Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 72–84

УДК 517.982.3+517.983.2
DOI 10.46698/o8118-4952-7412-y

АЛГЕБРЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОБОБЩЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДЮАМЕЛЯ

О. А. Иванова[1], **С. Н. Мелихов**[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@sfedu.ru

Посвящается 90-летию Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Пусть Ω — односвязная область в комплексной плоскости, содержащая начало координат; $H(\Omega)$ — пространство Фреше всех голоморфных в Ω функций. Голоморфная в Ω функция g_0 такая, что $g_0(0) = 1$, задает линейный непрерывный в $H(\Omega)$ оператор Поммье. Он является одномерным возмущением оператора обратного сдвига и совпадает с ним, если g_0 является тождественной единицей. Его коммутант в кольце всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$ изоморфен алгебре, образованной сопряженным $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$ с умножением, определяемым операторами сдвига для оператора Поммье по правилу свертки. Показано, что эта алгебра является унитальной ассоциативной, коммутативной и топологической. Исследуются ее реализации, полученные с помощью преобразований Лапласа и Коши. Основное внимание уделено реализации посредством преобразования Лапласа. Оно приводит к изоморфной алгебре, образованной некоторым пространством P_Ω целых функций экспоненциального типа. Умножение $*$ в ней является обобщенным произведения Дюамеля. Если g_0 является тождественной единицей, то это умножение является обычным произведением Дюамеля. Обобщенное произведение Дюамеля задается операторами свертки, определяемыми посредством исходной функции g_0. В случае преобразования Коши (для функции g_0, равной тождественной единице) реализацией $H(\Omega)'$ является пространство ростков всех функций, голоморфных на дополнении Ω до расширенной комплексной плоскости и равных нулю в бесконечности, с умножением, противоположным обычному произведению функций и независимой переменной. Получено описание всех собственных замкнутых идеалов $(P_\Omega, *)$. Оно основывается на данном ранее авторами описании всех собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$. Множество всех собственных замкнутых идеалов $(P_\Omega, *)$ состоит из двух семейств. Одно содержит конечномерные идеалы, задаваемые подмножествами нулевого многообразия функции g_0. Другое содержит бесконечномерные идеалы, определяемые, в частности, конечным числом точек вне Ω. Ранее аналогичная задача была решена авторами в двойственной ситуации, именно, для алгебры ростков всех функций, голоморфных на выпуклом локально замкнутом множестве в комплексной плоскости. При этом рассматривалась функция g_0, являющаяся произведением многочлена и экспоненты.

Ключевые слова: алгебра аналитических функционалов, произведение Дюамеля, идеал.

Mathematical Subject Classification (2000): 46F15, 46E25, 46H10.

Образец цитирования: *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 72–84. DOI: 10.46698/o8118-4952-7412-y.

Введение

Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией компактной сходимости. Функция $g_0 \in H(\Omega)$ такая, что $g_0(0) = 1$, задает линейный непрерывный в $H(\Omega)$ оператор $D_{0,g_0}(f) := (f(t) - g_0(t)f(0))/t$. Если $g_0 \equiv 1$, то D_{0,g_0} является оператором обратного сдвига, в общем случае D_{0,g_0} — его одномерное возмущение. В пространстве $H(\Omega)$ он был введен в рассмотрение Ю. С. Линчуком [1], описавшим его коммутант в кольце $\mathscr{L}(H(\Omega))$ всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов. С D_{0,g_0} ассоциируется семейство сдвигов T_z, $z \in \Omega$, с помощью которых (по правилу свертки) в сопряженном $H(\Omega)'$ к $H(\Omega)$ вводится умножение. Из результатов [1] следует, что представлением $(H(\Omega), \otimes)$ в $\mathscr{L}(H(\Omega))$ (или в $H(\Omega)$) (образом соответствующего гомоморфизма) является $\mathscr{K}(H(\Omega))$ — коммутант D_{0,g_0} в $\mathscr{L}(H(\Omega))$. В статье показано, что $(H(\Omega)', \otimes)$ — унитальная ассоциативная и коммутативная топологическая алгебра. Основное внимание в работе уделено реализации $(H(\Omega)', \otimes)$, изоморфизмом для которой является преобразование Лапласа. Оно отображает $(H(\Omega)', \otimes)$ на некоторое пространство P_Ω целых функций экспоненциального типа, умножением $*$ в котором является обобщенное произведение Дюамеля. В случае $g_0 \equiv 1$ оно совпадает с обычным произведением Дюамеля. Последнее в пространстве $H(G)$ для звездной относительно начала координат области $G \subset \mathbb{C}$ введено и изучено Н. Уигли [2]. Отметим также, что различные банаховы пространства с произведением Дюамеля (алгебры Дюамеля) подробно изучены М. Т. Караевым (см. [3]). Ранее обобщенное произведение Дюамеля рассматривалось в работе [4] (см. также [5, § 4]) для функции g_0, являющейся произведением экспоненты и многочлена. При этом оно задавалось с помощью дифференциальных операторов конечного порядка. В данной статье изучается двойственная ситуация. В рассмотренном новом случае произведение Дюамеля вводится уже посредством операторов свертки в пространстве P_Ω. Операторы свертки в пространстве P_Ω исследованы Д. Диксоном [6] и В. М. Трутневым [7] (в многомерной ситуации). В завершающей части работы описываются все собственные замкнутые идеалы $(P_\Omega, *)$. Соответствующий результат основывается на полученном в [8] описании собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$ и применении принципа двойственности.

В заключение отметим, что одним из главных побудительных мотивов настоящего исследования послужили многочисленные работы Ю. Ф. Коробейника, посвященные различным свойствам операторов сдвига, коммутационным соотношениям, в частности, описанию линейных непрерывных операторов, перестановочных с операторами сдвига влево и вправо или со сводящимися к ним. Результаты в этом направлении для пространств числовых семейств и голоморфных функций, исчерпывающий обзор соответствующих работ, опубликованных к началу 80-х годов прошлого века, содержатся в монографии [9].

