Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 1, С. 88–98

УДК 517.518.68
DOI 10.46698/b5144-7328-6245-w

ОБ УСЛОВИЯХ ВЛОЖЕНИЯ КЛАССОВ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗИКОВИЧА

Ю. Х. Хасанов[1]

[1] Российско-Таджикский (славянский) университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, ул. М. Турсунзода, 30

E-mail: yukhas60@mail.ru

Аннотация. В работе установлен ряд условий вложения классов B_q-почти-периодических функций в классы B_p-почти-периодических в смысле Безиковича функций с произвольными показателями Фурье при $1 \leqslant p < q < \infty$. Некоторые из этих условий являются аналогом известных результатов других авторов о вложении классов L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ периодических функций. В качестве структурной характеристики таких функций используется модуль гладкости высшего порядка с наперед заданным шагом. Так как пространство почти-периодических функций Безиковича является полным нормированным пространством, то в качестве полиномов наилучшего приближения используются полиномы Бохнера — Фейера. Также в работе найдены условия принадлежности функций Безиковича к классу целых функций ограниченной степени. Установлено, что если B_p-почти-периодическая функция имеет величину наилучшего приближения целыми функциями ограниченной степени, то для этой функции существует абсолютно непрерывная производная, которая также является B_p-почти-периодической.

Ключевые слова: почти-периодические функции Безиковича, ряд Фурье, тригонометрические полиномы, теоремы вложения, спектр функции, модуль непрерывности, целая функция, полиномы Бохнера — Фейера.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A75.

Образец цитирования: *Хасанов Ю. Х.* Об условиях вложения классов почти-периодических функций Безиковича // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 1.—С. 88–98. DOI: 10.46698/b5144-7328-6245-w.

1. Введение

Пусть B_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ — линейное пространство, состоящее из функций $f(x)$, для которых $|f(x)|^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ интегрируема по Лебегу на любом конечном отрезке действительной оси и удовлетворяет условию

$$\|f\|_{B_p} = \overline{M_p}\{f(x)\} = \left\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а при $p = \infty$

$$\|f\|_{\infty} = \operatorname{vrai} \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty.$$

При $1 \leqslant p < \infty$, следуя А. Безиковичу (см. [1, с. 73] или [2, с. 213]), введем следующее понятие B_p-почти-периодической функции.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *почти-периодической в смысле Безиковича* или $f(x) \in B_p$ $(p \geqslant 1)$, если существует последовательность конечных тригонометрических полиномов $\{P_n(x)\}$ вида

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x),$$

для которых выполняется следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{M_p}\{f(x) - P_n(x)\} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|f(x) - P_n(x)\|_{B_p} = 0, \tag{1}$$

где $\Lambda\{\lambda_k\}$ — некоторое счетное множество действительных чисел.

А Безиковичем [1, с. 100] установлено, что определение 1 эквивалентно следующему определению B_p-почти-периодических функций.

Определение 2. Функция $f(x) \in B_p$ $(p \geqslant 1)$ называется *почти-периодической в смысле Безиковича*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $L = L(\varepsilon)$, что на каждом интервале длины L найдется хотя бы одно число τ, для которого

$$\|f(x+\tau) - f(x)\|_{B_p} < \varepsilon.$$

При этом каждое такое число τ называют *ε-почти-периодом* функции $f(x) \in B_p$.

Здесь определение 2 дается с помощью понятия почти-периода, т. е. функция $f(x)$ является *почти-периодической*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-почти-периода этой функции. Что же касается первого определения, то определение функций Безиковича сформулировано как утверждение теоремы аппроксимации почти-периодических функций тригонометрическими полиномами.

В дальнейшем функцию, удовлетворяющую определению 1, либо определению 2, будем сокращенно обозначать B_p-почти-периодической функцией.

В качестве структурной характеристики свойств функции $f(x) \in B_p$ рассмотрим величину

$$\omega_k(f;h)_{B_p} = \sup_{|t|\leqslant h} \left\| \Delta_t^k f(x) \right\|_{B_p}, \tag{2}$$

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{\nu}{k} f(x+\nu t) \quad (h > 0,\ k \in N).$$

Величина $\omega_k(f;h)_{B_p}$ называется *модулем гладкости* порядка k с шагом h функции $f(x) \in B_p$.

