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$.

Лемма 2. *Функция $\tilde{\widetilde{\varphi}}(x)$ совпадает с функцией $\varphi^*(x)$ — наибольшей выпуклой функцией, не превосходящей $\varphi(x)$. В частности, если $\varphi(x)$ выпукла вниз, то $\tilde{\widetilde{\varphi}}(x) \equiv \varphi(x)$.*

Отметим, что логарифмическая выпуклость последовательности $\{M_n^c\}$ вытекает и из леммы 1. Действительно, имеем

$$M_n^c = \exp\left[\sup_{r\geqslant 1}(n\ln r - \ln T_0(r))\right] = \exp\left[\sup_{x>0}(nx - \ln T_0(e^x))\right],$$

где $\varphi(x) = \ln T_0(e^x)$, очевидно, удовлетворяет условиям леммы 1. Значит, по этой лемме, $\widetilde{\varphi}(y)$ — выпуклая функция, в частности, $\ln M_n^c = \widetilde{\varphi}(n)$ — выпуклая последовательность чисел, т. е.

$$(M_n^c)^2 \leqslant M_{n-1}^c M_{n+1}^c, \quad n \geqslant 1.$$

С другой стороны, поскольку функция $\varphi(x) = \ln T_0(e^x)$ выпукла, то, по лемме 2,

$$\ln T_0(e^\xi) = \sup_{x>0}\big[x\xi - \widetilde{\varphi}(x)\big].$$

Следовательно,

$$\ln T_0(e^\xi) = \sup_{n\geqslant 0}\sup_{n\leqslant x<n+1}[x\xi - \widetilde{\varphi}(x)] \leqslant \xi + \sup_{n\geqslant 0}[n\xi - \widetilde{\varphi}(n)] = \xi + \ln T_c(e^\xi).$$

Далее, очевидно, что $\ln T_0(e^\xi) \geqslant \ln T_c(e^\xi)$. Так что

$$T_c(r) \leqslant T_0(r) \leqslant rT_c(r).$$

Этими соотношениями мы воспользуемся в рассматриваемых ниже примерах.

Приведем теперь соответствующие примеры.

Пример 1. Возьмем

$$a(x) = \frac{\pi\alpha - \beta(x)}{\beta(x)} = \alpha\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\alpha}A(s) = \frac{1}{\alpha}\int_s^\varepsilon \frac{a(x)}{x}\,dx = \int_s^\varepsilon \frac{dx}{x\ln\frac{1}{x}} = -\int_s^\varepsilon \frac{d\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{1}{x}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\alpha}A(s) = \ln\ln\frac{1}{s} - \ln\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$r = R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\exp\left(\frac{1}{\alpha}A(s)\right) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\frac{\ln\frac{1}{s}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Далее, так как $K(r) = \exp\left(\frac{1}{1+\alpha}A(s(r))\right)$, то

$$r^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\varepsilon}{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\varepsilon}{s(r)}K(r). \tag{9}$$

Но

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\ln r = \ln\frac{\varepsilon}{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} + \ln\frac{1}{s} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\ln\ln\frac{1}{s},$$

т. е. при $s \to 0$

$$\ln\frac{1}{s} = (1+o(1))\frac{\alpha}{1+\alpha}\ln r. \tag{10}$$

Так что из (9), (10) при $r \to \infty$ получаем

$$s = s(r) = \frac{\varepsilon}{\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}(1+o(1))\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда при $r \to \infty$

$$s(r) = C_{\varepsilon,\alpha}(1+o(1))r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}(\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Таким образом, так как $0 < \nu < 1$,

$$\int_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}\, dr = \int_2^\infty \frac{dr}{r\ln^\nu r} = \infty.$$

С другой стороны, поскольку $\nu + \frac{\alpha}{1+\alpha} > 1$, то как видно из (9) и асимптотики $s(r)$,

$$\int_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^2 R^{-1}(r)}\, dr = \int_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} K(r)}\, dr \leqslant A_{\varepsilon,\alpha}\int_2^\infty \frac{dr}{r(\ln r)^{\nu+\frac{\alpha}{1+\alpha}}} < \infty.$$

Так как $T(r) = T_c(r) \leqslant T_0(r)$, то и интеграл (1) сходится.

