Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 2, С. 65–69

УДК 519.17
DOI 10.46698/j7484-0095-3580-b

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЙ ГРАФ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ НЕ СУЩЕСТВУЕТ[#]

А. А. Махнев[1], **М. С. Нирова**[2]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[2] Кабардино-Балкарский государственный университет,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, nirova_m@mail.ru

Аннотация. Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1, равное $a = a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Юришич и Видали нашли массивы пересечений Q-полиномиальных графов Шилла с $b_2 = c_2$: $\{2rt(2r+1), (2r-1)(2rt+t+1), r(r+t); 1, r(r+t), t(4r^2-1)\}$. Однако многие массивы из этой серии не являются допустимыми. Белоусов И. Н. и Махнев А. А. нашли новую бесконечную серию допустимых массивов пересечений Q-полиномиальных графов Шилла с $b_2 = c_2$ ($t = 2r^2-1$): $\{2r(2r^2-1)(2r+1), (2r-1)(2r(2r^2-1)+2r^2), r(2r^2+r-1); 1, r(2r^2+r-1), (2r^2-1)(4r^2-1)\}$. При $r = 2$ получим массив пересечений $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$. В работе доказано, что граф с таким массивом пересечений не существует.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, граф без треугольников, тройные числа пересечений.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

Образец цитирования: *Махнев А. А., Нирова М. С.* Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ не существует // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 23, вып. 2.—С. 65–69. DOI: 10.46698/j7484-0095-3580-b.

1. Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{2, 3, \ldots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i

[#] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013.

в Γ для любого $i=0,\dots,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1=1$. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, имеющий второе собственное значение θ_1, равное $a=a_3$. В этом случае a делит k и полагают $b=b(\Gamma)=k/a$. Далее, $a_1=a-b$ и Γ имеет массив пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$. В [2] найдены массивы пересечений Q-полиномиальных графов Шилла с $b_2=c_2$.

Предложение 1. *Пусть Γ — граф Шилла с $b_2=c_2$ и $\theta_3=-b(b+1)/2$. Тогда b четно, для $b=2r$ и $c_2=r(t+r)$ граф Γ имеет массив пересечений*

$$\bigl\{2rt(2r+1),\ (2r-1)(2rt+t+1),\ r(r+t);\ 1,\ r(r+t),\ t(4r^2-1)\bigr\},$$

для любой вершины u из Γ подграф $\Gamma_3(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным с массивом пересечений

$$\bigl\{t(2r+1),\ (2r-1)(t+1),\ 1;\ 1,\ t+1,\ t(2r+1)\bigr\},\quad t\leqslant 2r(r+1)(2r-1)-r.$$

В случае $t=r$ имеем $r=1$.

В [3] доказано, что массивы пересечений

$$\bigl\{2rt(2r+1),\ (2r-1)(2rt+t+1),\ r(r+t);\ 1,\ r(r+t),\ t(4r^2-1)\bigr\}$$

и

$$\bigl\{t(2r+1),\ (2r-1)(t+1),\ 1;\ 1,\ t+1,\ t(2r+1)\bigr\}$$

являются допустимыми при $t=2r^2-1$. В случае $r=2$ получим массивы пересечений $\{140,108,18;1,18,105\}$ и $\{35,24,1;1,8,35\}$ соответственно.

Следующая теорема является основным результатом работы.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{140,108,18;1,18,105\}$ не существует.*

2. Тройные числа пересечений

В доказательстве теоремы используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то через $\left\{{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right\}$ обозначим множество вершин $w\in\Gamma$ таких, что $d(w,u_i)=r_i$, а через $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right]$ — число вершин в $\left\{{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right\}$. Числа $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако, в [4] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W=d(u,v)$, $U=d(v,w)$, $V=d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x=u$ такая, что $d(x,u)=0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh]=\delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично $[i0h]=\delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0]=\delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh], \quad \sum_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h], \quad \sum_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0]. \qquad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p^W_{ij} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}.$$

Если параметр Крейна $q^h_{ij} = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим

$$\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}, \quad [ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}, \quad [ijh]' = \begin{bmatrix} uwv \\ ihj \end{bmatrix}, \quad [ijh]^* = \begin{bmatrix} vuw \\ jih \end{bmatrix}, \quad [ijh]^\sim = \begin{bmatrix} wvu \\ hji \end{bmatrix}.$$