Известно [3, с. 39], что если $f(x) \in B_p$, то множество $\Lambda\{\lambda\}$ всех чисел, для которых

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda x)\, dx = A(\lambda) \neq 0 \tag{3}$$

не более, чем счетно.

Множество действительных чисел $\Lambda\{\lambda_k\}$, для которых выполняется условие (3), принято называть *спектром* B_p-почти-периодической функции $f(x)$. Таким образом, каждой B_p-почти-периодической функции $f(x)$ с помощью ее спектра $\Lambda\{\lambda_k\}$ и чисел $\{A(\lambda_k)\}$, удовлетворяющих равенству (3), ставится в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_{k} A(\lambda_k) \exp(i\lambda_k x),$$

называемый *рядом Фурье функции* $f(x) \in B_p$ $(p \geqslant 1)$.

В работе [3, с. 67, теорема 1.8.1] доказано, что каждое счетное множество действительных чисел $\Lambda\{\lambda_k\}$ содержит в себе множество $\beta\{\beta_k\}$, являющееся для него базисом относительно поля рациональных чисел.

Определение 3. Множество $\beta\{\beta_k\}$ называют *базисом относительно поля рациональных чисел* для счетного множества $\Lambda\{\lambda_k\}$, если выполняются следующие условия:

1. При любом натуральном n из условия $\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \beta_\nu = 0$ вытекает, что $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$, где r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — рациональные числа.

2. Каждое число $\lambda_k \in \Lambda$ при некотором n представимо в виде

$$\lambda_k = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \beta_\nu,$$

где r_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — рациональные числа.

Далее, в указанной работе [3, с. 248–249] установлено, что пространство B_p-почти-периодических функций является полным нормированным пространством и в качестве последовательности полиномов, удовлетворяющих условию (1), можно взять полиномы Бохнера — Фейера, которые определяются следующим образом.

Пусть функция $f(x) \in B_p$, множество $\Lambda\{\lambda_k\}$ — ее спектр, а множество $\beta\{\beta_k\}$ — его базис. Для каждого числа $\lambda_k \in \Lambda$ подбираются целые числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ и натуральное число m такие, что

$$\lambda_k = \sum_{\mu=1}^{r} \frac{\nu_\mu}{m!} \beta_\mu.$$

С помощью таких представлений чисел $\lambda_k \in \Lambda$ строится составное ядро Бохнера — Фейера

$$F_n(t; m; r) = \prod_{\mu=1}^{r} F_n\left(\frac{\beta_\mu t}{m!}\right),$$

где

$$F_n\left(\frac{\beta_\mu t}{m!}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{n\beta_\mu}{m!} \cdot \frac{t}{2}\right)}{n \sin^2\left(\frac{\beta_\mu}{m!} \cdot \frac{t}{2}\right)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Полиномами Бохнера — Фейера для $f(x) \in B_p$ называют полиномы вида

$$P(f; x; n; m) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+t) F_n(t; n; m)\, dt. \tag{4}$$

Полагая в ядре Бохнера — Фейера $n = (m!)^2$, обозначим полиномы (4) через $P(f; x; m)$ (см. [4]). Полиномы $P(f; x; m)$ при $m \to \infty$ также удовлетворяют условию (1).

2. Основные результаты

Целью настоящей работы является получение некоторого утверждения, указывающего условия вложения классов B_q-почти-периодических функций в классы B_p-почти-периодических функций для $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. При $q = \infty$ рассматривается класс равномерных почти-периодических в смысле Бора функций с равномерной B_∞-метрикой. Имеется в виду получить аналог следующего утверждения А. А. Конюшкова [5, с. 56–57].

Пусть $f(x)$ — периодическая функция периода 2π, для которой $|f(x)|^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ интегрируема по Лебегу, т. е. $f(x) \in L_p$. Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \quad (1 \leqslant p < q < \infty)$$

вытекает, что функция $f(x)$ принадлежит также и классу функций пространства L_q.