Пример 2. Возьмем

$$a(x) = \alpha\frac{1}{\ln\frac{1}{x}\ln\ln\frac{1}{x}}, \quad 0 < x \leqslant \varepsilon.$$

Тогда

$$\frac{1}{\alpha}A(s) = \int_s^\varepsilon \frac{dx}{x\ln\frac{1}{x}\ln\ln\frac{1}{x}} = -\int_s^\varepsilon \frac{d\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{1}{x}\ln\ln\frac{1}{x}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{\alpha}A(s) = \ln\ln\ln\frac{1}{s} - \ln\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Значит,

$$R_0(s) = e^{\frac{1}{\alpha}A(s)} = \frac{\ln\ln\frac{1}{s}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}},$$

а поскольку $R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} R_0(s)$, $0 < s \leqslant \varepsilon$, то

$$r = R(s) = \left(\frac{\varepsilon}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\frac{\ln\ln\frac{1}{s}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}}. \tag{11}$$

Но

$$\ln r = \ln\frac{\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1+\alpha}{\alpha}\ln\frac{1}{s} + \ln\ln\ln\frac{1}{s},$$

или при $s \to 0$

$$\ln r = (1+o(1))\frac{1+\alpha}{\alpha}\ln\frac{1}{s}.$$

Далее, при $s \to 0$

$$\ln\ln r = \ln\frac{1+\alpha}{\alpha} + \ln\ln\frac{1}{s} + o(1).$$

Это означает, что при $r \to \infty$

$$\ln\ln\frac{1}{s} = (1+o(1))\ln\ln r.$$

Таким образом, из (11) при $r \to \infty$ будем иметь

$$r = \frac{\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\ln\ln\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} (1+o(1)) \ln\ln r,$$

т. е. при $r \to \infty$

$$s(r) = B_{\varepsilon,\alpha}(1+o(1)) r^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} (\ln\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Поскольку $K(r) = \frac{s(r)}{\varepsilon} r^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, то

$$\int_2^\infty \frac{\ln T_0(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} K(r)}\, dr = \frac{\varepsilon}{B_{\varepsilon,\alpha}} \int_2^\infty \frac{dr}{(1+o(1)) r \ln^\nu r (\ln\ln r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} = \infty,$$

так как $0 < \nu < 1$. Значит, интеграл (1) тоже расходится, ибо $T_0(r) \leqslant rT_c(r)$, а $T_c(r) = T(r)$.

Примеры построены.

Полученное сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть*

$$A = \int_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x}\, dx, \quad a(s) = \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{\beta(s)}, \quad \pi\alpha = \lim_{s\to 0} \beta(s), \quad \beta(s) = \beta(0, s).$$

Тогда

1°. *если $A < \infty$, то классы $H(D, M_n)$ и $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичны или неквазианалитичны в точке $z = 0$ одновременно;*

2°. *если интеграл (2) расходится, а интеграл (7) сходится, то $A = \infty$; из расходимости интеграла (7) вытекает расходимость интеграла (2);*

3°. *если $A = \infty$, интеграл (2) расходится, то интеграл (7) может как сходиться, так и расходиться, а именно: для выбранной специальным образом последовательности $\{M_n\}$ существуют выпуклые области D_1 и D_2, для которых интеграл (7) сходится и, соответственно, расходится.*

На Межвузовском научно-исследовательском семинаре по математике «Анализ и его приложения» (16 апреля 2019 г., г. Москва, МПГУ) В. Б. Шерстюковым был задан вопрос о точности интегрального условия $A < \infty$. Из п. 3° теоремы 2 видно, что это интегральное условие существенно: если $A = \infty$, то квазианалитичность класса $H(D, M_n)$ не равносильна квазианалитичности класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$.

