Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 4, С. 5–14

УДК 511.1+517.982
DOI 10.46698/p9825-1385-3019-c

ПОЧТИ СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗ 0 И 1 И ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Н. Н. Авдеев[1]

[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: `avdeev@math.vsu.ru`, `nickkolok@mail.ru`

Светлой памяти декана математического факультета ВГУ
профессора Александра Дмитриевича Баева

Аннотация. В статье изучаются последовательности из нулей и единиц. Устанавливается связь между значениями верхнего и нижнего функционалов Сачестона на такой последовательности и множеством всевозможных делителей элементов, входящих в носитель такой последовательности. Если объединение множеств всех простых делителей чисел из носителя некоторой последовательности из нулей и единиц конечно, то такая последовательность почти сходится к нулю. Изучаются такие последовательности из нулей и единиц, носитель которых в точности состоит из чисел, кратных элементам некоторого заданного множества, и устанавливаются необходимые и достаточные условия для обращения в единицу верхнего функционала Сачестона на такой последовательности. Доказывается, что существует бесконечно много таких последовательностей, на которых нижний функционал Сачестона принимает значение 1, при этом в нуль нижний функционал Сачестона ни на одной такой последовательности не обращается.

Ключевые слова: пространство ограниченных последовательностей, банахов предел, функционал Сачестона, почти сходящаяся последовательность, последовательности из нулей и единиц, разложение на множители, подмножества натуральных чисел.

Mathematical Subject Classification (2010): 46B45, 11A51.

Образец цитирования: *Авдеев Н. Н.* Почти сходящиеся последовательности из 0 и 1 и простые числа // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 4.—С. 5–14. DOI: 10.46698/p9825-1385-3019-c.

1. Введение

Рассмотрим пространство ограниченных последовательностей ℓ_∞ с обычной нормой

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|,$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, и обычной полуупорядоченностью.

Определение 1.1. Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом, если

(i) $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$,

(ii) $B\mathbb{I} = 1$, где $\mathbb{I} = (1, 1, \ldots)$,

(iii) $B(Tx) = B(x)$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

#Работа выполнена в Воронежском госуниверситете при поддержке Российского научного фонда, грант 19-11-00197.

Множество всех банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [1] и позднее доказано в книге С. Банаха [2]. Существуют почти сходящиеся последовательности — такие последовательности из ℓ_∞, на которых все банаховы пределы принимают одинаковые значения.

Теорема 1.1 (Критерий Лоренца [3])**.** *Для заданного $t \in \mathbb{R}$ равенство $Bx = t$ выполнено для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = t \tag{1}$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Пространство почти сходящихся последовательностей будем обозначать через ac.

Уточняя результат Лоренца, Сачестон установил [4], что для любых $x \in \ell_\infty$ и $B \in \mathfrak{B}$

$$q(x) \leqslant Bx \leqslant p(x), \tag{2}$$

где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k \quad \text{и} \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k$$

называют нижним и верхним функционалом Сачестона соответственно. Заметим, что $p(x) = -q(-x)$. Неравенства (2) точны: для данного x для любого $t \in [q(x); p(x)]$ найдется банахов предел $B \in \mathfrak{B}$ такой, что $Bx = t$.

Легко видеть, что множество таких $x \in \ell_\infty$, что $p(x) = q(x)$, в точности является пространством почти сходящихся последовательностей ac. Будем говорить, что $x \in ac_t$, если $x \in ac$ и $p(x) = q(x) = t$. Таким образом, функционалы Сачестона для почти сходимости играют такую же роль, как верхний и нижний пределы для «обычной» сходимости. Более подробно о свойствах почти сходящихся последовательностей и банаховых пределах см. [5, 6].

