Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 85–99

УДК 517.53
DOI 10.46698/q8093-7554-9905-q

БЕЗУСЛОВНЫЕ БАЗИСЫ В РАДИАЛЬНЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ#

К. П. Исаев[1]**, Р. С. Юлмухаметов**[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `orbit81@list.ru`, `yulmukhametov@mail.ru`

Посвящается 90-летию Коробейника Юрия Фёдоровича

Аннотация. Рассматривается гильбертово пространство целых функций H, удовлетворяющее условиям: 1) пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$; 2) пространство H устойчиво относительно деления, т. е. если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z-z_0)^{-1} \in H$; 3) пространство H радиальное, т. е. если $F \in H$ и $\varphi \in \mathbb{R}$, то функция $F(ze^{i\varphi})$ лежит в H, причем $\|F(ze^{i\varphi})\| = \|F\|$; 4) полиномы полны в H и $\|z^n\| \asymp e^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где последовательность $u(n)$ удовлетворяет условию $u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \succ n^\delta$, $n \in \mathbb{N}$, для некоторого $\delta > 0$. Из условия 1) следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H. Базис $\{e_k,\ k = 1, 2, \dots\}$ в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом, если найдутся числа $c, C > 0$, такие, что для любого элемента $x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k \in H$ выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

В статье излагается метод конструирования безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в таких пространствах. Эта задача восходит к двум тесно связанным между собой классическим задачам: представление функций посредством рядов экспонент и интерполяция целыми функциями.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, безусловные базисы, воспроизводящие ядра.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E22, 30D10.

Образец цитирования: *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Безусловные базисы в радиальных гильбертовых пространствах // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 3.—С. 85–99. DOI: 10.46698/q8093-7554-9905-q.

Введение

Пусть H — гильбертово пространство целых функций, удовлетворяющее условиям:

1. Пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$.

Работа первого автора выполнена в рамках реализации программы развития научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, дополнительное соглашение № 075-02-2020-1421/1 к соглашению № 075-02-2020-1421; работа второго автора выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований, проект № 18-01-00095 А.

2. Пространство H устойчиво относительно деления, т. е. если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$. Из этого условия следует, в частности, что точечные функционалы отличны от нуля.

Из условия 1 следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется *воспроизводящим ядром пространства* H. Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ (см. [1]).

Базис $\{e_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ в гильбертовом пространстве называется *безусловным базисом* [2], если найдутся числа $c, C > 0$ такие, что для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

В данной статье мы намерены изложить метод конструирования безусловных базисов в некоторых гильбертовых пространствах целых функций.

Эта задача восходит к двум тесно связанным между собой классическим задачам: представление функций посредством рядов экспонент и интерполяция целыми функциями. Представление функций посредством рядов экспонент активно развивалось А. Ф. Леонтьевым и его учениками, основные результаты и аналитические методы изложены в монографии [3]. Ю. Ф. Коробейником и его учениками развивались функционально аналитические методы, им создана теория абсолютно представляющих систем в локально выпуклых пространствах голоморфных функций, основные результаты этой теории изложены в работе [4]. В теории абсолютно представляющих систем естественным образом важное значение имеет степень тонкости топологии пространства. В работах [5, 6] доказаны теоремы о существовании представляющих систем экспонент в проективных и индуктивных пределах весовых пространств, в которых оператор дифференцирования действует непрерывно.

Дальнейшее продвижение в этой задаче в смысле тонкости топологии предполагает уже изучение нормированных пространств, т. е. конструирование (безусловных) базисов. Как оказалось, базисы из экспонент — явление редкое. Насколько известно авторам — это базисы в классическом пространстве L_2 и в пространствах Соболева L_2^s [7], базисы в пространствах Смирнова [8] и Бергмана [9] на выпуклых многоугольниках. Соответственно, имеется ряд работ об отсутствии базисов из экспонент. Так на пространствах Смирнова и Бергмана на областях с гладкой границей базисов из экспонент не может быть (см. [10, 11]). Базисов из экспонент не бывает также и в весовых пространствах, когда весовая функция растет быстрее степенной функции [12] или сравнима со степенной [13].

В работах [14–16] показано отсутствие безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в классическом пространстве Бергмана и в пространствах Фока

$$\mathscr{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ \|f\|^2 := \int\limits_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} dm(\lambda) < \infty \right\}$$

с радиальными весами φ, растущими быстрее $|\lambda|^2$. В работе [17] доказано отсутствие безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра уже в пространствах с весами, удовлетворяющими условию $(\ln_+ r)^2 = o(\varphi(r))$, $r \to \infty$, и с некоторой регулярностью роста. В этой же работе получен неожиданный результат о существовании безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока $\mathscr{F}_{\varphi_\alpha}$ с весами $\varphi_\alpha(\lambda) = (\ln_+ |\lambda|)^\alpha$ при $\alpha \in (1;2]$. В дальнейшем в статье [18] доказано существование безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах Фока с весами существенно более общего вида.

