Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 3, С. 100–111

УДК 517.982.3
DOI 10.46698/t9892-7905-1143-o

О ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В ОГРАНИЧЕННОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ И ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ, И ЕГО СОПРЯЖЕННОМ

И. Х. Мусин[1]

[1] Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: musin_ildar@mail.ru

Девяностолетию Юрия Фёдоровича Коробейника посвящается

Аннотация. В работе рассматривается локально выпуклое пространство функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области многомерного комплексного пространства и гладких вплоть до границы, с топологией, определяемой счетным семейством норм, образованных при помощи семейства $\mathfrak{M}$ логарифмически выпуклых последовательностей положительных чисел специального вида. Благодаря условиям на указанные последовательности данное пространство является пространством Фреше — Шварца. Изучается задача описания сильного сопряженного для этого пространства в терминах преобразования Лапласа функционалов. Интерес к ней связан с исследованиями Б. А. Державца классических проблем теории линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, А. В. Абанина, С. В. Петрова и К. П. Исаева современных проблем теории абсолютно представляющих систем в различных пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях комплексного пространства, с заданной граничной гладкостью, при решении которых важную роль сыграли полученные ими теоремы типа Пейли — Винера — Шварца. Основной результат работы, полученный в теореме 1, утверждает, что преобразование Лапласа линейных непрерывных функционалов устанавливает изоморфизм между сильным сопряженным к рассматриваемому функциональному пространству и некоторым пространством целых функций экспоненциального типа в $\mathbb{C}^n$, представляющим собой внутренний индуктивный предел весовых банаховых пространств целых функций. Отметим, что в рассматриваемом случае удалось получить аналитическую реализацию сопряженного пространства при меньших ограничениях на семейство $\mathfrak{M}$ по сравнению с работой автора 2002 г. Основу доказательства теоремы 1 в настоящей работе составляют схема, предложенная М. Наймарком и Б. А. Тейлором, и ряд предыдущих результатов автора.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, целые функции, логарифмически выпуклая последовательность.

Mathematical Subject Classification (2000): 32A10, 46E10.

Образец цитирования: *Мусин И. Х.* О пространстве функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области и гладких вплоть до границы, и его сопряженном // Владикавк. мат. журн.—2020.— Т. 22, вып. 3.—С. 100–111. DOI: 10.46698/t9892-7905-1143-o.

1. Введение

1.1. О задаче. Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $A_c(\Omega)$ — пространство функций, голоморфных в Ω и непрерывных на $\overline{\Omega}$ — замыкании области Ω. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ через $A_c^{(m)}(\Omega)$ обозначим пространство голоморфных в Ω функций f, все частные производные которых $(D^\alpha f)(z) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$ (если $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, то $(D^\alpha f)(z) := f(z)$) до порядка m включительно допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$. Таким образом, $A_c^{(0)}(\Omega) = A_c(\Omega)$. Пространство $A_c^{(m)}(\Omega)$ наделим нормой

$$q_m(f) = \sup_{z \in \Omega,\, |\alpha| \leqslant m} |(D^\alpha f)(z)|, \quad f \in A_c^{(m)}(\Omega).$$

Пусть $A^\infty(\Omega)$ — проективный предел пространств $A_c^{(m)}(\Omega)$.

Обозначим через $\mathscr{V}$ множество возрастающих числовых последовательностей $(m_k)_{k=0}^\infty$ с $m_0 = 1$, удовлетворяющих условиям:

δ_1) $(m_k^2 \leqslant m_{k-1} m_{k+1})$ $(\forall\, k \in \mathbb{N})$ (логарифмическая выпуклость);

δ_2) $(\exists\, Q_1, Q_2 > 0)$ $(\forall\, k \in \mathbb{Z}_+)$ $(m_k \geqslant Q_1 Q_2^k k!)$.

В работах [1–4] (в [3, 4] при $n = 1$) рассматривалась задача описания сопряженного в терминах преобразования Лапласа функционалов для пространства Фреше $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ функций, голоморфных в выпуклой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ и гладких вплоть до ее границы, представляющего собой проективный предел построенных по семейству $\mathfrak{M} = \{M^{(m)}\}_{m=0}^\infty$ определенных последовательностей $M^{(m)} = (M_k^{(m)})_{k=0}^\infty \in \mathscr{V}$ нормированных пространств

$$A_m(\Omega) = \left\{ f \in A^\infty(\Omega) :\ p_m(f) = \sup_{z \in \Omega,\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(D^\alpha f)(z)|}{M_{|\alpha|}^{(m)}} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Решение этой задачи имеет важное значение при исследовании проблем теории дифференциальных операторов [1], теории абсолютно представляющих систем [3–5] в пространстве $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. При условии, что граница области Ω является C^2-гладкой, семейство $\left\{ \left(L_k^{(m)}\right)_{k=0}^\infty \right\}_{m=0}^\infty$ последовательностей $\left(L_k^{(m)}\right)_{k=0}^\infty$ чисел $L_k^{(m)} = \frac{M_k^{(m)}}{k!}$ при любом $m \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условиям:

β_1) последовательность $\left(L_k^{(m)}\right)_{k=0}^\infty$ является возрастающей и логарифмически выпуклой;

β_2) $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{M_{k+1}^{(m)}}{M_k^{(m)}} \right)^{\frac{1}{k}} < +\infty$;