Дальнейшим ослаблением понятия сходимости является сходимость по Чезаро (сходимость в среднем). Говорят, что последовательность $\{x_n\} \in \ell_\infty$ сходится по Чезаро к t, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = t. \tag{3}$$

Легко заметить, что обсуждаемые обобщения верхнего и нижнего пределов удовлетворяют соотношению

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \;\leqslant\; q(x) \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;\leqslant\; \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;\leqslant\; p(x) \;\leqslant\; \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{4}$$

Отдельный интерес представляет множество всех последовательностей из 0 и 1, которое в дальнейшем мы будем обозначать через Ω. Понятно, что каждый $x \in \Omega$ можно отождествить с подмножеством множества натуральных чисел $\operatorname{supp} x \subset \mathbb{N}$.

Вслед за [7] будем обозначать через $\mathscr{M}A$ множество всех чисел, кратных элементам множества $A \subset \mathbb{N}$, т. е.

$$\mathscr{M}A = \{ka : k \in \mathbb{N}, a \in A\}, \tag{5}$$

через χA — характеристическую функцию множества A.

Так, например,

$$\chi\mathscr{M}A(\{2\}) = \chi\mathscr{M}A(\{2,4\}) = \chi\mathscr{M}A(\{2,4,8,16,\ldots\}) = (0,1,0,1,0,1,0,1,0,\ldots),$$
$$\chi\mathscr{M}A(\{3\}) = \chi\mathscr{M}A(\{3,9,27,\ldots\}) = (0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ 0,0,1,\ \ldots),$$
$$\chi\mathscr{M}A(\{2,3\}) = \chi\mathscr{M}A(\{2,3,6\}) = (0,1,1,1,0,1,\ 0,1,1,1,0,1,\ 0,1,1,1,0,1,\ldots).$$

Возникает закономерный вопрос о взаимосвязи структуры множества A и значений, которые принимают обобщения верхнего и нижнего пределов (4) на последовательности $\chi\mathscr{M}A$. Так, в работах [8, 9] доказано, что для любого $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ выполнено

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi\mathscr{M}A)_i = \lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi\mathscr{M}\{a_1,a_2,\ldots,a_j\})_i. \tag{6}$$

В работе [10, §7] построено такое множество $A \subset \mathbb{N}$, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi\mathscr{M}A)_i \neq \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\chi\mathscr{M}A)_i. \tag{7}$$

За более подробной информацией о множествах типа $\mathscr{M}A$ отсылаем читателя к монографии [11].

В настоящей статье изучается зависимость значений, которые могут принимать функционалы Сачестона на последовательностях $\chi\mathscr{M}A$, от свойств множества A.

2. Конечное число множителей

Пользуясь критерием Лоренца (1), нетрудно доказать, что для $x_n = m^n$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ выполнено $\chi x \in ac_0$.

Лемма 2.1. *Пусть $y = \{y_n\}$ — строго возрастающая последовательность, $\chi y \in \Omega \cap ac_0$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и последовательность $x = \{x_k\}$ определена соотношением*

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = y_i \cdot m^j \text{ для некоторых } i,j \in \mathbb{N},\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases} \tag{8}$$

Тогда $x \in ac_0$.

$\lhd$ Зафиксируем некоторое $K \in \mathbb{N}$ и покажем, что $p(x) < m^{-K}$. Действительно, представим x в виде суммы

$$x \leqslant z_1 + z_2 + \cdots + z_K + z'_{K+1}, \tag{9}$$

где каждое слагаемое z_j соответствует умножению индексов на m^j:

$$(z_j)_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = y_i \cdot m^j \text{ для некоторого } i \in \mathbb{N},\\ 0 & \text{иначе,}\end{cases} \tag{10}$$

а слагаемое z'_j соответствует умножению индексов на m^{j+1}, $m^{j+2}, \ldots$:

$$(z'_j)_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = y_i \cdot m^{j'} \text{ для некоторых } i,j' \in \mathbb{N},\quad j' > j,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases} \tag{11}$$

(Знак неравенства в (9) возникает ввиду того, что возможен случай $y_i \cdot m^j = y_{i'} \cdot m^{j'}$ для $j \neq j'$. Например, в случае $y_1 = 3$, $y_2 = 6$ и $m = 2$ имеем $y_1 \cdot m^2 = y_2 \cdot m^1$.) Понятно, что $p(z_j) = 0$. Таким образом,

$$p(x) \leqslant p(z_1) + p(z_2) + \cdots + p(z_K) + p(z'_{K+1}) = p(z'_{K+1}). \tag{12}$$