3. Геометрическая интерпретация интегрального условия $A < \infty$

Приведем теперь геометрическую трактовку интегрального условия $A < \infty$.

Предположим, что граница выпуклой области D (расположенной в верхней полуплоскости) локально описывается некоторой функцией $y = f(x)$, причем $f(0) = 0$, и функция f дифференцируема в окрестности точки 0 ($|x| < \delta$) за исключением, быть может, точки 0. Тогда на интервалах $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$ производная функции f будет непрерывной (см. [9]). Пусть $\beta(s)$ — величина угла между касательными к границе области D, проведенными в точках, удаленных от точки O на длину дуги границы, равной s, а $x = x(s)$ и $\widetilde{x} = \widetilde{x}(s)$ — абсциссы этих точек. В этом случае $\lim_{s\to 0} \beta(s) = \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Пусть, далее, γ_1 и γ_2 — острые углы, которые образуют указанные касательные с осью Ox, а γ_0' и γ_0'' — предельные значения этих углов при $x \uparrow 0$ и $x \downarrow 0$ соответственно.

Длина дуги s и x, как известно, связаны соотношением

$$s(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt. \tag{12}$$

Так как функция $s(x)$ строго монотонна и непрерывна, то обратная функция $x(s)$ существует и непрерывна.

Имеем $\beta + \gamma_1 + \gamma_2 = \pi$, $\pi\alpha = \pi\alpha_1 + \pi\alpha_2$. Отсюда $\pi\alpha - \beta = \pi\alpha - \pi + \gamma_1 + \gamma_2 = \left(\pi\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\pi\alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_0' + \gamma_2 - \gamma_0''$. Тогда

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds = \int\limits_0^\varepsilon \frac{\gamma_1(\widetilde{x}(s)) - \gamma_0'}{s}\, ds + \int\limits_0^\varepsilon \frac{\gamma_2(x(s)) - \gamma_0''}{s}\, ds = I_1 + I_2.$$

По теореме о среднем значении при $x > 0$

$$\gamma_2(x) - \gamma_0'' = \operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f_+'(0) = \frac{1}{1 + c^2}\left[f'(x) - f_+'(0)\right],$$

где $f_+'(0) \leqslant c \leqslant f'(x)$. Так как $0 \leqslant f'(x) \leqslant M < \infty$ при $0 < x \leqslant \delta_0 < \delta$, то для таких x $\frac{1}{1+M^2} \leqslant \frac{1}{1+c^2(x)} \leqslant 1$. Интеграл I_2 сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_0^\varepsilon \frac{f'(x(s)) - f_+'(0)}{s}\, ds. \tag{13}$$

Но из формулы (12) следует, что

$$x \leqslant s(x) \leqslant \sqrt{1 + M^2}x, \tag{14}$$

где $0 \leqslant f'(x) \leqslant M$ при $0 < x \leqslant \delta_0$, $\delta_0 < \delta$. Полагая $s = s(x)$ и пользуясь соотношением $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$, оценками (14) и ограниченностью производной $f'(x)$, заключаем, что интеграл (13) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_0^{x_0''} \frac{f'(x) - f_+'(0)}{x}\, dx.$$

Аналогично интеграл I_1 сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_0^{x_0'} \frac{f_-'(0) - f'(x)}{x}\, dx.$$

Здесь $f_+'(0)$ и $f_-'(0)$ — правая и левая производные функции f в точке 0 соответственно (для выпуклой функции f они существуют в каждой точке интервала $(-\delta, \delta)$).