Далее будем использовать следующие обозначения. Запись $A(x) \asymp B(x)$, $x \in X$, для положительных функций A, B означает, что для некоторых констант $C, c > 0$ для всех $x \in X$ выполняются оценки $cB(x) \leqslant A(x) \leqslant CB(x)$, символ $A(x) \prec B(x)$, $x \in X$, ($A(x) \succ B(x)$, $x \in X$); означает существование константы $C > 0$ такой, что $A(x) \leqslant CB(x)$ ($B(x) \leqslant CA(x)$).

Функциональное гильбертово пространство H будем называть *радиальным*, если для любого $F \in H$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ функция $F(ze^{i\varphi})$ лежит в H, причем $\|F(ze^{i\varphi}) = \|F\|$. Очевидно, что в радиальном гильбертовом пространстве $K(ze^{i\varphi}) \equiv K(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

В данной работе мы рассматриваем абстрактные радиальные функциональные гильбертовы пространства, устойчивые относительно деления, и докажем два основных утверждения.

1. Если H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления и допускающее безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где последовательность $u(n)$ выпуклая, т. е.

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

(см. теорему 1).

2. Если H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором полиномы полны и

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где последовательность $u(n)$ удовлетворяет условию

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \succ n^\delta, \quad n \in \mathbb{N},$$

для некоторого $\delta > 0$, то в пространстве H существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра (см. теорему 5).

Второе утверждение доказывается по схеме работы [17] — на основе теоремы Бари. Результаты этой работы относительно пространств $\mathscr{F}_{\varphi_\alpha}$ для $\alpha \in (1;2)$ довольно просто следуют из второго утверждения.

1. Геометрия радиальных гильбертовых пространств, допускающих безусловный базис из значений воспроизводящего ядра

Теорема 1. *Если в радиальном функциональном гильбертовом пространстве H, устойчивом относительно деления и содержащем все мономы, существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра, то существует гладкая выпуклая функция $u(x)$ на $\mathbb{R}$ такая, что*

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

При этом

$$\lim_{x\to+\infty} u'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{x} = +\infty.$$

$\lhd$ Пусть система $\{k(\lambda, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в функциональном гильбертовом пространстве H и L_n — биортогональный базис. Поскольку мы предполагаем устойчивость относительно деления, то

$$L_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где L — порождающая целая функция. Как известно,

$$\|L_k\|^2 \asymp \frac{1}{K(z_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и разложение функции $F \in H$ по этому базису имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F(z_k) L_k(z).$$

По определению безусловного базиса

$$\|F\|^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(z_k)|^2}{K(z_k)}.$$

Значит,

$$\|z^n\|^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{2n} \frac{1}{K(|z_k|)} = \int\limits_0^{\infty} \frac{r^{2n}}{K(r)}\, d\mu(r), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\mu(r) = \sum_{|z_k|<r} 1$ — считающая функция последовательности $r_k = |z_k|$, $k \in \mathbb{N}$, нумерованной по возрастанию. Гладкая выпуклая функция

$$u(x) := \ln \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2xy} \frac{d\mu(e^y)}{K(e^y)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

удовлетворяет условиям теоремы 1.

Если предположить, что производная $u'(x)$ ограничена числом a, то при больших n имеем $u(n) \leqslant 2an$, т. е. $\|z^n\| \prec e^{2an}$. Тогда для любого ряда Тейлора, сходящегося в круге $B(0;b)$ с $b > e^{3a}$ по неравенству Коши для коэффициентов и неравенству треугольника для норм

$$\left\| \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n \right\| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} |c_n| \|z^n\| \prec \sum_{n=k}^{\infty} e^{-na} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Тем самым, ряд сходится в норме пространства H и в силу полноты пространство H содержит все функции, аналитические в круге $B(0;b)$. $\rhd$

Не уменьшая общности, далее будем считать, что последовательность $\ln\|z^n\|$, $n = 0, 1, \ldots,$ — возрастающая, выпуклая и $\ln\|z^0\| = 0$. Соответственно, будем считать, что $u(t)$ $(u(0) = 0)$ — кусочно-линейная неубывающая функция с изломами в целых неотрицательных точках такая, что

$$\|z^n\| \asymp e^{u(n)}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом,

$$u(t) = u(n) + (u(n+1) - u(n))(t-n), \quad t \in [n; n+1], \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

при этом

$$u'_+(n) = u'_-(n+1) = u(n+1) - u(n), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\widetilde{u}(x) = \sup_{t \geqslant 0}(xt - u(t)) &= \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \sup_{\tau \in [0;1]} (x(n+\tau) - (u(n) + (u(n+1) - u(n))\tau) \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (xn - u(n) + \sup_{\tau \in [0;1]} (x - (u(n+1) - u(n))\tau))\end{aligned}$$

и внутренний супремум достигается на концах отрезка $[0; 1]$, то

$$\widetilde{u}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (xn - u(n)), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Таким образом, сопряженная по Юнгу $\widetilde{u}(x)$ как верхняя огибающая последовательности линейных функций также будет кусочно линейной с изломами в точках $x_n = u(n) - u(n-1) = u'_+(n-1)$, $n \in \mathbb{N}$, или более подробно

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_1 = u(1) - u(0), \\ 1 \cdot x - u(1), & x_1 \leqslant x \leqslant x_2 = u(2) - u(1), \\ \dots \\ nx - u(n), & x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1} = u(n+1) - u(n), \\ \dots \end{cases}$$

Производная функция $\widetilde{u}'(x)$ будет функцией скачков с единичными скачками в этих точках x_n, $n \in \mathbb{N}$, в частности,

$$\widetilde{u}(x_n) = x_n n - u(n), \quad \widetilde{u}'_+(x_n) = n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Соответственно, $\widetilde{u}'(\ln r)$ — функция скачков с единичными скачками в точках $R_n = e^{x_n}$.