Заметим, что в силу определения (11) каждый отрезок z'_j из m^{j+1} элементов содержит не более одной единицы, и потому $p(z'_j) \leqslant m^{-j-1} < m^{-j}$. Таким образом, для любого $K \in \mathbb{N}$ выполнена оценка $p(x) < m^{-K}$, откуда $p(x) = 0$. $\rhd$

Следствие 2.1. *Пусть* $\{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{N}$,

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k = p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{j_k} \text{ для некоторых } j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{13}$$

Тогда $x \in ac_0$.

3. Бесконечное число множителей и верхний функционал Сачестона

Лемма 3.1. *Для любого непустого* $A \subset \mathbb{N}$ *выполнено* $\chi \mathscr{M} A \notin ac_0$.

$\lhd$ Пусть $a_1 \in A$. Тогда из каждых идущих подряд a_1 элементов последовательности $\chi \mathscr{M} A$ хотя бы один равен единице, следовательно,

$$q(\chi \mathscr{M} A) \geqslant \frac{1}{a_1} > 0. \ \rhd \tag{14}$$

При дополнительных ограничениях верно и более сильное утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* A' *— бесконечное подмножество попарно взаимно простых чисел (т. е. для любых двух чисел* $a_1, a_2 \in A'$ *их наибольший общий делитель равен единице). Тогда для любого* $A \supset A'$ *выполнено* $p(\chi \mathscr{M} A) = 1$.

$\lhd$ Пусть $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots\}$ и

$$A_j = \prod_{i=1}^{j} a_i. \tag{15}$$

Для каждого k найдем такие номера n_k, что

$$(\chi \mathscr{M} A)_{n_k+1} = (\chi \mathscr{M} A)_{n_k+2} = \cdots = (\chi \mathscr{M} A)_{n_k+k} = 1. \tag{16}$$

Тем самым мы докажем, что отрезок из любого наперед заданного количества единиц подряд встречается в последовательности $\chi \mathscr{M} A$ и, следовательно, $p(\chi \mathscr{M} A) = 1$.

Действительно, пусть $n_1 = a_1 - 1$. Рассмотрим множество $F_1 = \{n_1 + A_1, n_1 + 2A_1, n_1 + 3A_1, \ldots, n_1 + a_2 A_1\}$ и отметим два следующих факта.

Во-первых, пусть $f \in F_1$, тогда

$$f \equiv n_1 \mod a_1. \tag{17}$$

Во-вторых, числа a_2 и A_1 взаимно просты. Следовательно, все a_2 чисел из множества F_1 дают разные остатки при делении на a_2.

В качестве n_2 возьмем такое $f \in F_1$, что

$$f \equiv a_2 - 2 \mod a_2. \tag{18}$$

Заметим, что тогда

$$n_2 + 1 \equiv n_1 + 1 \equiv 0 \mod a_1 \tag{19}$$

и

$$n_2 + 2 \equiv 0 \mod a_2, \tag{20}$$

следовательно, $(\chi\mathscr{M}A)_{n_2+1} = (\chi\mathscr{M}A)_{n_2+2} = 1$.

Полученные рассуждения несложно продолжить по индукции.

Рассмотрим множество $F_j = \{n_j + A_j, n_j + 2A_j, n_j + 3A_j, \dots, n_j + a_{j+1}A_j\}$ и отметим два следующих факта.

Во-первых, пусть $f \in F_j$, тогда

$$f \equiv n_j \mod A_j \tag{21}$$

и, в силу (15),

$$\begin{aligned} &f \equiv n_j \mod a_1 \\ &f \equiv n_j \mod a_2 \\ &\dots \\ &f \equiv n_j \mod a_j. \end{aligned} \tag{22}$$

Во-вторых, числа a_{j+1} и A_j взаимно просты, поскольку a_{j+1} взаимно просто с каждым из чисел $a_1, \dots, a_j$. Следовательно, все a_{j+1} чисел из множества F_j дают разные остатки при делении на a_{j+1}.