β_3) $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\frac{M_k^{(m)}}{k!} \right)^{\frac{1}{k}} = +\infty$;

β_4) $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{Q^k M_k^{(m+1)}}{M_k^{(m)}} = 0 \quad (\forall\, Q > 0)$;

и функции

$$h_m(x) = \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{L_k^{(m)}}{k!} x^{k-1}, \quad x > 0,\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

удовлетворяют условию

$$\sup_{x > 0} \frac{h_{m+1}(x)}{x^2 h_m(x)} < \infty, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Описание сопряженного было получено Б. А. Державцом [1] с помощью метода псевдоаналитического продолжения [6]. Условие C^2-гладкости границы области Ω было снято в [2], при этом не требовалось выполнение условия β_1). В [3, 4] эта задача изучалась с точки зрения возможных применений в теории рядов экспонент, развитой А. Ф. Леонтьевым [7], и теории абсолютно представляющих систем Ю. Ф. Коробейника [8]. В частности, К. П. Исаев в [4] рассматривал последовательность $M = (M_k)_{k=0}^\infty$ из $\mathscr{V}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k}{M_{k+1}}<\infty$, доопределял ее для отрицательных индексов, полагая $M_{-k}=1$ для $k\in\mathbb{N}$, и решил указанную задачу при $n=1$ для случая, когда семейство $\mathfrak{M}$ состоит из последовательностей $M^{(m)}=\left(M_k^{(m)}\right)_{k=0}^{\infty}$ $(m\in\mathbb{Z}_+)$, где $M_k^{(m)}=M_{k-m}$. Отметим, что в этом случае от последовательностей семейства $\mathfrak{M}$ не требуется выполнение условия $\beta_1)$ и они не обязаны удовлетворять тем или иным из условий $\beta_2)$–$\beta_4)$.

В данной заметке по последовательности $M=(M_k)_{k=0}^{\infty}$ из $\mathscr{V}$, удовлетворяющей условию

$\delta_3)$ последовательность $\left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ возрастает и неограниченна,

строится семейство $\mathfrak{M}=\{M^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ последовательностей $M^{(m)}$, определяемых так же, как и в работе [4], и для пространства $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ в разделе 3 описывается сопряженное в терминах преобразования Лапласа функционалов. В разделе 2 приводятся вспомогательные сведения и результаты, используемые при доказательстве теоремы 1.

1.2. Обозначения и определения. Для $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ полагаем

$$|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\quad \alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,\quad D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}.$$

Для $u=(u_1,\dots,u_n)$, $v=(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{C}^n$

$$\langle u,v\rangle=u_1v_1+\ldots+u_nv_n,\quad \|u\|=\sqrt{|u_1|^2+\cdots+|u_n|^2},\quad |u|_n=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|u_j|.$$

Пространство голоморфных в области $\mathscr{O}\subseteq\mathbb{C}^n$ функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $\mathscr{O}$ обозначаем $H(\mathscr{O})$.

Для локально выпуклого пространства X через X' обозначаем пространство линейных непрерывных функционалов на X, через X^* — сильное сопряженное пространство.

Преобразование Лапласа $\widehat{T}$ функционала $T\in(A^{\infty}(\Omega))^*(A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega))$ определим по формуле $\widehat{T}(z)=T\left(e^{\langle\lambda,z\rangle}\right)$, $z\in\mathbb{C}^n$. Пусть $H_{\Omega}(z)=\sup_{\lambda\in\Omega}\operatorname{Re}\langle\lambda,z\rangle$, $z\in\mathbb{C}^n$.

Всюду далее семейство $\mathfrak{M}$ состоит из последовательностей $M^{(m)}=(M_k^{(m)})_{k=0}^{\infty}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, определяемых по последовательности $M=(M_k)_{k=0}^{\infty}\in\mathscr{V}$, удовлетворяющей условию $\delta_3)$, по правилу: $M_k^{(m)}=M_{k-m}$ для $k\geqslant m$, $M_k^{(m)}=1$ для $k<m$.

С каждой последовательностью $M^{(m)}$ ассоциируем корректно определенную в силу $\delta_2)$ функцию w_m по правилу:

$$w_m(r)=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\ln\frac{r^k}{M_k^{(m)}},\quad r>0;\quad w_m(0)=0.$$

.

1.3. Основной результат. Пусть

$$P_m=\left\{F\in H(\mathbb{C}^n):\|F\|_m=\sup_{z\in\mathbb{C}^n}\frac{|F(z)|}{\exp(H_{\Omega}(z)+w_m(|z|_n))}<\infty\right\},\quad m\in\mathbb{Z}_+.$$

Ясно, что банахово пространство P_m непрерывно вложено в P_{m+1} для каждого $m\in\mathbb{Z}_+$. Через $P_{\mathfrak{M}}$ обозначим индуктивный предел пространств P_m.

Теорема 1. *Отображение $L:T\in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)\to\widehat{T}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и $P_{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство теоремы основано на идеях М. Наймарка [9] и Б. А. Тейлора [10] и использует ряд результатов из [2] и [11], приведенных в разделе 2.