В случаях $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$ или $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ вычисление чисел

$$[ijh]' = \begin{bmatrix} uwv \\ ihj \end{bmatrix}, \quad [ijh]^* = \begin{bmatrix} vuw \\ jih \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad [ijh]^\sim = \begin{bmatrix} wvu \\ hji \end{bmatrix}$$

(симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

3. Граф с массивом пересечений $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$, u, v, w — вершины графа Γ и $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Тогда $v = 1 + 140 + 840 + 144 = 1125$, Γ имеет спектр 140^1, 35^{60}, 5^{560}, -10^{504} и дуальная матрица собственных значений графа Γ равна

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 60 & 560 & 504 \\ 1 & 15 & 20 & -36 \\ 1 & 0 & -10 & 9 \\ 1 & -15 & 35 & -21 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Для чисел пересечения графа верны равенства:*

(1) $p^1_{11} = 31$, $p^1_{21} = 108$, $p^1_{32} = 108$, $p^1_{22} = 624$, $p^1_{33} = 36$;

(2) $p^2_{11} = 18$, $p^2_{12} = 104$, $p^2_{13} = 18$, $p^2_{22} = 627$, $p^2_{32} = 108$, $p^2_{33} = 18$;

(3) $p^3_{12} = 105$, $p^3_{22} = 630$, $p^3_{13} = 35$, $p^3_{23} = 105$ *и* $p^3_{33} = 3$.

$\lhd$ Прямые вычисления. $\rhd$

Пусть u, v, w — вершины графа Γ и $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right]$. Положим $\Delta = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени 105 на 144 вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 3$, $d(v, w) = 1$. *Тогда верны равенства:*

(1) $[122] = -2r_1/3 + 136$, $[123] = [132] = 2r_1/3 - 31$, $[133] = -2r_1/3 + 66$;

(2) $[211] = -2r_1/3 + 73$, $[212] = [221] = 2r_1/3 + 32$, $[222] = -r_1/3 + 488$, $[223] = [232] = -r_1/3 + 110$, $[233] = r_1/3 - 5$;

(3) $[311] = 2r_1/3 - 42$, $[312] = [321] = -2r_1/3 + 76$, $[322] = r_1$, $[323] = [332] = -r_1/3 + 29$, $[333] = r_1/3 - 26$,
где $r_1 \in \{78, 81, 84, 87\}$.

$\lhd$ Компьютерные вычисления. $\rhd$

По лемме 2 имеем $78 \leqslant [322] \leqslant 87$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 3$, $d(v,w) = 2$. *Тогда верны равенства:*

(1) $[122] = 2r_2 + 8r_3 - 879$, $[123] = [132] = -2r_2 - 8r_3 + 984$, $[133] = 2r_2 + 8r_3 - 949$;

(2) $[211] = 2r_2 + 7r_3 - 945$, $[212] = [221] = -2r_2 - 6r_3 + 1032$, $[213] = [231] = -r_3 + 18$, $[222] = r_2$, $[223] = [232] = r_2 + 6r_3 - 402$, $[231] = -r_3 + 18$, $[233] = -r_2 - 5r_3 + 489$;

(3) $[311] = -2r_2 - 7r_3 + 963$, $[312] = [321] = 2r_2 + 6r_3 - 928$, $[313] = [331] = r_3$, $[322] = -3r_2 - 8r_3 + 1506$, $[323] = [332] = r_2 + 2r_3 - 474$, $[333] = -r_2 - 3r_3 + 477$,
где $r_2 \in \{468, 469, \ldots, 477\}$, $r_3 \in \{0, 1, \ldots, 3\}$.

$\lhd$ Компьютерные вычисления. $\rhd$

По лемме 3 имеем $68 \leqslant [322] = -3r_2 - 8r_3 + 1506 \leqslant 102$.