В качестве n_{j+1} возьмем такое $f \in F_j$, что

$$f \equiv a_{j+1} - (j+1) \mod a_{j+1}. \tag{23}$$

Заметим, что тогда

$$\begin{aligned} &n_{j+1} + 1 \equiv n_j + 1 \equiv n_{j-1} + 1 \equiv \dots \equiv n_2 + 1 \equiv n_1 + 1 \equiv 0 \mod a_1 \\ &n_{j+1} + 2 \equiv n_j + 2 \equiv n_{j-1} + 2 \equiv \dots \equiv n_2 + 2 \equiv 0 \mod a_2 \\ &\dots \\ &n_{j+1} + j \equiv n_j + j \equiv 0 \mod a_j \end{aligned} \tag{24}$$

и

$$n_{j+1} + (j+1) \equiv 0 \mod a_{j+1}, \tag{25}$$

следовательно,

$$(\chi\mathscr{M}A)_{n_{j+1}+j+1} = (\chi\mathscr{M}A)_{n_j+j} = \dots = (\chi\mathscr{M}A)_{n_j+2} = (\chi\mathscr{M}A)_{n_j+1} = 1. \ \triangleright \tag{26}$$

Замечание 3.1. Понятно, что в качестве примера бесконечного множества попарно взаимно простых чисел можно взять любое бесконечное множество простых чисел. Однако бывают бесконечные множества попарно взаимно простых чисел, не содержащие простых чисел вовсе, например множество

$$A = \{2 \cdot 3,\ 5 \cdot 7,\ 11 \cdot 13,\ 17 \cdot 19,\ 23 \cdot 29,\ 31 \cdot 37,\ \dots\}, \tag{27}$$

элементами которого являются произведения пар соседних простых чисел.

Определение 3.1. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{N}$ обладает P-свойством, если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется набор попарно взаимно простых чисел

$$\{a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n}\} \subset A. \tag{28}$$

Из доказательства теоремы 3.1 понятно, что для множества A в условии теоремы достаточно потребовать P-свойства. Интересно, что на самом деле P-свойство эквивалентно условиям, наложенным на множество A в теореме 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть множество A обладает P-свойством. Тогда существует бесконечное подмножество $A' \subset A$ попарно взаимно простых чисел.*

$\lhd$ Зафиксируем $f_0 \in A$, $f_0 \neq 1$ и представим A в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств:

$$A = \{f_0\} \cup E \cup F, \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} E &= \{a \in A \mid a \text{ не взаимно просто с } f_0 \text{ и } a \neq f_0\}, \\ F &= \{a \in A \mid a \quad\ \text{ взаимно просто с } f_0\}. \end{aligned}$$

Пусть разложение f_0 на простые множители имеет вид

$$f_0 = p_1^{j_1} \cdot p_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{j_k}. \tag{30}$$

Тогда множество E можно представить в виде объединения (возможно пересекающихся) множеств:

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad E_i = \{a \in E \mid a \text{ кратно } p_i\}. \tag{31}$$

Покажем, что множество F обладает P-свойством. Действительно, зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Так как множество A обладает P-свойством, то в нем найдется подмножество попарно взаимно простых чисел

$$G = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+k-1}, a_{n+k}\} \subset A.$$

Если $f_0 \in G$, то $G \setminus f_0 \subset F$ в силу построения множеств G и F, и требуемый набор попарно взаимно простых чисел предъявлен.

Пусть теперь $f_0 \notin G$. Заметим, что в каждое из множеств E_i может входить не более одного элемента множества G в силу того, что при фиксированном i все элементы множества E_i имеют нетривиальный общий делитель. Следовательно, как минимум n элементов из G принадлежат множеству F, и требуемый набор попарно взаимно простых чисел снова предъявлен.