Принадлежность к пространству L_p означает, что

$$\|f\|_{L_p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$\omega(f; h)_{L_p} = \sup_{|t| \leqslant h} \|f(x+t) - f(x)\|_{L_p}.$$

Рассмотрим конечную тригонометрическую сумму

$$P(f; x; \lambda) = \sum_{k=1}^{N} b_k \exp(i\lambda_k x) \quad \bigl(|\lambda_k| \leqslant \lambda, \ \lambda > 0\bigr).$$

Приводим следующий аналог теоремы А. А. Конюшкова [5, с. 56] для B_p-почти-периодических функций с произвольным спектром $\Lambda\{\lambda_k\}$. Случай, когда спектр $\Lambda\{\lambda_k\}$ таков, что $\lambda_k = k$, соответствует периодическим функциям.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x) \in B_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ с произвольным неограниченным спектром $\Lambda\{\lambda_k\}$ и такая, что при некотором $q > p$ и натуральном k выполняется условие*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k\left(f; \frac{1}{\sigma_\nu}\right)_{B_p} n_\nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} < \infty, \tag{5}$$

где $\{\sigma_\nu\}$ — натуральные числа, $\omega_k(f; h)_{B_p}$ — величина, определенная соотношением (2), n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ — количество гармоник тригонометрического полинома $P(f; x; \sigma_\nu)$, удовлетворяющего неравенству

$$\|f(x) - P(f; x; \sigma_\nu)\|_{B_p} \leqslant C_k \omega_k\left(f; \frac{1}{\sigma_\nu}\right)_{B_p}. \tag{6}$$

Тогда B_p-почти-периодическая функция $f(x)$ является также B_q-почти-периодической функцией.

Факт существования аппроксимирующих полиномов, которые для каждой функции $f(x) \in B_p$ не только удовлетворяют соотношению (1), но и дают оценку (6), вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in B_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ функция с произвольным неограниченным спектром $\Lambda\{\lambda_k\}$. Тогда можно указать тригонометрический полином $P(f; x; \lambda)$, у которого при фиксированном $\lambda > 0$ все определяющие его числа $\lambda_m \in \Lambda$ удовлетворяют условию $|\lambda_m| \leqslant \lambda$ и справедливо неравенство*

$$\|f(x) - P(f; x; \lambda)\|_{B_p} \leqslant C_k \omega_k\left(f; \frac{1}{\lambda}\right)_{B_p}. \tag{7}$$

$\lhd$ Утверждение теоремы 2 для случая равномерных почти-периодических функций установлено в работе [4, с. 65, теорема 1].

Доказательство теоремы проводится аналогично основному результату работы автора [4, с. 66–68].

Пусть функция $f(x) \in B_p$ со спектром $\Lambda\{\lambda_m\}$. Рассмотрим функцию (см. [6, с. 183])

$$G_\lambda^k(f;x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)(-1)^{k-1} \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{\nu}{k} f\left(x + \nu\frac{u}{\lambda}\right) du, \tag{8}$$

где

$$g(u) = \gamma \left(\frac{\sin\frac{u}{2r}}{u}\right)^{2r} \quad (2r \geqslant k+3),$$

r — целое число, γ — число, для которого

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du = 1.$$

Очевидно, что $g(u)$ является целой функцией первой степени. Так как функция $f(x) \in B_p$, то после применения обобщенного неравенства Минковского, убеждаемся, что $G_\lambda^k(f;x)$ также B_p-почти-периодическая функция. Кроме того, спектр функции $G_\lambda^k(f;x)$ состоит из чисел $\{\lambda_m\}$, принадлежащих спектру функции $\Lambda\{\lambda_m\}$. В силу свойств функции $g(u)$ находим, что

$$\left\|G_\lambda^k(f;x) - f(x)\right\|_{B_p} \leqslant C_k \omega_k\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_{B_p}, \tag{9}$$

где

$$C_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\big(1+|u|^k\big)\,du.$$

Покажем, что $G_\lambda^k(f;x)$ — целая функция степени λ. Для этого рассмотрим функцию (см. [1, с. 100])

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant N; \\ N\frac{f(x)}{|f(x)|}, & |f(x)| > N. \end{cases}$$

Подставляя в (8) вместо функции $f(x)$ функцию $f_N(x)$, убеждаемся, что $G_\lambda^k(f_N;x)$ есть целая функция степени $\leqslant \lambda$, а совокупность $\{G_\lambda^k(f_N;x)\}$ $(N=1,2,\ldots)$ B_p-равностепенно ограничена и B_p-равностепенно равномерно непрерывна. Так как $f_N(x)$ B_p-сходится к функции $f(x)$, то некоторая ее последовательность $\{G_\lambda^k(f_{N_\nu};x)\}$ B_p-сходится к функции $G_\lambda^k(f;x)$, которая также есть целая функция степени $\leqslant \lambda$.