Лемма 4. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 3$. *Тогда верны равенства:*

(1) $[122] = 2r_4/5 + 42$, $[123] = [132] = -2r_4/5 + 63$, $[133] = 2r_4/5 - 28$;

(2) $[212] = [221] = 2r_4/5 + 42$, $[213] = [231] = -2r_4/5 + 63$, $[222] = -7r_4/5 + 588$, $[223] = [232] = r_4$, $[233] = -3r_4/5 + 42$;

(3) $[312] = [321] = -2r_4/5 + 63$, $[313] = [331] = 2r_4/5 - 28$, $[322] = r_4$, $[323] = [332] = -3r_4/5 + 42$, $[333] = r_4/5 - 12$.

$\lhd$ Компьютерные вычисления. $\rhd$

По лемме 4 $[233] = -3r_4/5 + 42$ дает $3r_4/5 \leqslant 42$, $[313] = 2r_4/5 - 28$ дает $42 \leqslant 3r_4/5$ и $r_4 = 70$. Отсюда $[333] = r_4/5 - 12 = 2$ и Λ — реберно регулярный граф с параметрами (144,105,2), причем $68 \leqslant \mu(\Lambda) \leqslant 102$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Lambda(v)$ и $\Lambda - (\{v\} \cup \Lambda(v))$ не меньше $105 \cdot 102 = 4420$, но не больше $38 \cdot 102 = 3876$.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.
2. *Koolen J. H., Park J.* Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb.—2010.—Vol. 31, № 8.—P. 2064–2073. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.
3. *Jurishich A., Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr.—2012.—Vol. 65, № 1–2.—P. 29–47. DOI: 10.1007/s10623-012-9651-0.
4. *Белоусов И. Н., Махнев А. А.* К теории графов Шилла с $b_2 = c_2$ // Сиб. электрон. мат. изв.—2017.—Т. 14.—С. 1135–1146. DOI: 10.17377/semi.2017.14.097.

Статья поступила 14 декабря 2020 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Нирова Марина Сефовна
Кабардино-Балкарский государственный университет,
доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: nirova_m@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 2, P. 65–69

DISTANCE-REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ DOES NOT EXIST

Makhnev, A. A.[1] and Nirova, M. S.[2]

[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia;
[2] Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, nirova_m@mail.ru

Abstract. Distance-regular graph Γ of diameter 3 having the second eigenvalue $\theta_1 = a_3$ is called Shilla graph. In this case $a = a_3$ devides k and we set $b = b(\Gamma) = k/a$. Jurishich and Vidali found intersection arrays of Q-polynomial Shilla graphs with $b_2 = c_2$: $\{2rt(2r+1), (2r-1)(2rt+t+1), r(r+t); 1, r(r+t), t(4r^2-1)\}$. But many arrays in this series are not feasible. Belousov I. N. and Makhnev A. A. found a new infinite series feasible arrays of Q-polynomial Shilla graphs with $b_2 = c_2$ $(t = 2r^2-1)$: $\{2r(2r^2-1)(2r+1), (2r-1)(2r(2r^2-1)+2r^2), r(2r^2+r-1); 1, r(2r^2+r-1), (2r^2-1)(4r^2-1)\}$. If $r = 2$ then we have intersection array $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$. In the paper it is proved that graph with this intersection array does not exist.

Key words: distance-regular graph, triangle-free graph, triple intersection numbers.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D05.

For citation: *Makhnev, A. A. and Nirova, M. S.* Distance-Regular Graph with Iintersection Array $\{140, 108, 18; 1, 18, 105\}$ Does not Exist, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 23, no. 2, pp. 65–69 (in Russian). DOI: 10.46698/j7484-0095-3580-b.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989.
2. *Koolen, J. H. and Park J.* Shilla Distance-Regular Graphs, *European Journal of Combinatorics*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 2064–2073. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.05.012.
3. *Jurishich A., J. Vidali* Extremal 1-Codes in Distance-Regular Graphs of Diameter 3, *Designs Codes and Cryptography*, 2012, vol. 65, no. 1–2, pp. 29–47. DOI: 10.1007/s10623-012-9651-0.
4. *Belousov, I. N. and Makhnev, A. A.* To the Theoty of Shilla Graphs with $b_2 = c_2$, *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports], 2017, vol. 14, pp.1135–1146 (in Russian). DOI: 10.17377/semi.2017.14.097.

Received December 14, 2020

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Head of Departament of Algebra and Topology
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Marina S. Nirova
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia,
Associate Professor of the Department
of Algebra and Differential Equations
E-mail: nirova_m@mail.ru