Итак, нам удалось получить число $f_0 \in A$ и бесконечное множество F, обладающее P-свойством и состоящее из чисел, взаимно простых с f_0. Продолжая по индукции, получим требуемое бесконечное множество попарно взаимно простых чисел. $\rhd$

Лемма 3.3. *Пусть для множества $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ выполнено $p(\chi \mathscr{M} A) = 1$. Тогда A обладает P-свойством.*

$\lhd$ Предположим противное: пусть A не обладает P-свойством. Тогда существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что из множества A можно выбрать n попарно взаимно простых чисел, но нельзя выбрать $n + 1$.

Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset A$ — набор попарно взаимно простых чисел. Так как $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$, то в последовательности $\chi\mathscr{M}A$ найдется отрезок, состоящий сплошь из единиц, любой наперед заданной длины. Выберем k таким, что

$$(\chi\mathscr{M}A)_{k+1} = (\chi\mathscr{M}A)_{k+2} = \ldots = (\chi\mathscr{M}A)_{k+a_1a_2\cdots a_n} = 1. \tag{32}$$

Тогда существует такое число k_0, $k+1 \leqslant k_0 \leqslant k + a_1a_2\cdots a_n$, что k_0 дает в остатке 1 при делении на $a_1a_2\cdots a_n$. Так как $(\chi\mathscr{M}A)_{k_0} = 1$, то $k_0 = m\cdot a_0$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $a_0 \in A$. С другой стороны, k_0 взаимно просто с каждым из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Следовательно, a_0 также взаимно просто с каждым из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset A$ — набор из $n+1$ попарно взаимно простых чисел. Полученное противоречие завершает доказательство $\rhd$

Таким образом, из теоремы 3.1 и лемм 3.2, 3.3 незамедлительно следует

Теорема 3.2. *Пусть $A \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(i) *A обладает P-свойством;*
(ii) *в A существует бесконечное подмножество попарно взаимно простых чисел;*
(iii) $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$.

4. Бесконечное количество множителей и нижний функционал Сачестона

Перейдем теперь к изучению нижнего функционала Сачестона $q(\chi\mathscr{M}A)$.

Теорема 4.1. *Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — бесконечное множество попарно взаимно простых чисел. Тогда*

$$q(\chi\mathscr{M}A) \geqslant 1 - \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{a_j}\right). \tag{33}$$

$\lhd$ Заметим, что нижний функционал Сачестона можно представить в виде

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x), \tag{34}$$

где

$$q_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{j=m}^{m+n-1} x_j. \tag{35}$$

Поскольку предел (39) существует, то для его оценки можно использовать предел подпоследовательности $q_{n_k}(x)$, где $n_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$.

Заметим теперь, что в любом отрезке последовательности $\chi\mathscr{M}A$ длины n_k содержится не более $\prod_{j=1}^{k}(a_j - 1)$ нулей (могут попадаться «дополнительные» единицы — элементы с индексами, кратными a_j для $j > k$). Значит,

$$q_{n_k}(\chi\mathscr{M}A) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_k} \sum_{j=m}^{m+n_k-1} (\chi\mathscr{M}A)_j \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{k} \frac{a_i - 1}{a_i}. \tag{36}$$

Снова перейдя к пределу по k, получим

$$q(\chi\mathscr{M}A) \geqslant \lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{a_i - 1}{a_i} = 1 - \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_i - 1}{a_i}. \rhd \tag{37}$$

Следствие 4.1. *Пусть* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ *— бесконечное множество попарно взаимно простых чисел и* $a_{n+1} > a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. *Тогда*

$$q(\chi\mathscr{M}A) = 1 - \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{a_j}\right). \tag{38}$$

$\lhd$ Заметим, что нижний функционал Сачестона можно представить в виде

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x), \tag{39}$$

где

$$q_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\sum_{j=m}^{m+n-1} x_j. \tag{40}$$

Поскольку предел (39) существует, то для его оценки можно использовать предел подпоследовательности $q_{n_k}(x)$, где $n_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$.