Покажем теперь, что все числа $\Lambda\{\lambda_m\}$ спектра функции $G_\lambda^k(f;x)$ удовлетворяют условию $|\lambda_m| \leqslant \lambda$. Для этого воспользуемся аналогом неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций степени $\leqslant \lambda$ в B_p-метрике, которое имеет вид

$$\left\|\frac{d^r}{dx^r} G_\lambda^k(f;x)\right\|_{B_p} \leqslant \lambda^r \left\|G_\lambda^k(f;x)\right\|_{B_p}. \tag{10}$$

К неравенству (10) можно прийти методом, указанным в [6, с. 115].

Пусть $p \geqslant 2$, а ряд Фурье функции $G_\lambda^k(f;x) \in B_p$ имеет вид

$$\sum_m A(\lambda_m)\exp(i\lambda_m x).$$

Тогда очевидно, что $G^k_\lambda(f;x)$ является также B_2-почти-периодической. С помощью неравенств (10) и равенства Парсеваля находим, что

$$|\lambda_m|^{2r}\big|A(\lambda_m)\big|^2 \leqslant \lambda^{2r}\big\|G^k_\lambda(f;x)\big\|^2_{B_2}, \tag{11}$$

из которого следует, что при любом целом r

$$|A(\lambda_m)|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^{2r} \big\|G^k_\lambda(f;x)\big\|^2_{B_2}.$$

Такая оценка при любом r для коэффициентов Фурье может выполняться лишь при $|\lambda_m| \leqslant \lambda$. Если же $1 \leqslant p < 2$, то в силу неравенств (10) и (11) для функции $G^k_\lambda(f_N;x)$, убеждаемся, что

$$|A_N(\lambda_m)|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^{2r} \big\|G^k_\lambda(f_N;x)\big\|^2_{B_2},$$

где $\{A_N(\lambda_m)\}$ — коэффициенты Фурье функции $G^k_\lambda(f_N;x)$, следовательно $|\lambda_m| \leqslant \lambda$. Таким образом, при любом N у всех функций $G^k_\lambda(f_N;x)$ спектры удовлетворяют условию $|\lambda_m| \leqslant \lambda$. Следовательно, и спектр функции $G^k_\lambda(f;x)$ также состоит из чисел $\{\lambda_m\}$, для которых $|\lambda_m| \leqslant \lambda$.

Из определения функций $\{f_N(x)\}$ вытекает также, что

$$\begin{aligned}\big|A_N(\lambda_m) - A(\lambda_m)\big| = \big|\overline{M}\big\{f_N(x)\exp(-i\lambda_m x)\\ - f(x)\exp(-i\lambda_m x)\big\}\big| \leqslant \big\|f_N(x) - f(x)\big\|_{B_p},\end{aligned}$$

где $A(\lambda_m)$ и $A_N(\lambda_m)$ — коэффициенты Фурье функций $G^k_\lambda(f;x)$ и $G^k_\lambda(f_N;x)$, соответственно. Из этого неравенства вытекает, что при каждом фиксированном m

$$\lim_{N\to\infty} A_N(\lambda_m) = A(\lambda_m).$$

Далее рассмотрим полиномы Бохнера — Фейера для функции $G^k_\lambda(f;x)$

$$P\big(G^k_\lambda;x;m\big) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} G^k_\lambda(f;x+t)F(t;m)\,dt,$$