1. Умножение в $H(\Omega)'$ и его реализации

1.1. Умножение в пространствах аналитических функционалов. Далее Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало координат; $H(\Omega)$ — пространство Фреше всех голоморфных в Ω функций. Пусть $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность компактов в Ω такая, что $\Omega_n \subset \operatorname{int}\Omega_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ ($\operatorname{int}\Omega_{n+1}$ обозначает внутренность Ω_{n+1} в $\mathbb{C}$). Последовательность преднорм $\|f\|_n := \max_{z\in\Omega_n} |f(z)|$, $n \in \mathbb{N}$, задает топологию $H(\Omega)$. Символы $H(\Omega)'$, $\mathscr{L}(H(\Omega))$ обозначают топологическое сопряженное к $H(\Omega)$ и кольцо (алгебра) всех линейных непрерывных в $H(\Omega)$ операторов соответственно. Умножение в $\mathscr{L}(H(\Omega))$ — композиция операторов. Далее под алгеброй понимается комплексное линейное пространство $\mathscr{A}$ с умножением, т. е. билинейным отображением $\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A}$ — локально выпуклое пространство, то алгебра $\mathscr{A}$ является топологической, если умножение $\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ непрерывно (иногда в определениии топологической алгебры требуется только раздельная непрерывность умножения).

Зафиксируем функцию $g_0 \in H(\Omega)$ такую, что $g_0(0) = 1$. Оператор обобщенного обратного сдвига (оператор Поммье) определяется следующим образом: для $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$D_{0,g_0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}, & t \neq 0; \\ f'(0) - g_0'(0)f(0), & t = 0. \end{cases}$$

Следуя [10–12], введем операторы T_z, $z \in \Omega$: для $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}, & t \neq z; \\ zg_0(z)f'(z) - zf(z)g_0'(z) + f(z)g_0(z), & t = z. \end{cases}$$

Их называют операторами сдвига для D_{0,g_0}. Согласно [1, 13, 14] $D_{0,g_0}, T_z \in \mathscr{L}(H(\Omega))$, $z \in \Omega$.

Пусть $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ — множество всех линейных непрерывных операторов в $H(\Omega)$, перестановочных с D_{0,g_0} в $H(\Omega)$. Согласно [1, лемма 1] справедлива

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *$B \in \mathscr{K}(D_{0,g_0})$.*

(ii) *Существует функционал $\varphi \in H(\Omega)'$, для которого $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$.*

Заметим, что функционал φ такой, как в (ii), единственен.

Для $\varphi \in H(\Omega)'$ положим $B_\varphi(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$. Отметим, что для любых $z \in \Omega$, $\varphi \in H(\Omega)'$ выполняется коммутационное равенство $B_\varphi T_z = T_z B_\varphi$.

Определим бинарную операцию $\otimes$ в $H(\Omega)'$:

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f)), \quad \varphi, \psi \in H(\Omega)',\ f \in H(\Omega)$$

(нижний индекс у функционала указывает, по какой переменной он действует). Поскольку $\varphi\otimes\psi = \varphi B_\psi$ и $B_\psi \in \mathscr{L}(H(\Omega))$, то $\varphi\otimes\psi \in H(\Omega)'$ для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$. С бинарной операцией $\otimes$ пространство $H(\Omega)'$ является алгеброй. Если $A_\varphi(\psi) := \varphi\otimes\psi$, $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$, то $A_\varphi : H(\Omega)' \to H(\Omega)'$ — оператор, сопряженный к $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$.

Ниже $H(\Omega\times\Omega)$ — пространство всех функций, голоморфных в области $\Omega\times\Omega \subset \mathbb{C}^2$ с топологией компактной сходимости. Для изучения свойств введенной алгебры понадобится следующее простое «фольклерное» утверждение (докажем его без привлечения контурных интегралов). Полагаем $\|\varphi\|_n^* := \sup_{\|f\|_n \leqslant 1} |\varphi(f)|$, $\varphi \in H(\Omega)'$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Лемма 1. (i) *Для любой функции $F \in H(\Omega\times\Omega)$, любого $\psi \in H(\Omega)'$ функция $\psi_t(F(t,z))$ голоморфна в Ω (по z).*

(ii) *Если $F_n, F \in H(\Omega\times\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, и $F_n \to F$, $n\to\infty$, в $H(\Omega\times\Omega)$, то $\psi_t(F_n(t,\cdot)) \to \psi_t(F(t,\cdot))$, $n\to\infty$, в $H(\Omega)$.*

(iii) *Для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$, $F \in H(\Omega\times\Omega)$ выполняется равенство $\varphi_z(\psi_t(F(t,z))) = \psi_t(\varphi_z(F(t,z)))$.*

◁ (i): Используя интегральную формулу Коши, получаем, что

$$\lim_{u\to 0}\sup_{t\in Q}\left|\frac{F(t,z+u)-F(t,z)}{u}-\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right|=0$$

для любого $z\in\Omega$ и любого компакта $Q\subset\Omega$. Отсюда следует, что для $z\in\Omega$ существует предел

$$\lim_{u\to 0}\frac{\psi_t(F(t,z+u))-\psi_t(F(t,z))}{u},$$

равный $\psi_t\left(\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right)$.

(ii): Согласно (i) функции $\psi_t(F_n(t,z))$, $n\in\mathbb{N}$, и $\psi_t(F(t,z))$ голоморфны в Ω по z. Поскольку $\psi\in H(\Omega)'$, то найдется $k\in\mathbb{N}$ такое, что $\|\psi\|_k^*<+\infty$. При этом $|\psi(f)|\leqslant\|\psi\|_k^*\|f\|_k$ для любой функции $f\in H(\Omega)$. Поэтому для произвольного компакта $G\subset\Omega$, любого $n\in\mathbb{N}$

$$\max_{z\in G}|\psi_t(F_n(t,z))-\psi_t(F(t,z))|\leqslant\|\psi\|_k^*\max_{(t,z)\in\Omega_k\times G}|F_n(t,z)-F(t,z)|.$$

Значит, $\psi_t(F_n(t,\cdot))\to\psi_t(F(t,\cdot))$ в $H(\Omega)$.

(iii): Зафиксируем $\varphi,\psi\in H(\Omega)'$. Вследствие (ii) линейные функционалы $F\mapsto\varphi_z(\psi_t(F(t,z)))$ и $F\mapsto\psi_t(\varphi_z(F(t,z)))$ непрерывны на $H(\Omega\times\Omega)$. Поскольку $\Omega\times\Omega$ — область Рунге, то множество многочленов двух комплексных переменных плотно в $H(\Omega\times\Omega)$. Поэтому равенство этих функционалов достаточно проверить на мономах. Действительно, $\varphi_z(\psi_t(t^kz^m))=\varphi_z(z^m)\psi_t(t^k)=\psi_t(\varphi_z(t^kz^m))$ для любых $k,m\in\mathbb{N}_0$. ▷

Для $n\in\mathbb{N}$ введем пространство $H_n':=\{\varphi\in H(\Omega)':\ \|\varphi\|_n^*:=\sup_{\|f\|_n\leqslant 1}|\varphi(f)|<+\infty\}$. Оно банахово с нормой $\|\cdot\|_n^*$. Кроме того, выполняется равенство $H(\Omega)'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H_n'$.