Среди первых n_k элементов последовательности $\chi\mathscr{M}A$ ровно $\prod_{j=1}^{k}(a_j - 1)$ нулей, поскольку комбинации остатков от деления на взаимно простые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ «не успевают» повторяться. Следовательно,

$$q_{n_k}(\chi\mathscr{M}A) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_k}\sum_{j=m}^{m+n_k-1}(\chi\mathscr{M}A)_j \leqslant \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}(\chi\mathscr{M}A)_j = 1 - \prod_{i=1}^{k}\frac{a_i - 1}{a_i}. \tag{41}$$

Переходя к пределу по k, имеем

$$q(\chi\mathscr{M}A) \leqslant 1 - \lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i - 1}{a_i} = 1 - \prod_{i=1}^{\infty}\frac{a_i - 1}{a_i}. \tag{42}$$

Сопоставив (42) и (37), получим утверждение следствия. $\rhd$

Следствие 4.2. *В случае, когда* $\mathbb{N} \setminus A$ *конечно, из следствия* 2.1 *непосредственно вытекает, что* $\chi\mathscr{M}A \in ac_1$ *и, соответственно,* $q(\chi\mathscr{M}A) = 1$.

Классическая теорема Эйлера [12] говорит о том, что ряд обратных простых чисел

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{j}\frac{1}{j}, \tag{43}$$

где j пробегает все простые числа, расходится.

С учетом этого факта из теоремы 4.1 вытекает

Лемма 4.1. *Пусть* $\varepsilon \in (0; 1]$. *Существует бесконечное множество попарно непересекающихся подмножеств простых чисел* A_i *такое, что* $q(\chi\mathscr{M}A) \geqslant \varepsilon$ *для любого* $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.2. *Пусть* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ *есть бесконечное множество попарно взаимно простых чисел и*

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{a_j}\right) = 0 \tag{44}$$

Тогда $\chi\mathscr{M}A \in ac$ *и, более того,* $\chi\mathscr{M}A \in ac_1$.

$\lhd$ По теореме 4.1 условие (44) влечет равенство $q(\chi\mathscr{M}A) = 1$. По теореме 3.1 $p(\chi\mathscr{M}A) = 1$, откуда и следует требуемое. $\rhd$

Литература

1. *Mazur S.* O metodach sumowalnosci // Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement).—1929.—P. 102–107.
2. *Банах С.* Теория линейных операций.—М.–Ижевск: Регуляр. и хаот. динамика, 2001, 272 с.
3. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Mathematica.—1948.—Vol. 80, № 1.—P. 167–190. DOI: 10.1007/BF02393648.
4. *Sucheston L.* Banach limits // Amer. Math. Monthly.—1967.—Vol. 74.—P. 308–311. DOI: 10.2307/2316038.
5. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Геометрия банаховых пределов и их приложения // Успехи мат. наук.—2020.—Т. 75, № 4 (454).—С. 153–194. DOI: 10.4213/rm9901.
6. *Авдеев Н. Н.* О пространстве почти сходящихся последовательностей // Мат. заметки.—2019.—Т. 105, №3.—С. 462–466. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/mz/v105/i3/p462. DOI: 10.4213/mzm12298.
7. *Hall R. R., Tenenbaum G.* On Behrend sequences // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.—Cambridge University Press, 1992.—Vol. 112.—P. 467–482. DOI: 10.1017/S0305004100071140.
8. *Davenport H., Erdos P.* On sequences of positive integers // Acta Arithm.—1936.—Vol. 2.—P. 147–151. DOI: 10.4064/aa-2-1-147-151.
9. *Davenport H., Erdos P.* On sequences of positive integers // J. Indian Math. Soc., New Series.—1951.—Vol. 15.—P. 19–24. DOI: 10.18311/JIMS/1951/17063.
10. *Besicovitch A.* On the density of certain sequences of integers // Mathematische Annalen.—1935.—Vol. 110, № 1.—P. 336–341. DOI: 10.1007/BF01448032.
11. *Hall R. R.* Sets of Multiples.—Cambridge: Cambridge University Press, 1996.—(Cambridge Tracts in Mathematics). DOI: 10.1017/CBO9780511566011.
12. *Euler L.* Variae observationes circa series infinitas // Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.—1737.—Vol. 9, № 1737.—P. 160–188.