у которых, очевидно, все показатели Фурье $\{\lambda_\nu\}$ удовлетворяют условию $|\lambda_\nu| \leqslant \lambda$. С помощью обобщенного неравенства Минковского убеждаемся, что для любого натурального числа m

$$\big\|P\big\{f(x) - G^k_\lambda(f;x;m)\big\}\big\|_{B_p} \leqslant C_k\omega_k\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_{B_p}. \tag{12}$$

Так как полиномы Бохнера — Фейера B_p-почти-периодической функции $f(x)$ B_p-сходятся к $f(x)$, то при фиксированном $\lambda > 0$ можно указать такое число $N = N(\lambda)$, что

$$\|f(x) - P(f;x;N)\|_{B_p} \leqslant \omega_k\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_{B_p}. \tag{13}$$

Тогда в силу (13) и (12) получаем, что

$$\begin{aligned}\big\|f(x) - P(G^k_\lambda;x;N)\big\|_{B_p} = \big\|f(x) - P(f;x;N) + P(f - G^k_\lambda;x;N)\big\|_{B_p}\\ \leqslant \big\|f(x) - P(f;x;N)\big\|_{B_p} + \big\|P(f - G^k_\lambda;x;N)\big\|_{B_p} \leqslant (1 + C_k)\omega_k\left(f;\frac{1}{\lambda}\right)_{B_p}.\end{aligned}$$

Из этого вытекает утверждение теоремы 2. $\rhd$

Доказательство теоремы 1, кроме теоремы 2, опирается также на следующее утверждение, являющееся аналогом известного результата С. М. Никольского [6, с. 125].

Теорема 3. *Пусть тригонометрический полином $P(x;n)$ степени $\leqslant n$ имеет вид*

$$P(x;n)=\sum_{\nu=-n}^{n}a_\nu\exp(i\lambda_\nu x).$$

Тогда для любого $q>p$ $(1\leqslant p<q\leqslant\infty)$ в метрике Безиковича справедливо неравенство

$$\|P(x;n)\|_{B_q}\leqslant Cn^{\frac1p-\frac1q}\|P(x;n)\|_{B_p}. \tag{14}$$

$\lhd$ Доказательство неравенства (14) можно получить методом, приведенным в [7, с. 49].

Действительно, в силу равенства Парсеваля имеем

$$P(x;n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}P(x+t;n)\sum_{k=1}^{n}\exp(-i\lambda_k t\,dt).$$

Следовательно,

$$\max_x|P(x;n)|\leqslant n^{\frac12}\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|P(x;n)|^2\,dx\right\}^{\frac12}.$$

Отсюда при $q>p$ получим

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|P(x;n)|^q\,dx\leqslant\max_x|P(x;n)|^{q-p}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|P(x;n)|^p\,dx$$
$$\leqslant n^{\frac{q-p}{2}}\left\{\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|P(x;n)|^p\,dx\right\}^{\frac{q-p}{2}}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|P(x;n)|^p\,dx.$$

После перехода к пределу по $T\to\infty$ вытекает неравенство (14), что доказывает справедливость теоремы 3.

Если $G_\lambda(x)$ — целая функция степени $\geqslant\lambda$, то неравенство, аналогичное (14) для B_p-метрик, имеет вид

$$\|G_\lambda(x)\|_{B_q}\leqslant C\lambda^{\frac1p-\frac1q}\|G_\lambda(x)\|_{B_p}\quad(1\leqslant p<q\leqslant\infty). \tag{15}$$

Оно является аналогом неравенства С. М. Никольского (см. [6, с. 125], также [8, с. 248]). $\rhd$

$\lhd$ Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f(x)\in B_p$. Рассмотрим последовательность полиномов $\{P(f;x;\sigma_\nu)\}$, удовлетворяющих при каждом σ_ν неравенству (7), т. е.

$$\big\|f(x)-P(f;x;\sigma_\nu)\big\|_{B_p}\leqslant C_k\omega_k\left(f;\frac{1}{\sigma_\nu}\right)_{B_p}, \tag{16}$$

где $\{\sigma_\nu\}$ — натуральные числа.

Очевидно, что ряд

$$S(P;f;\sigma_\nu)=P(f;x;\sigma_0)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\bigl\{P(f;x;\sigma_{\nu+1})-P(f;x;\sigma_\nu)\bigr\} \tag{17}$$

B_p-сходится к $f(x)$.