Приведем результат об оценке $\|B_\psi(f)\|_k$. Ее доказательство стандартно: оно использует то, что для $f\in H(\Omega)$ функция $\frac{tf(t)g_0(z)-zf(z)g_0(t)}{t-z}$ голоморфна в $\Omega\times\Omega$ (по (t,z)), и принцип максимума модуля голоморфной функции.

Лемма 2. *Для любого $k\in\mathbb{N}$ существуют $m\geqslant k$ и постоянная C_k такие, что $\|B_\psi(f)\|_k\leqslant C_k\|\psi\|_k^*\|f\|_m$ для любых $\psi\in H_k'$ и $f\in H(\Omega)$.*

Далее $\mathbb{C}[D_{0,g_0}]$ — множество всех многочленов от D_{0,g_0}, т. е. операторов вида $\sum_{j=0}^n c_jD_{0,g_0}^j$ ($c_j\in\mathbb{C}$).

Предложение 1. (i) *Отображение $\varrho:(H(\Omega)',\otimes)\to\mathscr{K}(D_{0,g_0})$, $\varrho(\varphi):=B_\varphi$, — изоморфизм алгебр.*

(ii) *Алгебра $(H(\Omega)',\otimes)$ является унитальной ассоциативной и коммутативной.*

(iii) *$(H(\Omega)',\otimes)$ — топологическая алгебра, если $H(\Omega)'$ наделить сильной топологией $\beta(H(\Omega)',H(\Omega))$.*

(iv) *$\mathbb{C}[D_{0,g_0}]$ плотно в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$, наделенном топологией поточечной сходимости.*

◁ (i): По теореме 1 отображение $\varrho:H(\Omega)'\to\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ биективно. Для любых $\varphi,\psi\in H(\Omega)'$, $z\in\Omega$, учитывая перестановочность B_ψ и T_z, получим:

$$\begin{aligned}\varrho(\varphi\otimes\psi)(f)(z)&=B_{\varphi\otimes\psi}(f)(z)=(\varphi\otimes\psi)(T_z(f))\\&=\varphi_u(\psi(T_u(T_z(f))))=\varphi(T_z(B_\psi(f)))=B_\varphi B_\psi(f)(z).\end{aligned}$$

Значит, $\varrho(\varphi\otimes\psi)=\varrho(\varphi)\varrho(\psi)$.

(ii): Ассоциативность умножения $\otimes$ вытекает из (i) и ассоциативности композиции операторов. Поскольку для любой функции $f\in H(\Omega)$ функция $T_z(f)(t)$ голоморфна в $\Omega\times\Omega$ по (t,z), коммутативность $\otimes$ следует из леммы 1 (iii).

Единицей в $(H(\Omega)',\otimes)$ является функционал $f\mapsto f(0)$.

(iii): Нужно доказать, что отображение $\Delta : H(\Omega)' \times H(\Omega)' \to H(\Omega)'$, $\Delta(\varphi, \psi) = \varphi \otimes \psi$, непрерывно. Так как пространство Фреше $H(\Omega)$ рефлексивно, то $(H(\Omega)', \beta(H(\Omega)', H(\Omega))) = \mathrm{ind}_{n\to} H_n'$, где индуктивный предел берется относительно вложений H_n' в $H(\Omega)'$ [15, предложение 8.4.18]. Отсюда следует, что $H(\Omega)' \times H(\Omega)' = \mathrm{ind}_{n\to}(H_n' \times H_n')$ (индуктивный предел берется относительно вложений $H_n' \times H_n'$ в $H(\Omega)' \times H(\Omega)'$). Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и выберем $m \in \mathbb{N}$ и C_k по лемме 2. Тогда для любых $\varphi, \psi \in H_k'$

$$\|\varphi \otimes \psi\|_m^* = \sup_{\|f\|_m \leqslant 1} |\varphi(B_\psi(f))| \leqslant \sup_{\|f\|_m \leqslant 1} (\|\varphi\|_k^* \|B_\psi(f)\|_k) \leqslant C_k \|\varphi\|_k^* \|\psi\|_k^*.$$

Отсюда следует, что Δ непрерывно из $H_k' \times H_k'$ в H_m'. Значит, $\Delta : H(\Omega)' \times H(\Omega)' \to H(\Omega)'$ непрерывно.

(iv): Через $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ обозначим пространство $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной (простой) сходимости, если в $H(\Omega)$ введена слабая топология $\sigma(H(\Omega), H(\Omega)')$ (см. [16, гл. III, § 3, пример 4 (a)]. Непосредственная проверка показывает, что отображение $\varrho : (H(\Omega)', \sigma(H(\Omega)', H(\Omega))) \to \mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$ — топологический изоморфизм (см., например, [17, теорема 1]). Согласно [1] последовательность функционалов $\varphi_n \in H(\Omega)'$, $n \in \mathbb{N}_0$, такая, что $D_{0,g_0}^n = B_{\varphi_n}$, имеет следующий вид:

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} f^{(k)}(0), \quad c_{k,n} \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1,\ \varphi_0(f) = f(0),\ f \in H(\Omega).$$

Значит, последовательность $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ полна в $(H(\Omega)', \sigma(H(\Omega)', H(\Omega)))$. Следовательно, последовательность $D_{0,g_0}^n = \varrho(\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, полна в $\mathscr{K}_\sigma(D_{0,g_0})$. Поскольку $H(\Omega)$ бочечно, то $\left(D_{0,g_0}^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ полна и в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ с топологией поточечной сходимости для $H(\Omega)$, наделенного своей естественной топологией пространства Фреше. $\rhd$

Выясним, как реализуется операция $\otimes$ посредством преобразований Лапласа и Коши.