2. Вспомогательные сведения

Пусть

$$E_m = \left\{ F \in H(\mathbb{C}^n) : N_m(F) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|F(z)|}{(1 + \|z\|)^m \exp(H_\Omega(z))} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Через E обозначим индуктивный предел пространств E_m.

Теорема 2. *Отображение* $\mathscr{L} : T \in (A^\infty(\Omega))^* \to \widehat{T}$ *устанавливает топологический изоморфизм между пространствами* $(A^\infty(\Omega))^*$ *и* E.

Теорема 2 получена в [2] (см. теорема 1). В предположении C^2-гладкости границы области Ω теорема 2 доказана Б. А. Державцом [1].

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{O}$ *— область голоморфности в* $\mathbb{C}^n$, h *— плюрисубгармоническая функция в* $\mathscr{O}$ *и* φ *— плюрисубгармоническая функция в* $\mathbb{C}^n$ *такая, что при некоторых* $c_\varphi > 0$ *и* $\nu > 0$

$$|\varphi(z) - \varphi(t)| \leqslant c_\varphi, \quad \text{если} \quad \|z - t\| \leqslant \frac{1}{(1 + \|t\|)^\nu}.$$

Пусть функция $S \in H(\mathbb{C}^n \times \mathscr{O})$ *удовлетворяет неравенству*

$$|S(z, \zeta)| \leqslant e^{\varphi(z) + h(\zeta)}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \ \zeta \in \mathscr{O},$$

и $S(\zeta, \zeta) = 0$ *для* $\zeta \in \mathscr{O}$. *Тогда существуют функции* $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^n \times \mathscr{O})$ *такие, что:*

a) $S(z, \zeta) = \sum_{j=1}^n S_j(z, \zeta)(z_j - \zeta_j)$, $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathscr{O}$;

b) *при некотором* $m > 0$, *не зависящем от* S,

$$\int\limits_{\mathbb{C}^n \times \mathscr{O}} \frac{|S_j(z, \zeta)|^2}{e^{2(\varphi(z) + h(\zeta) + m \ln(1 + \|(z, \zeta)\|))}} \, d\lambda_{2n}(z, \zeta) < \infty, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 3 доказана в [11] (см. лемма 11).

Напомним, что пространство, представимое в виде проективного предела последовательности нормированных пространств S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно линейных непрерывных отображений $g_{mn} : S_n \to S_m$, $m < n$, таких, что $g_{n,n+1}$ вполне непрерывно для каждого n, называется пространством (M^*) [12].

Лемма 1. *Пространство* $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ *— пространство* (M^*).

Доказательство леммы 1 почти дословно совпадает с доказательством леммы 6 в [2]. Надо лишь в соответствующем месте воспользоваться условием δ_3) вместо условия i_4) из [2]. Таким образом, пространство Фреше $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ является пространством Фреше — Шварца [13, п. 1.5].

Лемма 2. *Пусть числа* $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ *таковы, что для* $T \in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$

$$|T(f)| \leqslant c p_m(f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega).$$

Тогда функционал T *может быть представлен в виде:*

$$T(f) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} T_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega),$$

где $T_\alpha \in A^*_c(\Omega)$, *причем для норм* $\|T_\alpha\|_{A^*_c(\Omega)}$ *функционалов* T_α *справедливо неравенство* $\|T_\alpha\|_{A^*_c(\Omega)} \leqslant \frac{c}{M^{(m)}_{|\alpha|}}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$.

Доказательство этой леммы проводится по стандартной схеме [10, предложение 2.11, следствие 2.12] с использованием по существу условия δ_3).

Лемма 3. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $w_m(r) = m \ln r + w_0(r)$ для $r \geqslant 1$, $w_m(r) = 0$ для $r \in (0,1)$.*

$\lhd$ Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Вначале отметим, что $w_m(0) = w_0(0)$. Для $r > 0$ имеем

$$w_m(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k^{(m)}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_{k-m}} = \sup_{p \in \mathbb{Z},\, p \geqslant -m} \ln \frac{r^{m+p}}{M_p}$$

$$= m \ln r + \max \left\{ \sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^p}{M_p}, -\ln r, \ldots, -m \ln r \right\}.$$

Отсюда получаем, что $w_m(r) = m \ln r + w_0(r)$ при $r \geqslant 1$. Для $r \in (0,1)$, $w_0(r) = 0$, следовательно, $w_m(r) = 0$. $\rhd$

Замечание. Пользуясь леммой 3 и теоремой Монтеля, легко показать, что для любого $m \in \mathbb{N}$ вложения $\gamma_{m,m+1} : P_m \to P_{m+1}$ вполне непрерывны. Поэтому $P_{\mathfrak{M}}$ — пространство (LN^*) [12] или, придерживаясь более современной терминологии, пространство DFS [13].

Лемма 4. *Для любого $z \in \mathbb{C}^n$ функция $f_z(\lambda) = \exp(\langle \lambda, z \rangle)$ принадлежит $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$, причем для каждого $m \in \mathbb{N}$*

$$p_m(f_z) \leqslant \exp(H_\Omega(z) + w_m(|z|_n)) < \infty.$$

Лемма 5. *Для любого $T \in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ функция $\widehat{T}$ — целая.*

Доказательство этой леммы совпадает с доказательством леммы 4 в [2] и по существу использует условие δ_2).

