Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 4, С. 68–76

УДК 519.17
DOI 10.46698/y2738-1800-0363-i

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{7,6,6;1,1,2\}$ И $\{42,30,2;1,10,36\}$ НЕ СУЩЕСТВУЮТ[#]

А. А. Махнев[1], В. В. Биткина[2], А. К. Гутнова[2,3]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[2] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
[3] Северо-Кавказский центр математических исследований,
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 19

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

Аннотация. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 без треугольников, u — вершина графа Γ, $\Delta^i = \Gamma_i(u)$ и $\Sigma^i = \Delta^i_{2,3}$. Тогда Σ^i — регулярный граф без 3-коклик степени $k' = k_i - a_i - 1$ на $v' = k_i$ вершинах. Заметим, что для несмежных вершин $y, z \in \Sigma^i$ имеем $\Sigma^i = \{y,z\} \cup \Sigma^i(y) \cup \Sigma^i(z)$. Поэтому для $\mu' = |\Sigma^i(y) \cap \Sigma^i(z)|$ имеем равенство $v' = 2k' + 2 - \mu'$. Отсюда граф Σ является кореберно регулярным с параметрами (v', k', μ'). В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ не существует. В статье М. С. Нировой «On distance-regular graphs with $\theta_2 = -1$» показано, что если существует сильно регулярный граф с параметрами $(176,49,12,14)$, в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$. М. П. Голубятников заметил, что для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ граф Γ_2 является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{42,30,2;1,10,36\}$. С помощью этого результата и вычисления тройных чисел пересечений доказано, что дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ и $\{42,30,2;1,10,36\}$ не существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, граф без треугольников, тройные числа пересечений.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

Образец цитирования: *Махнев А. А., Биткина В. В., Гутнова А. К.* Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ и $\{42,30,2;1,10,36\}$ не существуют // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 3.—С. 68–76. DOI: 10.46698/y2738-1800-0363-i.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

[#] Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований и Государственным фондом естественных наук Китая в рамках научного проекта № 20-51-53013. Третий автор поддержан Министерством науки и высшего образования РФ, соглашение №075-02-2021-1552.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Графом Тэйлора называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k,\mu,1;1,\mu,k\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d. Для $i,j \in \{1,2,3,\dots,d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u,w) = i$.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = t+1$, то геометрия называется двойственной 2-схемой.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 без треугольников, u — вершина графа Γ, $\Delta^i = \Gamma_i(u)$ и $\Sigma^i = \Delta^i_{2,3}$. Тогда граф Σ^i является кореберно регулярным с параметрами (v',k',μ'), где $v' = k_i$, $k' = k_i - a_i - 1$ и $\mu' = 2k' + 2 - v'$.

Приведем примеры допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов диаметра 3 без треугольников из [1, с. 425–431].

1. $\{4,3,3;1,1,2\}$ (нечетный граф на 7 точках).
2. $\{5,4,2;1,1,4\}$ (граф Сильвестра).
3. $\{5,4,3;1,1,2\}$ (граф не существует по [2]).
4. $\{6,5,2;1,1,3\}$ (граф Перкеля).
5. $\{7,6,5;1,1,3\}$ (свернутый 7-куб).
6. $\{7,6,6;1,1,2\}$.
7. $\{8,7,5;1,1,4\}$.
8. $\{11,10,4;1,1,5\}$.
9. $\{15,14,12;1,1,9\}$ (граф из [1, §11.4B]).
10. $\{17,16,10;1,2,8\}$, $q^3_{33} = 0$.
11. $\{21,20,10;1,1,12\}$.
12. $\{21,20,16;1,2,12\}$ (граф смежных классов дважды усеченного бинарного кода Голея).
13. $\{22,21,4;1,2,14\}$.
14. $\{22,21,20;1,2,6\}$ (граф смежных классов усеченного бинарного кода Голея), $q^3_{33} = 0$.
15. $\{25,24,3;1,3,20\}$.
16. $\{25,24,9;1,1,20\}$.
17. $\{31,30,17;1,2,15\}$.

В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ не существует.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7,6,6;1,1,2\}$ *не существует.*

В [3] получен следующий результат.