Применяя неравенство (15), а затем (16), находим, что

$$\begin{gathered}\bigl\|P(f;x;\sigma_{\nu+1})-P(f;x;\sigma_\nu)\bigr\|_{B_q}\\ \leqslant Cn_\nu^{1/p-1/q}\bigl\|P(f;x;\sigma_{\nu+1})-P(f;x;\sigma_\nu)\bigr\|_{B_p}\leqslant C_k n_\nu^{1/p-1/q}\omega_k\Bigl(f;\frac{1}{\sigma_\nu}\Bigr),\end{gathered} \tag{18}$$

где $n_\nu=n(\sigma_\nu)$ — количество гармоник, определяющее при каждом σ_ν полином $P(f;x;\sigma_\nu)$. Применяя к ряду (17) неравенство Минковского относительно B_q-метрики, будем иметь

$$\bigl\|S(P;f;\sigma_\nu)\bigr\|_{B_q}\leqslant C\sum_{\nu=0}^{\infty}\bigl\|\bigl\{P(f;x;\sigma_{\nu+1})-P(f;x;\sigma_\nu)\bigr\}\bigr\|_{B_q}.$$

Отсюда, благодаря (18), получаем

$$\bigl\|S(P;f;\sigma_\nu)\bigr\|_{B_q}\leqslant C_k\sum_{\nu=0}^{\infty}n_\nu^{1/p-1/q}\omega_k\Bigl(f;\frac{1}{\sigma_\nu}\Bigr).$$

Применение условие (5) в правой части последнего обеспечивает сходимость ряда (17) в B_p-метрике. Исходя из теоремы единственности почти-периодических функций Безиковича, получаем утверждение теоремы 1.

Наряду с теоремой 1, благодаря (9) и (15), можно доказать также, что если $f(x)\in B_p$ и имеет величину наилучшего приближения целыми функциями ограниченной степени, то для этой функции существует абсолютно непрерывная производная, которая также является B_p-почти-периодической.

Теорема 4. *Пусть $f(x)\in B_p$ и $A_\sigma(f)_{B_p}$ — величина наилучшего приближения функции $f(x)\in B_p$ целыми функциями степени не выше σ. Если выполнено условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r+1/p-1/q-1}A_\sigma(f)_{B_p}<\infty, \tag{19}$$

где $r\geqslant 0$ — некоторое целое число, а $1\leqslant p<q\leqslant\infty$, то у функции $f(x)$ существует абсолютно непрерывная производная порядка $(r-1)$, а производная порядка r — $f^{(r)}(x)$ является B_p-почти-периодической функцией.

$\lhd$ Рассмотрим ряд

$$g_1^{(r)}(f;x)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\Bigl\{g_{2^{\nu+1}}^{(r)}(f;x)-g_{2^\nu}^{(r)}(f;x)\Bigr\}, \tag{20}$$

где $r\leqslant p$ и $g_\sigma(f;x)$ — целая функция степени не выше σ, для которой наилучшее приближение определено следующим образом:

$$A_\sigma(f)_{B_p}=\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\bigl|f(x)-g_\sigma(f;x)\bigr|^p\,dx\right\}^{1/p}=\bigl\|f(x)-g_\sigma(f;x)\bigr\|_{B_p}.$$

Известно (см. [8, с. 232]), что если $G(x)$ — целая функция степени $\leqslant \sigma$ и принадлежит классу B_p $(p \geqslant 1)$, то имеет место неравенство

$$\|G^{(r)}(x)\|_{B_p} \leqslant \sigma^r \|G(x)\|_{B_p}. \tag{21}$$

С другой стороны, если для целой функции $G_\sigma(x)$ выполнено условие

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |G_\sigma(x)|^p \, dx < \infty,$$

то при любом положительном p и $q \geqslant p$ выполняется соотношение

$$\|G_\sigma(x)\|_{B_q} \leqslant \left\{\frac{p_0\sigma}{2\pi}\right\}^{1/p-1/q} \|G_\sigma(x)\|_{B_p}, \tag{22}$$