1.2. Случай преобразования Лапласа. Обобщенное произведение Дюамеля. Далее понадобится преобразование Лапласа как функционалов из $H(\Omega)'$, так и из $H(\Omega \times \Omega)'$. Поэтому приведем соответствующие определения для областей из $\mathbb{C}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Для $\nu \in \mathbb{C}^N$ положим $e_\nu(t) := e^{\langle \nu, t\rangle}$, $t \in \mathbb{C}^N$. При этом $\langle \nu, t\rangle := \sum_{j=1}^N \nu_j t_j$. Пусть Q — область Рунге в $\mathbb{C}^N$; $H(Q)$ — пространство всех голоморфных в Q функций с топологией компактной сходимости. Преобразование Лапласа

$$\mathscr{F} : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}(\nu) := \varphi(e_\nu), \quad \nu \in \mathbb{C}^N,\ \varphi \in H(Q)',$$

биективно отображает топологическое сопряженное $H(Q)'$ к $H(Q)$ на некоторое пространство P_Q целых в $\mathbb{C}^N$ функций экспоненциального типа (см. [18, § 2], [6, § 2], [7, § 1]). Билинейная форма

$$\langle h, f\rangle := \mathscr{F}^{-1}(f)(h), \quad h \in H(Q),\ f \in P_Q,$$

задает двойственность между $H(Q)$ и P_Q. В P_Q вводится локально выпуклая топология, для которой $\mathscr{F} : H(Q)' \to P_Q$ — топологический изоморфизм, если $H(Q)'$ наделить сильной топологией $\beta(H(Q)', H(Q))$. Положим $e_{\nu,\alpha}(t) := t^\alpha e^{\langle \nu, t\rangle}$, $\nu, t \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ (в этих обозначениях $e_\nu = e_{\nu,0}$). Здесь $t^\alpha := t_1^{\alpha_1} \dots t_N^{\alpha_N}$. Пусть $\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_N^{\alpha_N}}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in P_Q$, где $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$. Выполняются равенства

$$\begin{aligned} \langle e_{\nu,\alpha}, f\rangle &= \partial^\alpha f(\nu), \quad \nu \in \mathbb{C}^N,\ f \in P_Q, \\ \langle h, e_{z,\alpha}\rangle &= \partial^\alpha h(z), \quad z \in Q,\ h \in H(Q),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N \end{aligned} \tag{1}$$

(см. [7, § 1], [19, § 3]).

Приведем определение оператора свертки в P_Q [6, § 2], [7, § 1]. Пусть $H(Q)''$ — второе сопряженное к $H(Q)$; $\mathscr{F}' : P_Q' \to H(Q)''$ — сопряженное отображение к $\mathscr{F} : H(Q)' \to P_Q$; θ — канонический изоморфизм $H(Q)$ на $H(Q)''$. Тогда $\chi = \theta^{-1}\mathscr{F}'$ — алгебраический изоморфизм P_Q' на $H(Q)$. Для функции $a \in H(Q)$ оператор свертки $a(D)$, линейно и непрерывно действующий в P_Q, задается равенством $a(D)(f)(z) = \chi^{-1}(a)(f(\cdot + z))$, $z \in \mathbb{C}^N$, $f \in P_Q$. Отметим, что $a(D)$ — сопряженный (относительно дуальной пары $(H(Q), P_Q)$) к линейному непрерывному в $H(Q)$ оператору $w \mapsto aw$ умножения на a, т. е.

$$\langle aw, f\rangle = \langle w, a(D)(f)\rangle, \quad w \in H(Q),\ f \in P_Q.$$

Далее по-прежнему Ω — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая начало. Наша цель в этом пункте — получить аналитическое выражение для бинарной операции $*$ в P_Ω такой, что $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$ для любых $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$.

Для функции $F \in H(\Omega\times\Omega)$, для $z \in \Omega$ символом $F(D_1, z)$ обозначим оператор свертки в P_Ω, заданный функцией $F(\cdot, z)$. Для $f, h \in P_\Omega$ определим функцию двух переменных $(f \odot h)(t, z) := f(t)h(z)$, $t, z \in \mathbb{C}$. Покажем, что $f \odot h \in P_{\Omega\times\Omega}$. Действительно, пусть $f = \widehat{\varphi}$, $h = \widehat{\psi}$, где $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$, и $\alpha(F) := \varphi_t(\psi_z(F(t, z)))$ для $F \in H(\Omega \times \Omega)$. Тогда $\alpha \in H(\Omega \times \Omega)'$ по лемме 1 и $\widehat{\alpha} = f \odot h$. Значит, $f \odot h \in P_{\Omega\times\Omega}$.

Из (1) вытекает следующее. Для многочлена $a(z) = \sum_{j=0}^{k} a_j z^j$, $z \in \mathbb{C}$, оператор свертки $a(D)$ в P_Ω является обычным дифференциальным оператором: $a(D)(f) = \sum_{j=0}^{k} a_j f^{(j)}$, $f \in P_\Omega$. Для многочлена $F(t, z) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} b_{j,k} t^j z^k$, $t, z \in \mathbb{C}$, для $f, h \in P_\Omega$ справедливо равенство $F(D)(f \odot h)(t, z) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} b_{j,k} f^{(j)}(t)h^{(k)}(z)$, $t, z \in \mathbb{C}$.

Лемма 3. *Пусть $F \in H(\Omega \times \Omega)$.*

(i) *Для любых $f \in H(\Omega)$, $\lambda \in \Omega$ функция $F(D_1, z)(f)(\lambda)$ голоморфна в Ω по z.*

(ii) *Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varphi \in H(\Omega)'$, $f \in P_\Omega$ выполняется равенство*

$$\varphi_z\left(e^{\lambda z} F(D_1, z)(f)(\mu)\right) = F(D)(f \odot \widehat{\varphi})(\mu, \lambda).$$

$\lhd$ (i): Поскольку для $z \in \Omega$

$$F(D_1, z)(f)(\lambda) = \langle e_\lambda, F(D_1, z)(f)\rangle = \langle e_\lambda F(\cdot, z), f\rangle = \mathscr{F}^{-1}(f)(e_\lambda F(\cdot, z)),$$

то функция $F(D_1, z)(f)(\lambda)$ голоморфна в Ω по z по лемме 1.