Выпуклость последовательности $u(n)$ означает выполнение условия

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Мы будем рассматривать более сильное условие: для некоторого $\sigma > 0$

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant \sigma, \quad n \in \mathbb{N},$$

или

$$u'_+(n+1) - u'_+(n) \geqslant \sigma, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{A}$$

Теорема 2. *Пусть $K(\lambda)$ — функция Бергмана радиального функционального гильбертова пространства H, устойчивого относительно деления, в котором полиномы полны, и $u(t)$ — кусочно линейная функция такая, что*

$$\left\| z^k \right\| \asymp e^{u(k)}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для которой выполняется условие (A). *Тогда*

$$K(\lambda) \asymp e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$\lhd$ В условиях теоремы $\left\{\frac{z^n}{\|z^n\|},\ n = 0, 1, \ldots\right\}$ образует ортонормированный базис. Следовательно,

$$k(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \overline{z}^k}{\|z^k\|^2},$$

$$K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z^k|^2}{\|z^k\|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Докажем требуемое соотношение на критических окружностях $|\lambda| = R_n$. Из формулы для $K(z)$ имеем

$$K(R_n)R_n^{-2n}\|z^n\|^2 \asymp \sum_{k=0}^{\infty} R_n^{2(k-n)} e^{-2u(k)+2u(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\ln R_n = x_n = u'_+(n-1)$, то

$$R_n^{2(k-n)} e^{-2u(k)+2u(n)} = e^{2(u(n)-u(k)-u'_+(n-1)(n-k))}.$$

Пусть $k \geqslant n$. Для кусочно линейной функции

$$u'_+(n) = u(n+1) - u(n)$$

и

$$u(k) - u(n) = \sum_{j=0}^{k-n-1} (u(n+j+1) - u(n+j)) = \sum_{j=0}^{k-n-1} u'_+(n+j). \tag{3}$$

По условию (A)

$$u'_+(n+p) \geqslant u'_+(n-1) + (p+1)\sigma, \quad n-1, p = 0, 1, 2, \ldots,$$

и, значит,

$$u(k) - u(n) \geqslant (k-n)u'_+(n-1) + \frac{1}{2}(k-n)(k-n+1)\sigma,$$

тем самым,

$$u(n) - u(k) - u'_+(n-1)(n-k) \leqslant -\frac{1}{2}(k-n)(k-n+1)\sigma, \quad k \geqslant n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=n}^{\infty} R_n^{2(k-n)} e^{-2u(k)+2u(n)} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j(j+1)\sigma} := C(\sigma), \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{R_n^{2k}}{\|z^k\|^2} \leqslant C(\sigma) \frac{|R_n|^{2n}}{\|z^n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Пусть $k < n$. Тогда

$$u(n) - u(k) - u'_+(n-1)(n-k)$$
$$= \sum_{j=1}^{n-k} \big(u(n-j+1) - u(n-j) - u'_+(n-1)\big) = \sum_{j=1}^{n-k} \big(u'_+(n-j) - u'_+(n-1)\big).$$

Поскольку

$$u'_+(n-j) - u'_+(n-1) \leqslant -(j-1)\sigma,$$

то

$$u(n) - u(k) - u'_+(n-1)(n-k) \leqslant -\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)\sigma, \quad k < n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n-1} R_n^{2(k-n)} e^{-2u(k)+2u(n)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j(j-1)\sigma} < C(\sigma), \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|R_n|^{2k}}{\|z^k\|^2} \leqslant C(\sigma) \frac{|R_n|^{2n}}{\|z^n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (4) следует соотношение

$$K(R_n) \asymp \frac{R_n^{2n}}{\|z^n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения (2)

$$e^{2\widetilde{u}(\ln R_n)} \asymp \frac{R_n^{2n}}{\|z^n\|^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

тем самым,

$$K(R_n) \asymp e^{2\widetilde{u}(\ln R_n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функция $\ln K(e^x)$ — выпуклая и по доказанному

$$\ln K(e^{x_n}) \leqslant \mathrm{Const} + 2\widetilde{u}(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку функция $\widetilde{u}(x)$ линейна между точками x_n, то это соотношение верно для всех x:

$$K(\lambda) \prec e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|))}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