где p_0 — наименьшее четное число и такое, что $p_0 \geqslant p$. Отсюда в силу неравенств (21) и (22) будем иметь

$$\begin{gathered} \left\|g^{(r)}_{2^{\nu+1}}(f;x) - g^{(r)}_{2^\nu}(f;x)\right\|_{B_q} \leqslant 2^{r(\nu+1)} \left\|g_{2^{\nu+1}}(f;x) - g_{2^\nu}(f;x)\right\|_{B_q} \\ < 2^{(\nu+1)\left(r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+1} \left\|g_{2^{\nu+1}}(f;x) - g_{2^\nu}(f;x)\right\|_{B_p} \leqslant 2^{(\nu+1)\left(r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2} A_{2^\nu}(f)_{B_p} \\ \leqslant 2^{2\left(r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{r-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} A_\mu(f)_{B_p}. \end{gathered} \tag{23}$$

Следовательно, благодаря условию (19), ряд (20) сходится в среднем в смысле метрики B_q.

Теперь при любом натуральном $p \leqslant r$ рассмотрим ряд

$$T_1^{(p)}(f;x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{T^{(p)}_{2^{\nu+1}}(f;x) - T^{(p)}_{2^\nu}(f;x)\right\},$$

где $T_n(f;x)$ — полиномы наилучшего приближения.

Рассуждая так же, как при получении соотношения (23), заключаем, что последовательность частных сумм

$$S_n^{(p)}(x) = T_1^{(p)}(f;x) + \sum_{\nu=0}^{n} \left\{T^{(p)}_{2^{\nu+1}}(f;x) - T^{(p)}_{2^\nu}(f;x)\right\}$$

сходится в среднем в смысле метрики B_p. Значит, существует последовательность $S^{(p)}_{n_m}(x)$, которая при всех $p = 1, 2, \ldots, r$ сходится почти всюду к некоторой функции $f_p(x) \in B_p$. Полагая, что x_0 — одна из точек сходимости, рассмотрим разность

$$\begin{gathered} f_{p-1}(x) - f_{p-1}(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f_p(t)\, dt \\ = f_{p-1}(x) - S^{(p-1)}_{n_m}(x) - f_{p-1}(x_0) + S^{(p-1)}_{n_m}(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} \left\{f_p(x) - S^{(p)}_{n_m}(t)\right\} dt. \end{gathered}$$

Отсюда

$$\left\| f_{p-1}(x) - f_{p-1}(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f_p(t)\,dt \right\|_{B_p}$$
$$\leqslant \left\| f_{p-1}(t) - S_{n_m}^{(p-1)}(t) \right\|_{B_p} + \left| f_{p-1}(x_0) - S_{n_m}^{(p-1)}(x_0) \right| + \left\| \int\limits_{x_0}^{x} \left[f_p(t) - S_{n_m}^{(p)}(t) \right] \,dt \right\|_{B_p}.$$

Поскольку при $m \to \infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю, то при $p = 1, 2, \dots, r$ для всех x будет верно следующее неравенство:

$$f_{p-1}(x) - f_{p-1}(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f_p(t)\,dt.$$

Отсюда следует, что почти всюду $f_0(x) = f(x)$ и функция $f(x)$ почти всюду совпадает с функцией, которая имеет абсолютно непрерывную производную $(r-1)$-го порядка и r-ю производную $f^{(r)}(x) = f_r(x) \in B_p$, которая является пределом в среднем для последовательности $S_n^{(r)}(x)$. $\triangleright$

В заключение заметим, что с некоторыми важными понятиями и свойствами почти-периодических функций Безиковича, которые отсутствуют в работах [1] и [3] и будут полезными при чтении данной статьи, можно ознакомиться в работе [9].