(ii): Если F — многочлен, то, используя (1), получим, что равенство в (ii) выполняется. Пусть F не является многочленом. Так как $\Omega \times \Omega$ — область Рунге, то существует последовательность многочленов $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к F в $H(\Omega\times\Omega)$. Переходя в равенстве $\varphi_z\left(e^{\lambda z} F_n(D_1, z)(f)(\mu)\right) = F_n(D)(f \odot \widehat{\varphi})(\mu, \lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, к пределу при $n \to \infty$, учитывая лемму 1 (ii), получим доказываемое равенство. $\rhd$

Введем функцию $G_0(t, z) := \frac{g_0(t) - g_0(z)}{t - z}$, голоморфную в $\Omega \times \Omega$. Если $g_0 \equiv 1$, то $G_0 \equiv 0$. Положим для $z \in \Omega$

$$\widetilde{T}_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)g_0(z) - f(z)g_0(t)}{t - z}, & t \neq z; \\ f'(z)g_0(z) - f(z)g_0'(z), & t = z. \end{cases}$$

Для любого $z \in \Omega$ оператор $\widetilde{T}_z$ линеен и непрерывен в $H(\Omega)$. При этом $T_z = \widetilde{T}_z\mathscr{M}$, $z \in \Omega$, где $\mathscr{M}$ — оператор умножения на независимую переменную. Если $g_0 \equiv 1$, то оператор $\widetilde{T}_z$ обозначим символом S_z. Следующая лемма, по сути, доказывается так же, как и леммы 10 и 11 в [4] (соответствующие равенства проверяются на экспонентах).

Лемма 4. (i) *Для любого $z \in \Omega$ сопряженным к S_z оператором $S_z' : P_\Omega \to P_\Omega$ является*

$$S_z'(f)(t) = \int_0^t e^{z\xi} f(t-\xi)\,d\xi, \quad t \in \mathbb{C},\ f \in P_\Omega$$

(интегрирование ведется по отрезку $[0, t]$).

(ii) *Для любого $z \in \Omega$ сопряженным к $\widetilde{T}_z$ оператором $\widetilde{T}_z' : P_\Omega \to P_\Omega$ является*

$$\widetilde{T}_z'(f)(t) = g_0(z) \int_0^t e^{z\xi} f(t-\xi)\,d\xi - e^{zt} G_0(D_1, z)(f)(0), \quad f \in P_\Omega.$$

Далее $\mathscr{M}' : P_\Omega \to P_\Omega$ — сопряженный к оператору $\mathscr{M} : H(\Omega) \to H(\Omega)$; $\mathscr{M}'$ совпадает с оператором дифференцирования (см. [14, лемма 21 (ii)]). Для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$

$$\widehat{\varphi \otimes \psi}(t) = (\varphi \otimes \psi)(e_t) = \varphi_z\big(\psi(T_z(e_t))\big) = \varphi_z\big(\psi(\widetilde{T}_z(\mathscr{M}(e_t)))\big) = \varphi_z\big(\mathscr{M}'\widetilde{T}_z'(\widehat{\psi})(t)\big). \tag{2}$$

По лемме 4

$$\begin{aligned}\mathscr{M}'(\widetilde{T}_z'(\widehat{\psi}))(t) &= \frac{d}{dt}\left(g_0(z)\int_0^t e^{z\xi}\widehat{\psi}(t-\xi)\,d\xi - e^{zt}G_0(D_1,z)(\widehat{\psi})(0)\right)(t)\\ &= g_0(z)\left(\widehat{\psi}(0)e^{zt} + \int_0^t e^{z\xi}(\widehat{\psi})'(t-\xi)\,d\xi\right) - ze^{zt}G_0(D_1,z)(\widehat{\psi})(0). \end{aligned} \tag{3}$$

Положим $\widetilde{G}_0(t,z) := zG_0(t,z)$. Учитывая (2), (3) и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi \otimes \psi}(t) &= \widehat{\psi}(0)g_0(D)(\widehat{\varphi})(t) + \int_0^t g_0(D)(\widehat{\varphi})(\xi)(\widehat{\psi})'(t-\xi)\,d\xi - \varphi_z\Big(e^{zt}\widetilde{G}_0(D_1,z)(\widehat{\psi})(0)\Big)\\ &= \widehat{\psi}(0)g_0(D)(\widehat{\varphi})(t) + \int_0^t g_0(D)(\widehat{\varphi})(\xi)(\widehat{\psi})'(t-\xi)\,d\xi - \widetilde{G}_0(D)(\widehat{\psi}\odot\widehat{\varphi})(0,t), \quad t \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Отметим, что вносить функционал φ под знак интеграла можно в силу леммы 1 (iii).

Итак, реализацией $\otimes$ в P_Ω является следующее обобщенное произведение Дюамеля:

$$(f*h)(t) = h(0)g_0(D)(f)(t) + \int_0^t g_0(D)(f)(\xi)h'(t-\xi)\,d\xi - \widetilde{G}_0(D)(h\odot f)(0,t), \quad t \in \mathbb{C},\ f, h \in P_\Omega.$$

Если $g_0 \equiv 1$, то $f * h$ — обычное произведение Дюамеля:

$$(f*h)(t) = h(0)f(t) + \int_0^t f(\xi)h'(t-\xi)\,d\xi, \quad t \in \mathbb{C},\ f, h \in P_\Omega.$$

1.3. Случай преобразования Коши. Пусть $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$ — пространство ростков всех голоморфных в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega$ функций, равных 0 в ∞. Как обычно, $\overline{\mathbb{C}}$ обозначает расширенную комплексную плоскость. Возьмем $\varphi \in H(\Omega)'$. Функционал φ можно продолжить до линейного непрерывного функционала на банаховом пространстве $C(K)$ непрерывных функций на некотором компакте K в Ω. Преобразование Коши функционала $\varphi \in H(\Omega)'$ определяется равенством

$$\mathscr{C} : H(\Omega)' \to H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega), \quad \varphi \mapsto \varphi_t\left(\frac{1}{t-\lambda}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash K; \quad \mathscr{C}(\varphi)(\infty) := 0.$$

Преобразование $\mathscr{C}$ биективно отображает $H(\Omega)'$ на $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$ [20] (см. также [21, § 2]). В случае $g_0 \equiv 1$ изоморфизм $\mathscr{C}$ приводит к удобной реализации $(H(\Omega)', \otimes)$. Определим бинарную операцию в $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$. Возьмем $u, v \in H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$. Найдется компакт K в Ω, вне которого u и v голоморфны. Положим

$$(u \diamond v)(\lambda) := -\lambda u(\lambda)v(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash K; \quad (u \diamond v)(\infty) := 0.$$

Пространство $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega)$ является алгеброй с операцией $\diamond$.