Лемма 6. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что $\frac{M_k}{M_{k+1}} \leqslant \frac{C}{k}$, $k \in \mathbb{N}$.*

$\lhd$ Отметим вначале, что $w_0(r) = 0$ для $r \in [0, M_1]$ и из условия δ_2) следует, что найдется число $A > 0$ такое, что

$$w_0(r) \leqslant Ar, \quad r \geqslant 0. \tag{1}$$

Далее, пусть $N(r) = \min\left\{k \in Z_+ : w_0(r) = \ln \frac{r^k}{M_k}\right\}$, $r > 0$. Проверяется, что $N(r) = k$ для $r \in \left(\frac{M_k}{M_{k-1}}, \frac{M_{k+1}}{M_k}\right]$ $(k \in \mathbb{N})$, $N(r) = 0$ для $r \in (0, M_1]$. Положим $N(0) = 0$. Пользуясь равенством (см. [14, § 67])

$$w_0(r) - w_0(1) = \int_1^r \frac{N(t)}{t}\, dt, \quad r > 1,$$

и оценкой (1), имеем $N(r) \leqslant Aer$, $r \geqslant 0$. Таким образом, каково бы ни было $k \in \mathbb{N}$, для $r \in \left(\frac{M_k}{M_{k-1}}, \frac{M_{k+1}}{M_k}\right]$ имеем

$$k = N(r) \leqslant Aer \leqslant Ae\frac{M_{k+1}}{M_k}.$$

Отсюда, полагая $C = Ae$, получаем искомое утверждение. $\rhd$

Следствие 1. *Для натуральных $p \geqslant 2$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+p}}$ сходится.*

Следствие 2. *Для натуральных $p \geqslant n+1$ ряд $\sum_{|\alpha| \geqslant 0} \frac{M_{|\alpha|}}{M_{|\alpha|+p}}$ сходится.*

3. Доказательство теоремы 1

$\lhd$ Очевидно, отображение $L : T \in A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega) \to \widehat{T}$ линейно.

Прежде чем показать, что отображение L действует из $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ в $P_{\mathfrak{M}}$ непрерывно, заметим, что топология пространства $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ может быть описана следующим образом. Пусть $W_k = \{f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega) :\ p_k(f) \leqslant 1\}$,

$$W_k^0 = \{F \in A'_{\mathfrak{M}}(\Omega) :\ |F(f)| \leqslant 1\ (\forall\, f \in W_k)\}$$

— поляра в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ окрестности W_k, $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $V_k = \bigcup_{\alpha>0}(\alpha W_k^0)$ — векторное подпространство в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$, порожденное полярой W_k^0. Наделим V_k топологией, введя в V_k норму $\mathscr{N}_k(F) = \sup_{f\in W_k} |F(f)|$, $F \in V_k$. Отметим, что пространство V_k непрерывно вложено в пространство V_{k+1} и $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega) = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$. Определим в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ топологию λ внутреннего индуктивного предела пространств V_k. Поскольку $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ — пространство (M^*), то $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ — монтелевское, а значит и рефлексивное пространство. Но тогда сильная топология в $A'_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ совпадает с топологией λ [15, с. 699–700]. Пусть теперь $S \in V_m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $|S(f)| \leqslant \mathscr{N}_m(S)$, $f \in W_m$. Отсюда следует, что $|S(f)| \leqslant \mathscr{N}_m(S)p_m(f)$, $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Теперь, воспользовавшись леммой 4, имеем

$$|\hat{S}(z)| \leqslant \mathscr{N}_m(S) \exp(H_\Omega(z) + w_m(|z|_n)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Итак, $\widehat{S} \in P_{\mathfrak{M}}$ и, кроме того, $\|\widehat{S}\|_m \leqslant \mathscr{N}_m(S)$. Таким образом, отображение L действует из $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ в $P_{\mathfrak{M}}$ непрерывно.

Докажем вначале, что отображение L сюръективно. Пусть целая функция $F \in P_{\mathfrak{M}}$, т. е. при некоторых $m \in \mathbb{Z}_+$, $c > 0$

$$|F(z)| \leqslant c \exp(H_\Omega(z) + w_m(|z|_n)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Так как

$$|H_\Omega(z) - H_\Omega(u)| \leqslant \left(\sup_{\eta\in\Omega} \|\eta\|\right)\|z - u\|, \quad z, u \in \mathbb{C}^n, \tag{2}$$

и при некотором $b_m > 0$ для $r_1, r_2 \geqslant 0$ таких, что $|r_2 - r_1| \leqslant 1$ (см. доказательство леммы 1 в [16])

$$|w_m(r_2) - w_m(r_1)| \leqslant b_m, \tag{3}$$

то плюрисубгармоническая функция $H_\Omega(z)+w_m(|\zeta|_n)$, $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяет условиям следствия 15.1.4. из [17]. Поэтому существует функция $U \in H(\mathbb{C}^{2n})$ такая, что $U(z, z) = F(z)$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$ и для любых $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$

$$|U(z,\zeta)| \leqslant c_1\bigl(1 + \bigl(\|z\|^2 + \|\zeta\|^2\bigr)^{\frac{1}{2}}\bigr)^{4n+1} \exp(H_\Omega(z) + w_m(|\zeta|_n)),$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная. Пользуясь леммой 3, имеем

$$|U(z,\zeta)| \leqslant c_2(1 + \|z\|)^{4n+1} \exp(H_\Omega(z) + w_{m+4n+1}(|\zeta|_n)), \quad z, \zeta \in \mathbb{C}^n, \tag{4}$$