Литература

1. *Besicovitch A.* Almost Periodic Functions.—Cambridge Univ. Press, 1932.
2. *Besicovitch A.* Almost periodicity and generalized trigonometric series // Acta Math.—1931.—Vol. 57.—P. 203–292.
3. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции.—М.: ГИТТЛ, 1953.—396 с.
4. *Тиман М. Ф., Хасанов Ю. Х.* О приближении почти-периодических функций целыми функциями // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 12.—С. 64–70.
5. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб.—1958.—Т. 44 (86), № 1.—С. 53–84.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1977.—456 с.
7. *Хасанов Ю. Х.* О связи между степенью суммируемости почти-периодических функций и коэффициентов Фурье // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, вып. 3.—С. 47–54. DOI: 10.23671/VNC.2014.3.10236.
8. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.—М.: Физматгиз, 1960.—624 с.
9. *Хасанов Ю. Х.* Абсолютная сходимость рядов Фурье почти-периодических функций // Мат. заметки.—2013.—Т. 94, № 5.—С. 745–756. DOI: 10.4213/mzm8778.

Статья поступила 31 марта 2020 г.

Хасанов Юсуфали Хасанович
Российско-Таджикский (славянский) университет,
профессор кафедры информатики и информационных систем
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. М. Турсунзода, 30
E-mail: `yukhas60@mail.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 1, P. 88–98

ON THE CONDITIONS FOR THE EMBEDDING OF CLASSES OF BESICOVITCH ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

Khasanov Yu. Kh.[1]

[1]Russian and Tajik (Slavonic) University,
30 M. Tursunzoda St., Dushanbe 734025, Tajikistan
E-mail: yukhas60@mail.ru

Abstract. In the paper we established some conditions for embedding of classes of B_q-almost-periodic functions into the classes of B_p-almost-periodic in the sense of Besicovitch functions with arbitrary Fourier exponents for $1 \leqslant p < q < \infty$. Some of established conditions are counterparts of the known results of other authors on embedding of the classes L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ of periodic functions. As a structural characteristic of such functions we use a higher-order modulus of smoothness with a predetermined step. Since the space of almost periodic Besicovitch functions is a complete normed space, the Bochner–Fejer polynomials are used as polynomials of best approximation. We also indicate some conditions for the Besicovitch functions to belong to the class of entire functions of bounded degree. It is established that if a B_p-almost periodic $f(x) \in B_p$ has the best approximation value by entire functions of bounded degree, then there exists the absolutely continuous derivative of the function which is also B_p-almost periodic.

Key words: Besicovitch almost periodic functions, Fourier series, trigonometric polynomials, embedding theorems, spectral function, modulus of continuity, entire function, Bochner–Fejer polynomials.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A75.

For citation: *Khasanov, Yu. Kh.* On the Conditions for the Embedding of Classes of Besicovitch Almost Periodic Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 1, pp. 88–98 (in Russian). DOI: 10.46698/b5144-7328-6245-w.

References

1. *Besicovitch, A. Almost Periodic Functions*, Cambridge Univ. Press, 1932.
2. *Besicovitch, A.* Almost Periodicity and Generalized Trigonometric Series, *Acta Math.*, 1931, vol. 57, pp. 203–292.
3. *Levitan, B. M. Pochti-periodicheskie funkcii* [Almost Periodic Functions], Moscow, GITTL, 1953 (in Russian).
4. *Timan, M. F. and Khasanov, Yu. Kh.* Approximations of Almost Periodic Functions by Entire Ones, *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2011, vol. 55, pp. 52–57. DOI: 10.3103/S1066369X11120085.
5. *Konushkov, A. A.* Best Approximations by Trigonometric Polynomials and Fourier Coefficients, *Matematicheskii Sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1958, vol. 44 (86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
6. *Nikol'skii, S. M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1977. DOI: 10.1007/978-3-642-65711-5.
7. *Khasanov, Yu. Kh.* About Relationship Between Summability of Almost Periodic Functions and Fouriers Coefficients, *Vladikavkaz Math. J.*, 2014, vol. 16, no. 3, pp. 47–54 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2014.3.10236.
8. *Timan, A. F. Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Pergamon Press, 1963.
9. *Khasanov, Yu. Kh.* Absolute Convergence of Fourier Series of Almost-Periodic Functions, *Mathematical Notes*, 2013, vol. 94, pp. 692–702. DOI: 10.1134/S0001434613110102.

Received March 31, 2020

Yusufali Kh. Khasanov
Russian and Tajik (Slavonic) University,
30 M. Tursunzoda St., Dushanbe 734025, Tajikistan,
Professor of Department of Informatics and Information Systems
E-mail: yukhas60@mail.ru