С другой стороны, по определению функции Бергмана и по формуле (1)

$$K(\lambda) = \sup_{F \in H} \frac{|F(\lambda)|^2}{\|F\|^2} \geqslant \sup_{n \in \mathbb{N}\cup\{0\}} \frac{|\lambda^n|^2}{\|\lambda^n\|^2} = \exp\left(2 \sup_{n \in \mathbb{N}\cup\{0\}} (n \ln|\lambda| - u(n))\right) = e^{2\widetilde{u}(\ln|\lambda|)}.$$

Отсюда и из (5) следует утверждение теоремы 2. $\triangleright$

2. Конструкция безусловного базиса из значений воспроизводящего ядра

Введем обозначение

$$K(\lambda, z) := \frac{k(\lambda, z)}{\|k(\lambda, z)\|} = \frac{k(\lambda, z)}{\sqrt{K(z)}}.$$

Рассмотрим еще более сильное условие выпуклости: для некоторых $\delta \in (0;1)$, $\sigma > 0$

$$u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \geqslant \sigma(n+1)^{\delta}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{B}$$

или

$$u'_+(n+1) - u'_+(n) \geqslant \sigma(n+1)^{\delta}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Выберем число $q \in (0;1)$ таким образом, чтобы последовательности x_n и $x'_n = x_n + \ln \frac{q}{n}$ чередовались:

$$0 < x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2 < \dots \tag{6}$$

Это возможно, поскольку

$$x_{n+1} - x_n = u'_+(n) - u'_+(n-1) \geqslant \sigma n^{\delta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором многочлены полны, и $u(t)$ — кусочно-линейная функция такая, что*

$$\|z^k\| \asymp e^{u(k)}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для которой выполняется условие (B). *Тогда, если $\varphi_n \in [0;2\pi]$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q_n = \frac{q}{n}$, где $q \in (0;1)$ выбрано так, что выполняется условие* (6), *и $\lambda_n = q_n e^{u'_+(n-1)} e^{i\varphi_n}$, $n \in \mathbb{N}$, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\lambda^n e^{-i\varphi_n}}{\|\lambda^n\|} - K(\lambda, \lambda_{n+1}) \right\|^2 < \infty.$$

$\lhd$ В условиях теоремы система $e_k = \frac{\lambda^k}{\|z^k\|}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, образует ортонормированный базис и

$$\frac{\lambda^n e^{-i\varphi_n}}{\|\lambda^n\|} - K(\lambda, \lambda_{n+1}) = \left(e^{-i\varphi_n} - \frac{\overline{\lambda}_{n+1}^{\,n}}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|} \right) e_n - \frac{1}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}} \sum_{k \neq n} \frac{\overline{\lambda}_{n+1}^{\,k}}{\|z^k\|} e_k.$$

Отсюда по равенству Парсеваля

$$\left\| \frac{\lambda^n e^{-i\varphi_n}}{\|\lambda^n\|} - K(\lambda, \lambda_{n+1}) \right\|^2 = \left| 1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|} \right|^2 + \frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \sum_{k \neq n} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2}. \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть $N = N(\sigma, \delta)$ такое, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $-\ln q_{n+1} \leqslant \frac{\sigma}{2} n^{\delta}$. Тогда для $n \geqslant N$ имеет место оценка*

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \sum_{k \neq n} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \leqslant C(\sigma, \delta) \left(\frac{q^2}{(n+1)^2} + e^{-2\sigma n^{\delta}} \right).$$

$\lhd$ По теореме 2

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})} \frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2} \asymp q_{n+1}^{2k} e^{2(k u'_+(n) - u(k) - \widetilde{u}(\ln q_{n+1} + x_{n+1}))}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Поскольку функция $\widetilde{u}$ кусочно линейна, то по формулам (2)

$$\widetilde{u}(\ln q_{n+1}+x_{n+1})=\widetilde{u}(x_{n+1})+\widetilde{u}'_-(x_{n+1})\ln q_{n+1}$$
$$=x_{n+1}(n+1)-u(n+1)+\widetilde{u}'_+(x_n)\ln q_{n+1}=u'_+(n)(n+1)-u(n+1)+n\ln q_{n+1},$$

поэтому

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})}\frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2}\asymp q_{n+1}^{2(k-n)}e^{2(u(n+1)-u(k)-u'_+(n)(n+1-k))},\quad n\geqslant N. \tag{8}$$

Пусть $k\geqslant n+1$. По соотношению (3) при условии (B) имеем

$$u(k)-u(n+1)=\sum_{j=1}^{k-n-1}u'_+(n+j)\geqslant\sum_{j=1}^{k-n-1}(u'_+(n)+\sigma(n+1)^\delta)=(u'_+(n)+\sigma(n+1)^\delta)(k-n-1),$$

следовательно,

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})}\frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2}\prec q_{n+1}^{2(k-n)}e^{-2\sigma(n+1)^\delta(k-n-1)},\quad n\geqslant N,$$

и

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{K(\lambda_{n+1})}\frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2}\prec\frac{q^2}{(n+1)^2}\sum_{k=n+1}^{\infty}e^{-2\sigma(n+1)^\delta(k-n-1)}\leqslant C_1(\sigma)\frac{q^2}{(n+1)^2}. \tag{9}$$