где $c_2 > 0$ — некоторая постоянная. Разложим $U(z,\zeta)$ в степенной ряд по степеням ζ: $U(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} U_\alpha(z)\zeta^\alpha$. Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, неравенством (4), леммой 3, равенством (справедливым ввиду логарифмической выпуклости последовательности M)

$$\inf_{r>0} \frac{\exp(w_0(r))}{r^p} = \frac{1}{M_p}, \quad p \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

получим для целой функции U_α оценку

$$|U_\alpha(z)| \leqslant \frac{c_2(1+\|z\|)^{4n+1}\exp(H_\Omega(z))}{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)}}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

По теореме 2 существуют функционалы $\mathscr{F}_\alpha \in (A^\infty(\Omega))^*$ такие, что $\widehat{\mathscr{F}_\alpha} = U_\alpha$. Так как множество $\{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в E_{4n+1}, а значит, и в E, то в силу теоремы 2 множество $\mathscr{B} = \{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} \mathscr{F}_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $(A^\infty(\Omega))^*$. Но тогда существуют числа $l \in \mathbb{Z}_+$ и $c_3 > 0$ такие, что

$$|\mathscr{F}_\alpha(f)| \leqslant \frac{c_3 q_l(f)}{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)}}, \quad f \in A^\infty(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{6}$$

Действительно, в противном случае для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдутся функционал $M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} F_{\alpha_j} \in \mathscr{B}$ и функция $f_j \in A^\infty(\Omega)$ такие, что

$$|\mathscr{F}_{\alpha_j}(f_j)| > \frac{j q_j(f_j)}{M_{|\alpha_j|}^{(m+4n+1)}}\ .$$

Определим функции $\psi_j(z) = \frac{f_j(z)}{\sqrt{j} q_j(f_j)}$, $z \in \mathbb{C}^n$. Поскольку для любых $m \in \mathbb{Z}_+$ и $f \in A^\infty(\Omega)$ имеем $q_m(f) \leqslant q_{m+1}(f)$, то $q_m(\psi_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Таким образом, $\psi_j \to 0$ в $A^\infty(\Omega)$ при $j \to \infty$ и, значит, множество $B = \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ ограничено в $A^\infty(\Omega)$. Так как $\mathscr{B}$ — ограниченное множество в $(A^\infty(\Omega))^*$, то найдется число $\mu > 0$ такое, что $\mathscr{B} \subset \mu B^\circ$, где B° — поляра множества B в $(A^\infty(\Omega))'$. Таким образом, для любых $F \in \mathscr{B}$ и $\psi \in B$ имеем $|F(\psi)| \leqslant \mu$. Между тем, $M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} \mathscr{F}_{\alpha_j}(\psi_j) \to \infty$ при $j \to \infty$, так как

$$\left| M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} \mathscr{F}_{\alpha_j}(\psi_j) \right| = \frac{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)} |\mathscr{F}_{\alpha_j}(f_j)|}{\sqrt{j} q_j(f_j)} > \sqrt{j}.$$

Итак, неравенство (6) доказано. Отметим, что согласно ему при любом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ для всех $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$|\mathscr{F}_\alpha(D^\alpha f)| \leqslant c_3 p_{m+5n+l+2}(f) \frac{M_{|\alpha|+l}^{(m+5n+l+2)}}{M_{|\alpha|}^{(m+4n+1)}}\ . \tag{7}$$

Положим теперь $\mathscr{F}(f) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \mathscr{F}_\alpha(D^\alpha f)$, $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. В силу неравенства (7) и следствия 2 функционал $\mathscr{F}$ является линейным непрерывным на $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Очевидно, $\widehat{\mathscr{F}} = F$. Таким образом, отображение L сюръективно.

Покажем, что отображение L взаимно однозначно. Пусть для $T \in (A_{\mathfrak{M}}(\Omega))'$ имеем $\widehat{T} \equiv 0$. Покажем, что $T(f) = 0$ для любого $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Так как T — линейный непрерывный функционал на $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$, то при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $c_4 > 0$ имеем

$$|T(f)| \leqslant c_4 p_m(f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega).$$

Воспользовавшись леммой 2, представим функционал T в виде:

$$T(f) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} T_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega),$$

где $T_\alpha \in A_c^*(\Omega)$, причем для норм $\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)}$ функционалов T_α имеем

$$\|T_\alpha\|_{A_c^*(\Omega)} \leqslant \frac{c_4}{M_{|\alpha|}^{(m)}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отсюда получаем, что $\widehat{T}(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} \widehat{T}_\alpha(z) z^\alpha$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$, причем, для целых функций $\widehat{T}_\alpha$ справедлива оценка

$$|\widehat{T}_\alpha(z)| \leqslant \frac{c_4 e^{H_\Omega(z)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ z \in \mathbb{C}^n. \tag{8}$$