Предложение 2. *Пусть* $g_0 \equiv 1$. *Отображение* $\mathscr{C}$ *— изоморфизм алгебр* $(H(\Omega)', \otimes)$ *и* $(H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega), \diamond)$.

$\lhd$ Возьмем $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$. Существует компакт K в Ω такой, что φ, ψ, $\varphi\otimes\psi$ линейно и непрерывно продолжаются на $C(K)$, а значит, $\mathscr{C}(\varphi)$, $\mathscr{C}(\psi)$, $\mathscr{C}(\varphi\otimes\psi)$ голоморфны вне K. Для $z, t \in K$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash K$

$$T_z\left(\frac{1}{\cdot-\lambda}\right)(t) = \frac{\frac{t}{t-\lambda} - \frac{z}{z-\lambda}}{t-z} = -\lambda\frac{1}{(t-\lambda)(z-\lambda)}.$$

Поэтому для $\lambda \in \mathbb{C}\backslash K$

$$\mathscr{C}(\varphi\otimes\psi)(\lambda) = (\varphi\otimes\psi)\left(\frac{1}{\cdot-\lambda}\right) = -\lambda\varphi_z\left(\psi_t\left(\frac{1}{(t-\lambda)(z-\lambda)}\right)\right)$$
$$= -\lambda\mathscr{C}(\varphi)(\lambda)\mathscr{C}(\psi)(\lambda) = \mathscr{C}(\varphi)(\lambda) \diamond \mathscr{C}(\psi)(\lambda). \quad \rhd$$

2. Идеалы $(P_\Omega, *)$

Далее существенно будет использоваться описание собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$, полученное в работе [8]. Приведем нужные обозначения и определения.

Для $h \in H(\Omega)$, $U \subset H(\Omega)$ полагаем $hU := \{hf : f \in U\}$. Пусть $\mathbb{C}[z]_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, — множество всех многочленов над $\mathbb{C}$ степени не выше n. *Кратным многообразием* в Ω называется конечная или бесконечная последовательность W пар (λ_k, m_k), где $\{\lambda_k\}$ — дискретное подмножество Ω и $m_k \in \mathbb{N}$ для любого k. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω введем множество

$$S(W) := \big\{f \in H(\Omega) : f^{(j)}(\lambda_k) = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant m_k - 1 \ (\forall\, k)\big\};$$

$S(W)$ — собственное замкнутое подпространство $H(\Omega)$.

Введем дроби $q_{\lambda,k}(t) := \frac{1}{(t-\lambda)^k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\Omega \neq \mathbb{C}$ и Υ — конечное кратное многообразие в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, т. е. $\Upsilon = \big\{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\big\}$, где $n_\lambda \in \mathbb{N}$, Λ — конечное подмножество $\mathbb{C}\backslash\Omega$, то положим

$$\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \operatorname{span}\big\{q_{\lambda,k} : \lambda \in \Lambda, \ 1 \leqslant k \leqslant n_\lambda\big\}.$$

При этом $\operatorname{span} U$ обозначает линейную оболочку подмножества U линейного пространства. Если Υ пусто, то полагаем $\mathbb{C}^-_{\Upsilon}(z) := \{0\}$. Ниже символ $\mathscr{D}(g_0)$ обозначает множество всех многочленов p таких, что $p(0) = 1$, функция g_0/p голоморфна в Ω и p не имеет корней в $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Если $g_0 \equiv 1$, то $\mathscr{D}(g_0) = \{g_0\}$.

Пусть $W(g_0)$ — нулевое многообразие g_0, т. е. множество всех пар $(\mu, n(\mu))$, $\mu \in Z(g_0)$, где $Z(g_0)$ — множество всех нулей g_0 в Ω, а $n(\mu)$ — кратность нуля $\mu \in Z(g_0)$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω будем писать $W \prec W(g_0)$, если $\{\lambda_k\} \subset Z(g_0)$ и $m_k \leqslant n(\lambda_k)$ для любого k.

Теорема 2 [8]**.** (i) *Для любого непустого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в Ω множество $S(W)$ является собственным замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$.*

(ii) *Для любого многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$, любого $n \in \mathbb{N}_0$ такого, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, или $n = -\infty$, конечного или пустого кратного многообразия $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ множество $\frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_{\Upsilon}(z)$ является замкнутым D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$.*

При этом оно собственное тогда и только тогда, когда $n \neq -\infty$ или Υ непусто.

(iii) *Для любого собственного замкнутого D_{0,g_0}-инвариантного подпространства S пространства $H(\Omega)$ имеет место одна из следующих ситуаций:*

(a) *существует непустое кратное многообразие W в Ω такое, что $W \prec W(g_0)$ и $S = S(W)$;*

(b) *найдутся многочлен $p \in \mathscr{D}(g_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, для которых $n \geqslant \deg(p) - 1$ и $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n$;*

(c) *найдется конечное многообразие Υ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, для которого $S = g_0\mathbb{C}^-_{\Upsilon(S)}(z)$;*

(d) *существуют многочлен $p \in \mathscr{D}(g_0)$, целое неотрицательное n, для которых $n \geqslant \deg(p) - 1$, и конечное многообразие Υ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ такие, что $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_{\Upsilon}(z)$.*

Используя двойственность между $H(\Omega)$ и P_Ω, предыдущую теорему стандартным образом можно применить к описанию собственных замкнутых идеалов в алгебре P_Ω с умножением $*$. Пусть S^0 обозначает поляру множества $S \subset H(\Omega)$ в P_Ω относительно дуальной пары $(H(\Omega), P_\Omega)$. Будем использовать следующий принцип двойственности:

Предложение 3. *Собственное замкнутое подпространство S пространства $H(\Omega)$ является D_{0,g_0}-инвариантным подпространством $H(\Omega)$ тогда и только тогда, когда S^0 является собственным замкнутым идеалом $(P_\Omega, *)$.*

Его доказательство проводится с использованием предложения 1 (iv) и равенства $B'_\varphi = A_\varphi$, $\varphi \in H(\Omega)'$.

Пусть $\mathscr{S}$, $\mathscr{I}$ — семейства всех собственных замкнутых D_{0,g_0}-инвариантных подпространств $H(\Omega)$, соответственно, идеалов $(P_\Omega, *)$. Из принципа двойственности следует, что отображение $J : \mathscr{S} \to \mathscr{I}$, $S \mapsto S^0$, биективно.