Рассмотрим $k\leqslant n-1$. Заметим, что

$$\begin{aligned}u(n+1)-u(k)-u'_+(n)(n+1-k)&=\sum_{j=0}^{n-k}(u(n-j+1)-u(n-j)-u'_+(n))\\&=\sum_{j=1}^{n-k}(u'_+(n-j)-u'_+(n))=-\sum_{s=k}^{n-1}(u'_+(n)-u_+(s)),\end{aligned} \tag{10}$$

и по условию (B)

$$u'_+(n)-u'_+(s)=\sum_{p=s+1}^{n}(u'_+(p)-u'_+(p-1))\geqslant\sigma\sum_{p=s+1}^{n}p^\delta\geqslant\sigma(s+1)^\delta(n-s).$$

Функция $(s+1)^\delta(n-s)$ — вогнутая, значит минимальное значение на интервале $[0;n-1]$ достигается в концевых точках, поэтому

$$u'_+(n)-u'_+(s)\geqslant\sigma n^\delta,\quad s=0,1,\ldots,n-1.$$

Отсюда и из (10) получим

$$u(n+1)-u(k)-u'_+(n)(n+1-k)\leqslant-\sigma n^\delta(n-k).$$

Таким образом, для $n\geqslant N$ в силу (8) выполняется оценка

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})}\frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2}\prec e^{-2(n-k)\sigma n^\delta},\quad n\geqslant N,$$

значит,

$$\frac{1}{K(\lambda_{n+1})}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2}\prec\sum_{k=0}^{n-1}e^{-2(n-k)\sigma n^\delta}\leqslant C_2(\sigma,\delta)e^{-2\sigma n^\delta}.$$

Отсюда и из (9) следует утверждение леммы 1. $\triangleright$

Закончим доказательство теоремы 3.

По определению функции Бергмана

$$\frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|} < 1,$$

поэтому

$$\left|1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|}\right|^2 < 1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^{2n}}{K(\lambda_{n+1})\|z^n\|^2} = \frac{1}{K(\lambda_{n+1})}\sum_{k\neq n}\frac{|\lambda_{n+1}|^{2k}}{\|z^k\|^2},$$

и по утверждению леммы 1 для достаточно больших n

$$\left|1 - \frac{|\lambda_{n+1}|^n}{\sqrt{K(\lambda_{n+1})}\|z^n\|}\right|^2 \leqslant C(\sigma,\delta)\left(\frac{q}{(n+1)^2} + e^{-2\sigma n^\delta}\right).$$

По соотношению (7) и из утверждения леммы 1 следует утверждение теоремы 3. $\triangleright$

Теорема 4. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором многочлены полны, и $u(t)$ — кусочно-линейная функция такая, что*

$$\|z^k\| \asymp e^{u(k)}, \quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

для которой выполняется условие (B), *тогда, если $\varphi_n\in[0;2\pi]$, $q_n=\frac{q}{n}$, где $q\in(0;1)$ выбрано так, что выполняется условие* (6), *и $\lambda_n = q_n e^{u'_+(n-1)}e^{i\varphi_n}$, $n\in\mathbb{N}$, то система $K(\lambda,\lambda_n)$, $n\in\mathbb{N}$, полна и минимальна в пространстве H.*

$\triangleleft$ Функция $u_0(\lambda) = u_0(|\lambda|) := \widetilde{u}(\ln|\lambda|)$ — радиальная субгармоническая функция. Ассоциированная по Риссу мера μ этой функции просто считается в полярных координатах:

$$d\mu(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\Delta u_0(re^{i\varphi})\,dm(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi r^2}\left(u_0''(r) + \frac{1}{r}u_0'(\ln r)\right) rdrd\varphi = \frac{1}{2\pi}\,d\widetilde{u}'(\ln r)d\varphi,$$

где $dm(z)$ — мера Лебега. Через $\mu(t)$ обозначим μ-меру круга $B(0,t)$. Тогда

$$\mu(t) = \widetilde{u}'(\ln t) = \sum_{R_n<t} 1, \quad t>0.$$

Формула Йенсена для радиальной функции $\widetilde{u}$ становится очень простой:

$$\widetilde{u}(\ln|\lambda|) = \int\limits_0^{|\lambda|}\frac{\mu(t)\,dt}{t}.$$

Пусть $R'_n = e^{x'_n} = |\lambda_n|$ и $\nu(t) = \sum_{R'_n<t} 1, \quad t>0$. Рассмотрим субгармоническую функцию

$$v(\ln|\lambda|) = \int\limits_0^{|\lambda|}\frac{\nu(t)\,dt}{t}.$$

Лемма 2. *Имеет место соотношение*

$$v(\ln R_n)-\widetilde{u}(\ln R_n)\to\infty,\quad n\to\infty,$$

причем для любого $\alpha\in\left(\frac{1}{1+\delta};1\right)$ *и некоторой константы* $b>0$

$$v(\ln R_n)-\widetilde{u}(\ln R_n)\leqslant b(\ln R_n)^{\alpha},\quad n\in\mathbb{N}.$$