Рассмотрим целую функцию $S(u,z) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \widehat{T}_\alpha(z) u^\alpha$, $z,u \in \mathbb{C}^n$. Пользуясь неравенством (8) и следствием 2, для $(u,z) \in \mathbb{C}^{2n}$ имеем

$$|S(u,z)| \leqslant c_4 e^{H_\Omega(z)} \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{|u|_n^{|\alpha|}}{M_{|\alpha|}^{(m)}} \leqslant c_4 c_5 e^{H_\Omega(z) + w_{m+n+1}(|u|_n)},$$

где $c_5 = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} \frac{M_{|\alpha|}^{(m+n+1)}}{M_{|\alpha|}^{(m)}}$. Отметим, что $S(z,z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$, и функции H_Ω и w_{m+n+1} удовлетворяют условиям теоремы 3 (в силу неравенств (2) и (3)). Поэтому существуют функции $S_1, \ldots, S_n \in H(\mathbb{C}^{2n})$ такие, что $S(u,z) = \sum_{j=1}^n S_j(u,z)(u_j - z_j)$ ($(u,z) \in \mathbb{C}^{2n}$) и при некотором $p \in \mathbb{N}$, не зависящем от S,

$$\int\limits_{\mathbb{C}^{2n}} \frac{|S_j(u,z)|^2}{e^{2(H_\Omega(z) + w_{m+n+1}(|u|_n) + p\ln(1+\|(u,z)\|))}}\, d\lambda_{2n}(u,z) < \infty, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда, пользуясь плюрисубгармоничностью функций $|S_j(u,z)|$ в $\mathbb{C}^{2n}$, неравенствами (2) и (3), получаем, что при некотором $c_6 > 0$

$$|S_j(u,z)| \leqslant c_6 (1 + \|(u,z)\|)^p e^{H_\Omega(z) + w_{m+n+1}(|u|_n)}, \quad (u,z) \in \mathbb{C}^{2n},\ j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, при некотором $c_7 > 0$

$$|S_j(u,z)| \leqslant c_7 (1 + \|z\|)^p e^{H_\Omega(z) + w_{m+n+p+1}(|u|_n)}, \quad (u,z) \in \mathbb{C}^{2n},\ j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Разложим S_j в степенной ряд по степеням u:

$$S_j(u,z) = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} S_{j,\alpha}(z) u^\alpha, \quad (u,z) \in \mathbb{C}^{2n},\ j = 1, \ldots, n.$$

Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, неравенством (9) и равенством (5), получим

$$|S_{j,\alpha}(z)| \leqslant \frac{c_7 (1 + \|z\|)^p e^{H_\Omega(z)}}{M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)}}.$$

По теореме 2 существуют функционалы $\Psi_{j,\alpha} \in (A^\infty(\Omega))^*$ такие, что $\widehat{\Psi}_{j,\alpha} = S_{j,\alpha}$. Ввиду последнего неравенства семейство $\left\{S_{j,\alpha} M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)}\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\, j=1,\ldots,n}$ ограничено в E. Значит (снова по теореме 2), семейство $\mathscr{B} = \left\{M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)} \Psi_{j,\alpha}\right\}_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\, j=1,\ldots,n}$ ограничено в $(A^\infty(\Omega))^*$. Но в таком случае (как было показано ранее) найдутся числа $r \in \mathbb{Z}_+$ и $c_8 > 0$ такие, что при любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $j = 1, \dots, n$

$$|\Psi_{j,\alpha}(f)| \leqslant \frac{c_8 q_r(f)}{M_{|\alpha|}^{(m+n+p+1)}}, \quad f \in A^\infty(\Omega). \tag{10}$$

Для $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ с отрицательными компонентами, $j = 1, \dots, n$ пусть $\Psi_{j,\alpha}$ — нулевой функционал из $(A^\infty(\Omega))^*$, $S_{j,\alpha}(z) = 0$ для $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда для $(u, z) \in \mathbb{C}^{2n}$ имеем

$$S(u,z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \big(S_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(z) - S_{j,\alpha}(z) z_j\big) u^\alpha.$$

Отсюда в силу теоремы 2 получаем, что

$$\widehat{T}_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\widehat{\Psi}_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(z) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\big(e^{\langle \lambda, z\rangle}\big)\right)\right), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Снова пользуясь теоремой 2, имеем

$$T_\alpha(f) = \sum_{j=1}^{n} \left(\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(f) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} f\right)\right), \quad f \in A^\infty(\Omega).$$

Поэтому для $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$

$$T(f) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} \sum_{j=1}^{n} \left(\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(D^\alpha f) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} (D^\alpha f)\right)\right).$$

Для $N \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, n$ определим множества

$$B_N = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n : \ \alpha_1 \leqslant N, \dots, \alpha_n \leqslant N\},$$

$$R_{N,j} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n : \ \alpha_1 \leqslant N, \dots, \alpha_j = N, \dots, \alpha_n \leqslant N\},$$

определим функционал T_N на $A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ по правилу

$$T_N(f) = \sum_{\alpha \in B_N} \sum_{j=1}^{n} \left(\Psi_{j,(\alpha_1,\dots,\alpha_j-1,\dots,\alpha_n)}(D^\alpha f) - \Psi_{j,\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} (D^\alpha f)\right)\right).$$

Тогда $T(f) = \lim_{N\to\infty} T_N(f)$, $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$. Легко видеть (см. доказательство теоремы 2 в [11]), что

$$T_N(f) = -\sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \Psi_{j,\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} (D^\beta f)\right), \quad f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega).$$