Определим три вида подпространств P_Ω. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в Ω полагаем

$$I(W) := \operatorname{span}\left(\bigcup_k e_{\lambda_k}\mathbb{C}[z]_{m_k-1}\right).$$

(Пространство $I(W)$ замкнуто в P_Ω. В терминологии статьи [6] оно является прямой суммой подпространств $e_{\lambda_k}\mathbb{C}[z]_{m_k-1}$.) Для $n \in \mathbb{N}_0$, многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$

$$I_{n,p} := \left\{ f \in P_\Omega : \left(\frac{g_0}{p}(D)(f)\right)^{(m)}(0) = 0,\ 0 \leqslant m \leqslant n \right\}.$$

Если $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ — конечное кратное многообразие в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, то

$$I_\Upsilon := \left\{ f \in P_\Omega : \left(\mathscr{C}\mathscr{F}^{-1}(g_0(D)(f))\right)^{(j)}(\lambda) = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant n_\lambda - 1,\ \lambda \in \Lambda \right\}.$$

Отметим, что $(\mathscr{C}\mathscr{F}^{-1})(f)$ для $f \in P_\Omega$ — это голоморфное продолжение в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ преобразования Бореля функции $f \in P_\Omega$. В случае, когда область Ω выпуклая, имеются удобные формулы для нахождения этого преобразования (см., например, [22, гл. 1, § 1, п. 5]). Выполняются равенства

$$\langle e_{\lambda,k}, f\rangle = \frac{1}{(k-1)!}(\mathscr{C}\mathscr{F}^{-1}(f))^{(k-1)}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}\backslash\Omega,\ k \in \mathbb{N},\ f \in P_\Omega. \tag{4}$$

Теорема 3. (i) *Для любого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в Ω, любых многочлена $p \in \mathscr{D}(g_0)$ и целого $n \geqslant 0$ такого, что $n \geqslant \deg(p) - 1$, всякого конечного кратного многообразия $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ множества $I(W)$, $I_{n,p}$, I_Υ, $I_{n,p} \cap I_\Upsilon$ являются собственными замкнутыми идеалами $(P_\Omega, *)$.*

(ii) *Любой собственный замкнутый идеал алгебры $(P_\Omega, *)$ совпадает с одним из множеств $I(W)$, $I_{n,p}$, I_Υ, $I_{n,p} \cap I_\Upsilon$, где $W \prec W(g_0)$, $n \geqslant \max\{0, \deg(p) - 1\}$.*

Теорема 3 — непосредственное следствие теоремы 2 с учетом предложения 3. При этом при описании поляр D_{0,g_0}-инвариантных подпространств нужно учитывать соотношения, связанные с рассматриваемой двойственностью, в частности, равенства (1) и (4), и описание $S(W)^0$ из [6, теоремы 7, 8]:

$$S(W)^0 = I(W), \quad \left(\frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n\right)^0 = I_{n,p}, \quad \left(g_0\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)\right)^0 = I_\Upsilon.$$

Литература

1. *Linchuk Yu. S.* Cyclical elements of operators which are left-inverses to multiplication by an independent variable // Methods of Functional Analysis and Topology.—2006.—Vol. 12, № 4.—P. 384–388.
2. *Wigley N.* The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J.—1974.—Vol. 41.—P. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
3. *Караев М. Т.* Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил.—2018.—Т. 52, вып. 1.—С. 3–12. DOI: 10.4213/faa3481.
4. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа // Комплексный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—М.: ВИНИТИ РАН, 2017.—Т. 142.—С. 111–120.
5. *Мелихов С. Н.* Коэффициенты рядов экспонент для аналитических функций и оператор Поммье // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—М.: ВИНИТИ РАН, 2019.—Т. 161.—С. 65–103.
6. *Dickson D. G.* Convolution equations and harmonic analysis in spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1973.—Vol. 184.—P. 373–385. DOI: 10.1090/S0002-9947-1973-0374449-8.
7. *Трутнев В. М.* Уравнения свертки в пространствах целых функций экспоненциального типа // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз.—М.: ВИНИТИ РАН, 2006.—Т. 108.—С. 158–180.
8. *Ivanova O. A., Melikhov S. N., Melikhov Yu. N.* Invariant subspaces of a generalized backward shift operator and rational functions.—arXiv: 2005.01596v1 [math.FA]; http://arxiv.org/pdf/2005.01596.pdf.
9. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.—Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1983.—155 с.
10. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1979.—Т. 25, вып. 2.—С. 271–282.
11. *Binderman Z.* Functional shifts induced by right invertible operators // Math. Nachr.—1992.—Vol. 157.—P. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.

12. *Dimovski I. N., Hristov V. Z.* Commutants of the Pommiez operator // Int. J. Math. and Math. Science.—2005.—№ 8.—P. 1239–1251. DOI: 10.1155/IJMMS.2005.1239.
13. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об интерполирующей функции А. Ф. Леонтьева // Уфимск. матем. журн.—2014.—Т. 6, № 3.—С. 17–27.
14. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.
15. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
16. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—360 с.
17. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 34–40. DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5989.
18. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Мат. сб.—1972.—Т. 87 (129), № 4.—С. 459–489.
19. *Шишкин А. Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. научн. сем. ПОМИ.—2016.—Т. 447.—С. 129–170.
20. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine Angew. Math.—1953.—Vol. 191, № 1–2.—P. 30–49. DOI: 10.1515/crll.1953.191.30.
21. *Хавин В. П.* Пространства аналитических функций // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал., 1964.—М.: ВИНИТИ, 1966.—С. 76–164.
22. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.