$\lhd$ Поскольку последовательности R'_n и R_n чередуются, то

$$\nu(t)-\mu(t)=1,\quad R'_n\leqslant t<R_n,\ n\in\mathbb{N},$$

и $\nu(t)-\mu(t)=0$ для остальных $t>0$. Значит,

$$v(\ln R_n)-\widetilde{u}(\ln R_n)=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{R'_k}^{R_k}\frac{dt}{t}=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{R_k}{R'_k}=\ln\frac{n!}{q^n}.$$

Отсюда вытекает первое соотношение леммы. Применив формулу Стирлинга, получим, что для некоторой постоянной $a>0$

$$v(\ln R_n)-\widetilde{u}(\ln R_n)\leqslant an\ln n,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

По условию (B)

$$x_n-x_1=\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=2}^{n}\big(u'_+(k-1)-u'_+(k-2)\big)\geqslant\sigma\sum_{k=2}^{n}(k-1)^{\delta}\geqslant 2^{\delta-2}\sigma(n-1)^{\delta+1}.$$

Тем самым, для некоторой константы $a_0>0$

$$n\leqslant a_0x_n^{\frac{1}{1+\delta}}=a_0(\ln R_n)^{\frac{1}{1+\delta}}.$$

Отсюда и из (11) следует второе утверждение леммы 2. $\rhd$

Продолжим доказательство теоремы 4. Рассмотрим целую функцию

$$L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right),\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

По теореме 2 и лемме 2 в работе [19] функция L удовлетворяет соотношению

$$|L(\lambda)|\asymp\frac{\operatorname{dist}(\lambda)}{1+|\lambda|}e^{v(\ln|\lambda|)},\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{12}$$

где $\operatorname{dist}(\lambda)=\inf_{n\in\mathbb{N}}|\lambda-\lambda_n|$. Если система $K(\lambda,\lambda_n)$, $n\in\mathbb{N}$, не полна в пространстве H, то найдется целая функция $F=gL\in H$. По теореме 2 должно выполняться соотношение

$$|F(\lambda)|\prec e^{\widetilde{u}(\ln|\lambda|)},\quad \lambda\in\mathbb{C},$$

значит, в силу оценки (12)

$$\frac{\operatorname{dist}(\lambda)}{1+|\lambda|}e^{v(\ln|\lambda|)}\prec e^{\widetilde{u}(\ln|\lambda|)},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

На окружностях $|\lambda| = R_n$ имеем $\operatorname{dist}(\lambda) \asymp 1 + |\lambda|$, поэтому должно быть

$$e^{v(\ln|R_n|)} \prec e^{\widetilde{u}(\ln R_n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

что противоречит первому соотношению леммы 2.

Докажем минимальность. Возьмем некоторое n, и пусть

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} = \sum_{k=0}^{\infty} l_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

По неравенству Коши для k, таких что $R_k \geqslant 2|\lambda_n|$ и по теореме 2

$$|l_k| \prec \frac{1}{R_k^{k+1}} \max_{\varphi \in [0;2\pi]} |L(R_k e^{i\varphi})| \prec \frac{1}{R_k^{k+1}} e^{v(x_k)}.$$

По второму утверждению леммы 2

$$|l_k| \prec \frac{1}{R_k^{k+1}} e^{\widetilde{u}(x_k)+b(\ln R_k)^\alpha},$$

значит, по соотношению (2)

$$|l_k| \prec e^{kx_k - u(k) - (k+1)x_k + bx_k^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\bigl|l_k\bigr|^2 \bigl\|z^k\bigr\|^2 \prec e^{-2x_k + 2bx_k^\alpha} = e^{-2x_k(1 - bx_k^{\alpha-1})}.$$

Поскольку $\alpha < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 \|z^k\|^2 < \infty,$$

и функция $L(\lambda)(\lambda - \lambda_n)^{-1}$ принадлежит пространству H. $\triangleright$

Теорема 5. *Пусть H — радиальное функциональное гильбертово пространство, устойчивое относительно деления, в котором мономы z^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, полны, и $u(t)$ — кусочно-линейная функция такая, что*

$$\|z^k\| \asymp e^{u(k)}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

для которой выполняется условие (B). *Положим $R'_n = \frac{q}{n} e^{u'_+(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, где $q \in (0;1)$ выбрано так, что выполняется условие* (6). *Тогда для любого множества $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0;2\pi]$, значения воспроизводящего ядра $K(\lambda, R'_n e^{i\varphi_n})$, $n \in \mathbb{N}$, образуют безусловный базис в пространстве H.*

$\triangleleft$ Утверждение теоремы следует из теоремы Бари (см. [20], [21, теорема 14, с. 81]) и теорем 3, 4. $\triangleright$

Литература

1. *Aronszajn N.* Theory of reproducing kernels // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 68, № 3.—P. 337–404. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7.
2. *Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S.* Unconditional bases of exponentials and of reproductional kernels // Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics.—1981.—Vol. 864.—P. 214–335. DOI: 10.1007/BFb0097000.