Пользуясь по ходу неравенством (10), для любых $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$|T_N(f)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \left| \Psi_{j,\beta}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} (D^\beta f)\right)\right|$$

$$\leqslant c_8 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \frac{\sup\limits_{\lambda \in \Omega,\, |\alpha| \leqslant r} \big|(D^\alpha\big(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}(D^\beta f)\big)(\lambda)\big|}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}} \leqslant c_8 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta \in R_{N,j}} \frac{p_s(f) M_{|\beta|+r+1}^{(s)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}}$$

$$\leqslant c_8 n p_s(f) \sum_{|\beta| \geqslant N} \frac{M_{|\beta|+r+1}^{(s)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}} = c_8 n p_s(f) \sum_{|\beta| \geqslant N} \frac{M_{|\beta|}^{(s-r-1)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}}.$$

Положим теперь $s = m + 2n + p + r + 3$. При этом значении s ряд $\sum_{|\beta|\geqslant 0} \frac{M_{|\beta|}^{(s-r-1)}}{M_{|\beta|}^{(m+n+p+1)}}$ сходится (согласно следствию 2). Отсюда и из последнего неравенства следует, что для любого $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ $T_N(f) \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, $T(f) = 0$ для любого $f \in A_{\mathfrak{M}}(\Omega)$.

Итак, L — линейное непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ на $P_{\mathfrak{M}}$. По теореме об открытом отображении [18, теорема 3.2], [19, приложение 1, теорема 2] L осуществляет топологический изоморфизм между $A^*_{\mathfrak{M}}(\Omega)$ и $P_{\mathfrak{M}}$. $\rhd$

Благодарность. Выражаю искреннюю признательность рецензентам за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Литература

1. *Державец Б. А.* Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных: Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.—Ростов н/Д: РГУ, 1983.—102 с.
2. *Musin I. Kh.* Spaces of functions holomorphic in convex bounded domains of $\mathbb{C}^n$ and smooth up to the boundary // Advances in Mathematics Research.—New York: Nova Science Publishers, 2002.—P. 63–74.
3. *Петров С. В.* Существование абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки.—2010.—№ 5.—С. 25–31.
4. *Исаев К. П.* Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $A^\infty(D)$ // Изв. вузов. Математика.—2019.—№ 1.—С. 29–41. DOI: 10.26907/0021-3446-2019-1-29-41.
5. *Абанин А. В., Петров С. В.* Минимальные абсолютно представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций с заданной граничной гладкостью // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 3.—С. 13–30.
6. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl.—1980.—Vol. 115, № 2.—P. 33–58.
7. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
8. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, № 1.—С. 73–126.
9. *Neymark M.* On the Laplace transform of functionals on classes of infinitely differentiable functions // Ark. Math.—1969.—Vol. 7, № 6.—P. 577–594. DOI: 10.1007/BF02590896.
10. *Taylor B. A.* Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Commun. on Pure and Appl. Math.—1971.—Vol. 24, № 1.—P. 39–51.
11. *Musin I. Kh., Yakovleva P. V.* On a space of smooth functions on a convex unbounded set in admitting holomorphic extension in $\mathbb{C}^n$ // Central European Journal of Mathematics.—2012.—Vol. 10, № 2.—P. 665–692. DOI: 10.2478/s11533-011-0142-8.
12. *Себаштьян-и-Сильва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. Сб. переводов.—1957.—Т. 1, № 1.—С. 60–77.
13. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
14. *Валирон Ж.* Аналитические функции.—М.: Гостехиздат, 1957.—235 с.
15. *Эдвардс Р. Е.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1070 с.
16. *Мусин И. Х.* О преобразовании Фурье — Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Мат. сб.—2000.—Т. 191, № 10.—С. 57–86. DOI: 10.4213/sm516.
17. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Мир, 1986.—456 с.
18. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах.—М.: Наука, 1982.—240 с.
19. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—260 с.

Статья поступила 8 мая 2020 г.

Мусин Ильдар Хамитович
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: musin_ildar@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 3, P. 100–111

ON A SPACE OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS ON A BOUNDED CONVEX DOMAIN OF $\mathbb{C}^n$ AND SMOOTH UP TO THE BOUNDARY AND ITS DUAL SPACE

Musin, I. Kh.[1]

[1] Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: musin_ildar@mail.ru

Abstract. A locally convex space of holomorphic functions in a convex bounded domain of multidimensional complex space and smooth up to the boundary is considered in the article. The topology of this space is defined by a countable family of norms constructed with a help of some special logarithmically convex sequences. Due to conditions on the indicated sequences this space is a Fréchet–Schwartz space. The problem of description of the strong dual for this space in terms of the Laplace transforms of functionals is studied in the article. Interest in the problem is connected with the researches by B. A. Derjavets devoted to classical problems of theory of linear differential operators with constant coefficients and the researches by A. V. Abanin, S. V. Petrov and K. P. Isaev of modern problems of the theory of absolutely representing systems in various spaces of holomorphic functions with given boundary smoothness in convex domains of complex space with a help of obtained by them Paley–Wiener–Schwartz type theorems. The main result of the article is Theorem 1. It states that the Laplace transformation establishes an isomorphism between the strong dual for functional space under consideration and some space of entire functions of exponential type in $\mathbb{C}^n$ which is an inductive limit of weighted Banach spaces of entire functions. Note that in this case an analytic representation of the strong dual space is obtained under the less restrictions on the family $\mathfrak{M}$ than in an article of the author published in 2002. In the proof of Theorem 1 we apply the scheme taken from M. Neymark and B. A. Taylor. Also some previous results of the author are essentially used.