Статья поступила 17 мая 2020 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: neo_ivolga@mail.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 72–84

ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONALS AND THE GENERALIZED DUHAMEL PRODUCT

Ivanova, O. A.[1] and Melikhov, S. N.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@sfedu.ru

Abstract. Let Ω be a simply connected domain in the complex plane containing the origin; $H(\Omega)$ be the Fréchet space of all holomorphic functions on Ω. A holomorphic on Ω function g_0, such that $g_0(0) = 1$, defines a continuous linear Pommiez operator in $H(\Omega)$. It is a one-dimensional perturbation of the backward shift operator and coincides with it if g_0 is the constant function one. Its commutant in the ring of all continuous linear operators in $H(\Omega)$ is isomorphic to the algebra formed by the dual $H(\Omega)'$ of $H(\Omega)$ with the multiplication $\otimes$ defined by the shift operators for the Pommiez operator according to the convolution rule. It is shown that this algebra is unital associative, commutative and topological. Its representations are obtained with the help of Laplace and Cauchy transformations. The focus in the article is the research of the representations with the help of the Laplace transformation. It leads to an isomorphic algebra, formed by some space P_Ω of entire functions of exponential type. The multiplication $*$ in it is the generalized Duhamel product. If g_0 is the identity unit, then this multiplication is the usual Duhamel product. The generalized Duhamel product is given by convolution operators, defined by the function g_0. In the case of the Cauchy transformation (for the function g_0 equal to the constant function one) the realization of $(H(\Omega)', \otimes)$ is the space of germs all holomorphic functions on the complement Ω in the extended complex plane, which are equal to zero at infinity, with multiplication, inverse to the usual product of functions and the independent variable. A description of all proper closed ideals $(P_\Omega, *)$ is obtained. It is based on the description of all proper closed D_{0,g_0}-invariant subspaces of $H(\Omega)$, obtained earlier by the authors. The set of all proper closed ideals $(P_\Omega, *)$ consists of two families. The one contains finite-dimensional ideals defined by subsets of the zero manifold of the function g_0. The other contains infinite ideals, defined, in particular, by a finite number of points outside of Ω. A similar problem was solved earlier by the authors in the dual situation, namely, for the algebra of germs of all functions, holomorphic on a convex locally closed set in the complex plane. In this case, the function g_0 was considered, which is the product of a polynomial and an exponential function.

Key words: algebra of analytic functionals, Duhamel product, ideal.

Mathematical Subject Classification (2010): 46F15, 46E25, 46H10.

For citation: *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* Algebras of Analytic Functionals and the Generalized Duhamel Product, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 72–84 (in Russian). DOI: 10.46698/o8118-4952-7412-y.

References

1. *Linchuk, Yu. S.* Cyclical Elements of Operators which are Left-Inverses to Multiplication by an Independent Variable, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2006, vol. 12, no. 4, pp. 384–388.
2. *Wigley, N.* The Duhamel Product of Analytic Functions, *Duke Mathematical Journal*, 1974, vol. 41, pp. 211–217. DOI: 10.1215/S0012-7094-74-04123-4.
3. *Karaev, M. T.* Duhamel Algebras and Applications, *Functional Analysis and Its Applications*, 2018, vol. 52, no. 1, pp. 1–8. DOI: 10.1007/s10688-018-0201-z.
4. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On Invariant Subspaces of the Pommiez Operator in the Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 241, pp. 760–769. DOI: 10.1007/s10958-019-04461-0.
5. *Melikhov, S. N.* Coefficients of Exponential Series for Analytic Functions and the Pommiez Operator, *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovrem. mat. i eyo pril. Temat. obzory* [Results of Science and Technology. Series Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Reviews], 2019, vol. 161, pp. 65–103 (in Russian).
6. *Dickson, D. G.* Convolution Equations and Harmonic Analysis in Spaces of Entire Functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1973, vol. 184, pp. 373–385. DOI: 10.1090/S0002-9947-1973-0374449-8.
7. *Trutnev, V. M.* Convolution Equations in Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, vol. 120, no. 6, pp. 1901–1915. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000020709.31698.80.
8. *Ivanova. O. A., Melikhov. S. N. and Melikhov, Yu. N. Invariant Subspaces of a Generalized Backward Shift Operator and Rational Functions*, arXiv: 2005.01596v1 [math.FA]; http://arxiv.org/pdf/2005.01596.pdf.
9. *Korobeinik, Yu. F. Operatory sdviga na chislovykh semeistvakh* [Shift Operators on the Number Families], Rostov-on-Don, RSU, 1983, 155 p. (in Russian).
10. *Tkachenko, V. A.* Operators that Commute with Generalized Integration in Spaces of Analytic Functionals, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 25, no. 2, pp. 141–146.
11. *Binderman, Z.* Functional Shifts Induced by Right Invertible Operators, *Mathematische Nachrichten*, 1992, vol. 157, pp. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.
12. *Dimovski, I. N. and Hristov, V. Z.* Commutants of the Pommiez Operator, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005, no. 8, pp. 1239–1251. DOI: 10.1155/IJMMS.2005.1239.

13. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On A. F. Leont'ev's Interpolating Function, *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 17–27. DOI:10.13108/2014-6-3-17.
14. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On Operators Commuting with a Pommiez type Operator in Weighted Spaces of Entire Functions, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 2, pp. 209–224. DOI: 10.1090/spmj/1447.
15. *Edvards, R. E. Functional Analysis. Theory and Applications*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1965, 791 p.
16. *Schaefer, H. Topological Vector Spaces, Grad. Texts. in Math.*, vol. 3, New York, Springer-Verlag, 1971. 296 p.
17. *Ivanova, O. A. and Melikhov, S. N.* On an Algebra of Analytic Functionals Connected with a Pommiez Operator, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 34–40 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5989.
18. *Krasichkov-Ternovskii, I. F.* Invariant Subspaces of Analytic Functions. I. Spectral Analysis on Convex Regions, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1972, vol. 16, no. 4, pp. 471–500. DOI: 10.1070/SM1972v016n04ABEH001436.
19. *Shishkin, A. B.* Exponential Synthesis in the Kernel of a Symmetric Convolution, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 229, no. 5, pp. 572–599. DOI: 10.1007/s10958-018-3700-9.
20. *Köthe, G.* Dualität in der Funktionentheorie, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 1953, vol. 191, no. 1–2, pp. 30–49. DOI: 10.1515/crll.1953.191.30.
21. *Havin, V. P.* Spaces of Analytic Functions, *Itogi nauki. Ser. Matematika. Mat. analiz* [The Results of Science. Series Mathematics. Math. Analysis], 1964, Moscow, VINITI, 1966, pp. 76–164 (in Russian).
22. *Leontiev, A. F. Ryady exponent* [Series of Exponentials], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).

Received May 17, 2020

Olga A. Ivanova
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Associate Professor of Mathematical Analysis and Geometry
E-mail: neo_ivolga@mail.ru

Sergey N. Melikhov
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor of the Department of Algebra and Discrete Mathematics;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher of the Department of Mathematical Analysis
E-mail: snmelihov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-5895-9607