3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1 (217).—С. 73–126.
5. *Исаев К. П.* Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций // Комплексный анализ. Целые функции и их применения. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—2019.—Т. 161.—С. 3–64.
6. *Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С.* Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $H(D)$ // Изв. РАН. Сер. матем.—2019.—Т. 83, № 2.—С. 40–60. DOI: 10.4213/im8728.
7. *Russell D. L.* On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval // J. Math. Anal. Appl.—1982.—Vol. 87, № 2.—P. 528–550. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90142-1.
8. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1975.—Т. 39, № 3.—С. 657–702.
9. *Исаев К. П.* Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках // Уфим. мат. журн.—2010.—Т. 2, № 1.—С. 71–86.
10. *Луценко В. И.* Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова: дисс. ... к.ф.-м.н.—Уфа: Ин-т математики с ВЦ УНЦ РАН, 1992.
11. *Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.* Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками // Изв. РАН. Сер. матем.—2007.—Т. 71, № 6.—С. 69–90. DOI: 10.4213/im694.
12. *Башмаков Р. А., Махота А. А., Трунов К. В.* Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент // Уфим. мат. журн.—2015.—Т. 7, № 2.—С. 19–34. DOI: 10.13108/2015-7-2-17.
13. *Isaev K. P.* On unconditional exponential bases in weighted spaces on interval of real axis // Lobachevskii Journal of Mathematics.—2017.—Vol. 38, № 1.—P. 48–61. DOI: 10.1134/s1995080217010097.
14. *Seip K.* Density theorems for sampling and interpolation on the Bargmann–Fock space. I // J. Reine Angew. Math.—1992.—Vol. 429.—P. 91–106. DOI: 10.1515/crll.1992.429.91.
15. *Seip K., Wallsten R.* Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann–Fock space. II // J. Reine Angew. Math.—1992.—Vol. 429.—P. 107–113. DOI: 10.1515/crll.1992.429.107.
16. *Borichev A., Dhues R., Kellay K.* Sampling and interpolation in the Bergman and Fock spaces // J. Funct. Anal.—2007.—Vol. 242, № 2.—P. 563–606. DOI: 10.1016/j.jfa.2006.09.002.
17. *Borichev A., Lyubarskii Yu.* Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces // J. Inst. Math. Jussieu.—2010.—Vol. 9, № 3.—P. 449–461. DOI: 10.1017/S147474800900019X.
18. *Baranov A., Belov Yu., Borichev A.* Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces // Stud. Math.—2017.—Vol. 236, № 2.—P. 127–142. DOI: 10.4064/sm8504-9-2016.
19. *Исаев К. П., Луценко А. В., Юлмухаметов Р. С.* Безусловные базисы в слабовесовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2018.—Т. 30, № 2.—С. 145–162.
20. *Nikolski N. K.* Functions, and Systems: an Easy Reading. Vol. 1.—Hardy–Hankel–Toeplitz: Amer. Math. Soc., Providence (R. I.), 2002.
21. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Математика. Т. 4. Уч. записки Моск. гос. ун-та.—1951.—Т. 148.—М.: Изд-во Моск. ун-та.—С. 69–107.

Статья поступила 23 мая 2020 г.

Исаев Константин Петрович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `orbit81@list.ru`
http://orcid.org/0000-0002-3680-0048

Юлмухаметов Ринад Салаватович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 85–99

UNCONDITIONAL BASES IN RADIAL HILBERT SPACES

Isaev, K. P.[1] and Yulmukhametov, R. S.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,

E-mail: orbit81@list.ru, yulmukhametov@mail.ru

Abstract. We consider a Hilbert space of entire functions H that satisfies the conditions: 1) H is functional, that is the evaluation functionals $\delta_z : f \to f(z)$ are continuous for every $z \in \mathbb{C}$; 2) H has the division property, that is, if $F \in H$, $F(z_0) = 0$, then $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$; 3) H is radial, that is, if $F \in H$ and $\varphi \in \mathbb{R}$, then the function $F(ze^{i\varphi})$ lies in H, and $\|F(ze^{i\varphi})\| = \|F\|$; 4) polynomials are complete in H and $\|z^n\| \asymp e^{u(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, where the sequence $u(n)$ satisfies the condition $u(n+1) + u(n-1) - 2u(n) \succ n^\delta$, $n \in \mathbb{N}$, for some $\delta > 0$. It follows from condition 1) that every functional δ_z is generated by an element $k_z(\lambda) \in H$ in the sense of $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. The function $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ is called the reproducing kernel of the space H. A basis $\{e_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ in Hilbert space H is called a unconditional basis if there exist numbers $c, C > 0$ such that for any element $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in H$ the relation

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$$

holds true. The article describes a method for constructing unconditional bases of reproducing kernels in such spaces. This problem goes back to two closely related classical problems: representation of functions by series of exponentials and interpolation by entire functions.

Key words: Hilbert spaces, entire functions, unconditional bases, reproducing kernels.

Mathematical Subject Classification (2010): 46E22, 30D10.

For citation: *Isaev, K. P. and Yulmukhametov, R. S.* Unconditional Bases in Radial Hilbert Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 85–99 (in Russian). DOI: 10.46698/q8093-7554-9905-q.