Key words: Laplace transform, entire functions, logarithmically convex sequence.

Mathematical Subject Classification (2000): 32A10, 46E10.

For citation: *Musin, I. Kh.* On a Space of Holomorphic Functions on a Bounded Convex Domain of $\mathbb{C}^n$ and Smooth Up to the Boundary and its Dual Space, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 3, pp. 100–111 (in Russian). DOI: 10.46698/t9892-7905-1143-o.

References

1. *Derjavets, B. A. Differencial'nye operatory s postoyannymi koefficientami v prostranstvah analiticheskikh funkcij mnogikh kompleksnykh peremennykh: Diss. na soiskanie uchenoj stepeni kandidata fiz.-mat. nauk* [Differential Operators with Constant Coefficients in Spaces of Analytic Functions of Several Complex Variables], Thesis, Rostov-on-Don, RSU, 1983, 102 p. (in Russian).
2. *Musin, I. Kh.* Spaces of Functions Holomorphic in Convex Bounded Domains of $\mathbb{C}^n$ and Smooth up to the Boundary, *Advances in Mathematics Research*, New York, Nova Science Publishers, 2002, pp. 63–74.
3. *Petrov, S. V.* Existence of Absolutely Representing Systems of Exponentials in Spaces of Analytic Functions, *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestv. nauki* [*Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*], 2010, no. 5, pp. 25–31 (in Russian).

4. *Isaev, K. P.* Representing Systems of Exponentials in Projective Limits of Weigth Subspaces of $A^\infty(D)$, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat*, 2019, no. 1, pp. 29–41 (in Russian). DOI: 10.26907/0021-3446-2019-1-29-41.
5. *Abanin, A. V. and Petrov, S. V.* Minimal Absolutely Representing Systems of Exponential Functions in Spaces of Analytic Functions with Given Boundary Smoothness, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [*Vladikavkaz Math. J.*], 2012, vol. 14, no. 3 pp. 13–30 (in Russian).
6. *Dyn'kin, E. M.* Pseudoanalytic Extension of Smooth Functions. The Uniform Scale, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1980, vol. 115, no. 2, pp. 33–58.
7. *Leont'ev, A. F. Ryady eksponent* [Rows of Exhibitors], Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
8. *Korobeinik, Yu. F.* Representing Systems, *Russian Math. Surveys*, 1981, vol. 36, no. 1, pp. 75–137. DOI: 10.1070/RM1981v036n01ABEH002542.
9. *Neymark, M.* On the Laplace Transform of Functionals on Classes of Infinitely Differentiable Functions, *Ark. Math.*, 1969, vol. 7, no. 6, pp. 577–594. DOI:10.1007/BF02590896.
10. *Taylor, B. A.* Analytically Uniform Spaces of Infinitely Differentiable Functions, *Commun. on Pure and Appl. Mathematics*, 1971, vol. 24, no. 1, pp. 39–51.
11. *Musin, I. Kh. and Yakovleva, P. V.* On a Space of Smooth Functions on a Convex Unbounded Set in Admitting Holomorphic Extension in $\mathbb{C}^n$, *Central European Journal of Mathematics*, 2012, vol. 10, no. 2, pp. 665–692. DOI: 10.2478/s11533-011-0142-8.
12. *Sebashtyan-i-Silva, Zh.* Some Classes of Locally Convex Spaces that are Important in Applications, *Matematika, Sbornik perevodov* [*Maths. Collection of Translations*], 1957, vol. 1, no. 1, pp. 60–77.
13. *Zharinov, V. V.* Compact Families of Locally Convex Topological Vector Spaces, Frechet–Schwartz and Dual Frechet–Schwartz Spaces, *Russian Math. Surveys*, 1979, vol. 34, no. 4, pp. 105–143. DOI: 10.1070/RM1979v034n04ABEH002963.
14. *Valiron, G. Analiticheskie funkcii* [Analytic Functions], Moscow, Gostekhizdat, 1957, 235 p. (in Russian).
15. *Edwards, R. E. Functional Analysis. Theory and Applications*, New York–Toronto–London, Holt, Pineart and Winston, 1965, 781 p.
16. *Musin, I. Kh.* Fourier–Laplace Transformation of Functionals on a Weighted Space of Infinitely Smooth Functions, *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1477–1506. DOI: 10.4213/sm516.
17. *Hörmander, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators II. Differential Operators with Constant Coefficients*, Berlin, Springer Verlag, 1983, 389 p.
18. *Napalkov, V. V. Uravneniya svertki v mnogomernykh prostranstvakh* [Convolution Equations in Multidimensional Spaces], Moscow, Nauka, 1982, 240 p. (in Russian).
19. *Robertson, A. P. and Robertson, W. J. Topological Vector Spaces*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1964, 158 p.

Received May 8, 2020

Ildar Kh. Musin
Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `musin_ildar@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2659-1147