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть граница выпуклой области D в окрестности $(-\delta, \delta)$ задается некоторой функцией $y = f(x)$, причем f дифференцируема в данной окрестности, за исключением, быть может, точки $x = 0$, причем $f(0) = 0$. Пусть, далее, $\lim_{s\to 0} \beta(s) = \pi\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда интеграл A сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы*

$$\int\limits_0^{x_0''} \frac{f'(x) - f_+'(0)}{x}\, dx, \quad \int\limits_0^{x_0'} \frac{f_-'(0) - f'(x)}{x}\, dx. \tag{15}$$

Следствие. *Если функция f (при сделанных предположениях), описывающая границу выпуклой области D, является четной, то условие $A<\infty$ равносильно сходимости любого из интегралов в (15), поскольку в этом случае* $\operatorname{arctg} f'(x)-\operatorname{arctg} f'_+(0)=\operatorname{arctg} f'_-(0)-\operatorname{arctg} f'(x)$, *$0<|x|<\delta$. Если, кроме того, функция f дифференцируема и в точке $x=0$, то условие $A<\infty$ эквивалентно каждому из условий:*

$$\text{а)}\ \int_0^{x_0}\frac{f'(x)}{x}\,dx<\infty,\qquad \text{б)}\ \int_0^{x_0}\frac{f(x)}{x^2}\,dx<\infty.$$

Действительно, если четная функция f дифференцируема в точке 0, то $f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=0$, и мы получаем условие а). Так как $f(0)=0$ и $f'(0)=0$, то $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Интегрирование по частям, очевидно, дает условие б):

$$\int_0^{x_0}\frac{f'(x)}{x}\,dx=\lim_{\delta\to 0+}\frac{f(x)}{x}\Big|_{\delta}^{x_0}+\lim_{\delta\to 0+}\int_{\delta}^{x_0}\frac{f(x)}{x^2}\,dx=c+\int_0^{x_0}\frac{f(x)}{x^2}\,dx,$$

где $c=\frac{f(x_0)}{x_0}$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\ln(x+1)$. Функция φ является вогнутой, $\varphi(0)=0$. Симметрично отражая график функции $y=\varphi(x)$ относительно оси Ox, получим выпуклую область D. Проверяется, что $x(s)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}s$ при $s\to 0$. Так как $\beta(s)=2\operatorname{arctg}\frac{1}{x(s)+1}$, то $\lim_{s\to 0}\beta(s)=\frac{\pi}{2}$. Но поскольку $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg} t\sim 1-t$ при $t\nearrow 1$, то $\frac{\pi}{2}-\beta(s)\sim 1-\frac{1}{x(s)+1}\sim x(s)$ при $s\to 0$. Значит, интеграл

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{\frac{\pi}{2}-\beta(s)}{s}\,ds$$

сходится, поскольку в силу эквивалентности $x(s)\sim\frac{1}{\sqrt{2}}s$ при $s\to 0$, сходится интеграл

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{x(s)}{s}\,ds.$$

Таким образом, для данной области D условие $A<\infty$ выполняется. Отметим, что для данного примера точка $O\in\partial D$ не является точкой гладкости, так как угол между односторонними касательными в этой точке отличен от π.

Пример 4. Укажем другие классы выпуклых областей, для которых выполняется (или не выполняется) интегральное условие $A<\infty$.

Требуемые выпуклые области будут строиться как пересечение бесконечного числа полуплоскостей. Для этого возьмем последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ на вещественной оси, $x_k\downarrow 0$ (считаем, что $x_1=1$). Пусть $y=\varphi(x)$ — функция, заданная на отрезке $[0,1]$, линейная на $(x_{k+1},x_k]$, $\varphi(x_k)=y_k$ $(k\geqslant 1)$, $y_k\downarrow 0$ при $k\to\infty$, причем $\varphi(0)=0$. Симметрично отразив построенную ломаную относительно оси Ox, получим выпуклую область, обозначим ее через D.