References

1. *Aronszajn, N.* Theory of Reproducing Kernels, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 68, no. 3, pp. 337–404. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7.
2. *Hruščev, S. V., Nikol'skii, N. K. and Pavlov, B. S.* Unconditional Bases of Exponentials and of Reproductional Kernels, *Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics*, 1981, vol. 864, pp. 214–335. DOI: 10.1007/BFb0097000.
3. *Leontev, A. F. Ryady eksponent* [Exponential Series], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
4. *Korobeinik, Yu. F.* Representing Systems, *Russian Mathematical Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.
5. *Isaev, K. P.* Representing Exponential Systems in Spaces of Analytical Functions, *Complex Analysis. Entire Functions and Their Applications, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, Moscow, VINITI, 2019, vol. 161, pp. 3–64 (in Russian).
6. *Isaev, K. P., Trounov, K. V. and Yulmukhamtov, R. S.* Representing Systems of Exponentials in Projective Limits of Weighted Subspaces of $H(D)$, *Izvestiya: Mathematics*, 2019, vol. 83, no. 2, pp. 232–250. DOI: 10.1070/IM8728.
7. *Russell, D. L.* On Exponential Bases for the Sobolev Spaces over an Interval, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1982, vol. 87, no. 2, pp. 528–550. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90142-1.
8. *Levin, B. Ya. and Lyubarskii, Yu. I.* Interpolation by Means of Special Classes of Entire Functions and Related Expansions in Series of Exponentials, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1975, vol. 9, no. 3, pp. 621–662. DOI: 10.1070/IM1975v009n03ABEH001493.
9. *Isaev, K. P. Bazisy Rissa iz eksponent v prostranstvakh Bergmana na vypuklykh mnogougolnikakh* [Riesz Bases of Exponents in Bergman Spaces on Convex Polygons], *Ufimskii Matematicheskii Zhurnal*, 2010, vol. 2, no. 1, pp. 71–86 (in Russian).

10. *Lutsenko, V. I. Bezuslovnye bazisy iz eksponent v prostranstvakh Smirnova* [Unconditional bases of exponentials in Smirnov spaces], Dis. ... k.f.-m. n., Ufa, Inst. Math. Comp. Centre UFRC RAS, 1992 (in Russian).
11. *Isaev, K. P. and Yulmukhamtov, R. S.* The Absence of Unconditional Bases of Exponentials in Bergman Spaces on Non-Polygonal Domains, *Izvestiya: Mathematics*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 1145–1166. DOI: 10.1070/IM2007v071n06ABEH002385.
12. *Bashmakov, R. A., Makhota, A. A. and Trounov, K. V.* On Absence Conditions of Unconditional Bases of Exponents, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 17–32. DOI: 10.13108/2015-7-2-17.
13. *Isaev, K. P.* On Unconditional Exponential Bases in Weighted Spaces on Interval of Real Axis, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, no. 1, pp. 48–61. DOI: 10.1134/s1995080217010097.
14. *Seip, K.* Density Theorems for Sampling and Interpolation on the Bargmann–Fock Space. I, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1992, vol. 429, pp. 91–106. DOI: 10.1515/crll.1992.429.91.
15. *Seip, K. and Wallsten, R.* Density Theorems for Sampling and Interpolation in the Bargmann–Fock Space. II, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1992, vol. 429, pp. 107–113. DOI: 10.1515/crll.1992.429.107.
16. *Borichev, A., Dhues, R. and Kellay, K.* Sampling and Interpolation in the Bergman and Fock Spaces, *Journal of Functional Analysis*, 2007, vol. 242, no. 2, pp. 563–606. DOI: 10.1016/j.jfa.2006.09.002.
17. *Borichev, A. and Lyubarskii, Yu.* Riesz Bases of Reproducing Kernels in Fock Type Spaces, *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 2010, vol. 9, no. 3, pp. 449–461. DOI: 10.1017/S147474800900019X.
18. *Baranov, A., Belov, Yu. and Borichev, A.* Fock Type Spaces with Riesz Bases of Reproducing Kernels and de Branges Spaces, *Studia Mathematica*, 2017, vol. 236, no. 2, pp. 127–142. DOI: 10.4064/sm8504-9-2016.
19. *Isaev, K. P., Lutsenko, A. V. and Yulmukhamtov, R. S.* Unconditional Bases in Weakly Weighted Spaces of Entire Functions, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019, vol. 30, no. 2, p. 253–265. DOI: 10.1090/spmj/1541.
20. *Nikolski, N. K. Functions, and Systems: an Easy Reading*, vol. 1, Hardy, Hankel, and Toeplitz, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
21. *Bari, N. K.* Biorthogonal Systems and Bases in Hilbert Space, *Mathematics, vol.* 4, *Uchenye Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, Moscow, Moscow Univ. Press, 1951, vol. 148, pp. 69–107 (in Russian).

Received May 23, 2020

Konstantin P. Isaev
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Senior Researcher
E-mail: `orbit81@list.ru`
http://orcid.org/0000-0002-3680-0048

Rinad S. Yulmukhametov
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Chief Researcher
E-mail: `yulmukhametov@mail.ru`