Статья поступила 17 мая 2020 г.

Авдеев Николай Николаевич
Воронежский государственный университет,
аспирант
РОССИЯ, 394006, Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: avdeev@math.vsu.ru, nickkolok@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 4, P. 5–14

ALMOST CONVERGENT 0-1-SEQUENCES AND PRIMES

Avdeev, N. N.[1]

[1] Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh 394006, Russia
E-mail: avdeev@math.vsu.ru, nickkolok@mail.ru

Abstract. This paper is devoted to 0-1-sequences. We establish the connection between values that Sucheston functional can take on 0-1-sequence and multiplicative structure of the support of the sequence. If the set of all the divisors of support elements is finite, then the sequence is almost convergent to zero. Then we consider characteristic sequences of sets of multiples and establish necessary and sufficient conditions for the upper Sucheston functional to be 1 on such sequence. We prove that there are infinitely many sets of pairwise relative prime numbers such that the lower Sucheston functional evaluates to 1 on the corresponding set of multiples (and lower Sucheston functional never evaluates to 0 on a set of multiples).

Key words: space of bounded sequences, Banach limit, Sucheston functional, almost convergent sequence, 0-1-sequence, integer factorization, sets of multiples.

Mathematical Subject Classification (2010): 46B45, 11A51.

For citation: *Avdeev, N. N.* Almost Convergent 0-1-Sequences and Primes, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 5–14 (in Russian). DOI: 10.46698/p9825-1385-3019-c.

References

1. *Mazur, S.* O Metodach Sumowalnosci, *Ann. Soc. Polon. Math.* (*Supplement*), 1929, pp. 102–107.
2. *Banach, S. Theorie des Operations Lineaires*, Sceaux, Editions Jacques Gabay, 1993, iv+128 p.
3. *Lorentz, G. G.* A Contribution to the Theory of Divergent Sequences, *Acta Mathematica*, 1948, vol. 80, no. 1, pp. 167–190. DOI: 10.1007/BF02393648.
4. *Sucheston, L.* Banach Limits, *Amer. Math. Monthly*, 1967, vol. 74, pp. 308–311. DOI: 10.2307/2316038.
5. *Semenov, E. M., Sukochev, F. A. and Usachev, A. S.* Geometry of Banach Limits and their Applications, *Russian Mathematical Surveys*, 2020, vol. 75, no. 4, pp. 725. DOI: 10.1070/RM9901.
6. *Avdeev, N.* On the Space of Almost Convergent Sequences, *Mathematical Notes*, 2019, vol. 105, no. 3/4, pp. 464–468. DOI: 10.1134/S0001434619030179.
7. *Hall, R. R. and Tenenbaum, G.* On Behrend Sequences, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, 1992, vol. 112, pp. 467–482. DOI: 10.1017/S0305004100071140.
8. *Davenport, H. and Erdos, P.* On Sequences of Positive Integers, *Acta Arithm*, 1936, vol. 2, pp. 147–151. DOI: 10.4064/aa-2-1-147-151.
9. *Davenport, H. and Erdos, P.* On Sequences of Positive Integers, *J. Indian Math. Soc., New Series*, 1951, vol. 15, pp. 19–24. DOI: 10.18311/JIMS/1951/17063.
10. *Besicovitch, A.* On the Density of Certain Sequences of Integers, *Mathematische Annalen*, 1935, vol. 110, no. 1, pp. 336–341. DOI: 10.1007/BF01448032.
11. *Hall, R. R. Sets of Multiples*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge, Cambridge University Press, 1996. DOI: 10.1017/CBO9780511566011.
12. *Euler, L.* Variae Observationes Circa Series Infinitas, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 1737, vol. 9, no. 1737, pp. 160–188.

Received May 17, 2021

Nikolai N. Avdeev
Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh 394006, Russia,
Postgraduate Student
E-mail: avdeev@math.vsu.ru, nickkolok@mail.ru