Через l_k обозначим длину границы ∂D, заключенной в полосе $\{z:\ x_{k+1}\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant x_k\}$. Тогда

$$s_k=\sum_{n=k}^{\infty}l_n \tag{16}$$

— длина границы области, отсекаемой полосой $\{z : \ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_k\}$. Тогда при $s_{k+1} < s < s_k$ величина угла $\beta(s)$ (определение величины $\beta(s)$ см. выше) будет постоянной: $\frac{1}{2}\beta(s) \equiv \beta_k$, где β_k — угол наклона звена γ_k границы ∂D. Пусть $\lim_{k\to\infty}\beta_k = \frac{\pi\alpha}{2}$, $0 < \alpha < 1$. Положим теперь $x_k = \frac{1}{k}$, $k \geqslant 1$. Тогда, обозначая $\varepsilon_k = \frac{\pi\alpha}{2} - \beta_k$, имеем

$$y_k - y_{k+1} = (x_k - x_{k+1}) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon_k\right). \tag{17}$$

Так как $x_k - x_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$, $l_k^2 = (x_k - x_{k+1})^2 + (y_k - y_{k+1})^2$, то, учитывая (16), (17), получаем

$$s_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon_n\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим для удобства $\left[1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon_n)\right]^{\frac{1}{2}} = \alpha_n$. Тогда $\alpha_n \to C$ при $n \to \infty$, где $C = \frac{1}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$. Так как $|\alpha_n - C| < \delta$ для любого заданного $\delta > 0$ при $n > n_0(\delta)$, то, очевидно,

$$(C - \delta)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\alpha_n < (C + \delta)\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

если $k > n_0(\delta)$ (нас интересует поведение суммы s_k при достаточно больших k). Видим, что при $k \to \infty$

$$s_k \sim \frac{1}{\cos\frac{\pi\alpha}{2}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{18}$$

Имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{s_{k+1}}^{s_k} \frac{\varepsilon_k}{s}\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \ln\frac{s_k}{s_{k+1}}.$$

Интеграл

$$\int_0^1 \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds \tag{19}$$

сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_0^{s_1} \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{s}\, ds$, а значит, с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \ln\frac{s_k}{s_{k+1}}. \tag{20}$$

Но в силу (18), ряд (20) равносходится с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \ln\frac{T_k}{T_{k+1}},$$

где $T_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Так как, очевидно, $T_k = \frac{1}{k}$, $\ln\frac{T_k}{T_{k+1}} = \ln\frac{k+1}{k} \sim \frac{1}{k}$ при $k \to \infty$, то интеграл A сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k}. \tag{21}$$

Выбирая, например, $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $k \geqslant 1$, мы придем к сходящемуся ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, и условие $A < \infty$ в этом случае будет выполняться. Если положить $\varepsilon_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$, то ряд (21) расходится, тем самым и интеграл (19) тоже будет расходиться.

Благодарность. Автор признателен профессору Р. С. Юлмухаметову за постановку задач и рекомендации. Я также благодарен профессору А. М. Гайсину за указание на литературу и наводящие соображения, благодаря которым удалось осуществить новый, несколько иной подход к проблеме квазианалитичности для выпуклых областей.

Литература

1. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955.—268 с.
2. *Меньшов Д. Е.* Избранные труды: Математика.—М.: Факториал, 1997.—480 с.
3. *Гайсин Р. А.* Квазианалитичность классов Карлемена на континуумах комплексной плоскости. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—Уфа, 2019.—114 с.
4. *Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы функций в выпуклых областях // Мат. сб.—1986.—Т. 130, № 4.—С. 500–519. DOI: 10.1070/SM1987v058n02ABEH003117.
5. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций и применения. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук.—Уфа, 1986.—197 с.
6. *Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях // Алгебра и анализ.—2008.—Т. 20, № 2.—С. 178–217. DOI: 10.1090/S1061-0022-09-01048-6.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции.—М.: Наука, 1985.—144 с.
8. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции.—М.: Наука, 1979.—320 с.
9. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.—М.: Прометей, 2005.—232 с.

Статья поступила 9 мая 2020 г.

Гайсин Рашит Ахтярович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: rashit.gajsin@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 58–71

QUASIANALYTICITY CRITERION OF SALINAS-KORENBLYUM TYPE FOR CONVEX DOMAINS

Gaysin, R. A.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450077, Russia

E-mail: rashit.gajsin@mail.ru

Abstract. The quasianalyticity problem of the class $C_I(M_n)$ for interval I is known to be solved by the Denjoy-Carleman theorem. It follows from well-known Men'shov example that not only this theorem but the very statement of the quasianalyticity problem of the class $C_K(M_n)$ doesn't expand on the case of arbitrary continuum K of the complex plain. The quasianalyticity problem was studied for Jordan domains and rectifiable arcs including quasismooth arcs by a number of authors. We discuss in this article theorems of Denjoy-Carleman type in the convex domains of the complex plane, more precisely, connection between R. S. Yulmukhametov criterion of quasianalyticity of the Carleman class $H(D, M_n)$ for arbitrary convex domain D and R. Salinas criterion for the class $H(\Delta_\alpha, M_n)$ with angle $\Delta_\alpha = \{z : |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha,\ \ 0 < \alpha \leqslant 1\}$. The problem of quasianalyticity of the class $H(D, M_n)$ is to find necessary and sufficient conditions for sequence

M_n and point $z_0 \in \partial D$ for quasianalyticity of the class $H(D, M_n)$ at this point. The answer to question of simultaneous quasianalyticity or nonquasianalyticity these Carleman classes at a point $z = 0$ has been obtained in therms of special integral condition which characterizes the degree of proximity of the domain boundaries D and the angle Δ_α in the neighbourhood of origin. Geometric interpretation of this integral condition and explicit examples illustrating essentiality of this condition are given.

Key words: Carleman class, convex domain, Salinas criterion, integral condition of local aboutness of the boundaries.

Mathematical Subject Classification (2010): 30D60.

For citation: *Gaysin, R. A.* Quasianalyticity Criterion of Salinas-Korenblyum Type for Convex Domains, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 58–71 (in Russian). DOI: 10.46698/g8728-5783-4755-h.

References

1. *Mandelbrojt, S. Séries Adhérentes. Régularisation des Suites. Applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1952, 277 p.
2. *Men'shov, D. E. Izbrannye trudy: Matematika* [Selected Works: Mathematics], Moscow, Faktorial, 1997, 480 p.(in Russian).
3. *Gaysin, R. A. Kvazianalitichnost' klassov Karlemana na kontinuumakh kompleksnoy ploskosti. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* [Quasianalyticity of Carleman Classes on Continua of the Complex Plane. Dissertation in Support of Candidature for a Physico-mathematical Degree], Ufa, 2019, 114 p. (in Russian).
4. *Yulmukhametov, R. S.* Quasianalytical Classes of Functions in Convex Domains, *Math. USSR-Sb.*, 1987, vol. 58, no. 2, pp. 505–523. DOI: 10.1070/SM1987v058n02ABEH003117.
5. *Yulmukhametov, R. S. Approksimatsiya subgarmonicheskikh funktsiy i primeneniya. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk* [Approximation of Subharmonic Functions and Applications. Dissertation for a Doctor's of Physico-mathematical Degree], Ufa, 1986, 197 p. (in Russian).
6. *Trunov, K. V. and Yulmukhametov, R. S.* Quasianalytic Carleman Classes on Bounded Domains, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2009, vol. 20, no. 2, pp. 289–317. DOI: 10.1090/S1061-0022-09-01048-6.
7. *Seneta, E. Regularly Varying Functions*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1976, 113 p.
8. *Evgrafov, M. A. Asymptotic Estimates and Entire Functions*, Abingdon-on-Thames, Gordon and Breach Science Pub, 1962, 192 p.
9. *Braychev, G. G. Vvedenie v teoriyu rosta vypuklykh i tselykh funktsiy* [Introduction in Theory of Convex and Entire Functions], Moscow, Prometey, 2005, 232 p. (in Russian).

Received May 9, 2020

Rashit A. Gaysin
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Scientific Researcher
E-mail: `rashit.gajsin@mail.ru`