Предложение 1. *Если существует сильно регулярный граф с параметрами* $(176,49,12,14)$*, в котором окрестности вершин являются* 7×7*-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7,6,6;1,1,2\}$.

Следствие 1. *Не существует сильно регулярный граф с параметрами* $(176,49,12,14)$*, в котором окрестности вершин являются* 7×7*-решетками.*

М. П. Голубятников заметил, что для дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ граф Γ_2 является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{42,30,2;1,10,36\}$.

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{42,30,2;1,10,36\}$ *не существует.*

Теорема 2 дает другое доказательство несуществования дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$.

В работе используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}$ — множество вершин $w\in\Gamma$ таких, что

$$d(w,u_i)=r_i,\qquad \begin{bmatrix} u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{bmatrix}=\left|\begin{Bmatrix} u_1u_2u_3\\ r_1r_2r_3\end{Bmatrix}\right|.$$

Числа $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1,u_2,u_3 вместо $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W=d(u,v)$, $U=d(v,w)$, $V=d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x=u$ такая, что $d(x,u)=0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh]=\delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h]=\delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0]=\delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u,v,w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим

$$\sum_{l=1}^{d}[ljh]=p^U_{jh}-[0jh],\quad \sum_{l=1}^{d}[ilh]=p^V_{ih}-[i0h],\quad \sum_{l=1}^{d}[ijl]=p^W_{ij}-[ij0]. \qquad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j|>W$ или $i+j<W$ имеем $p^W_{ij}=0$, поэтому $[ijh]=0$ для всех $h\in\{0,\ldots,d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u,v,w)=\sum_{r,s,t=0}^{d}Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\begin{bmatrix} uvw\\ rst\end{bmatrix}.$$

Если параметр Крейна $q^h_{ij}=0$, то $S_{ijh}(u,v,w)=0$.

Зафиксируем вершины u,v,w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\}=\left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh]=\left[{uvw \atop ijh} \right]$, $[ijh]'=\left[{uvw \atop ihj} \right]$, $[ijh]^*=\left[{uvw \atop jih} \right]$ и $[ijh]^\sim=\left[{uvw \atop hji} \right]$. В случаях $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$ или $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$ вычисление чисел $[ijh]'=\left[{uvw \atop ihj} \right]$, $[ijh]^*=\left[{uvw \atop jih} \right]$ и $[ijh]^\sim=\left[{uvw \atop hji} \right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$. Тогда Γ имеет спектр 7^1, 3^{66}, -1^{77}, -4^{32}, $1+7+42+126=176$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 66 & 77 & 32\\ 1 & \frac{198}{7} & -11 & -\frac{128}{7}\\ 1 & \frac{22}{7} & -11 & \frac{48}{7}\\ 1 & -\frac{22}{7} & \frac{11}{3} & -\frac{32}{21}\end{pmatrix}.$$

По [5, лемма 3] граф $\Sigma=\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{15}(21,5)$.

Лемма 1. Γ *имеет следующие числа пересечений:*

(1) $p^1_{11}=0$, $p^1_{21}=6$, $p^1_{32}=36$, $p^1_{22}=0$, $p^1_{33}=90$;

(2) $p^2_{11}=1$, $p^2_{12}=0$, $p^2_{13}=6$, $p^2_{22}=11$, $p^2_{23}=30$, $p^2_{33}=90$;

(3) $p^3_{12}=2$, $p^3_{13}=5$, $p^3_{22}=10$, $p^3_{23}=30$, $p^3_{33}=90$.

$\lhd$ Прямые вычисления. $\rhd$

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{rst\}=\left\{\begin{smallmatrix}uvw\\ rst\end{smallmatrix}\right\}$ и $[rst]=\left[\begin{smallmatrix}uvw\\ rst\end{smallmatrix}\right]$. Положим $\Sigma=\Gamma_3(u)$ и $\Lambda=\Sigma_3$. Тогда Λ является регулярным графом степени 90 на 126 вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=3$ *и* $d(v,w)=1$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

(1) $[123]=[132]=2$, $[133]=3$;

(2) $[212]=[221]=2$, $[223]=[232]=8$, $[233]=22$;

(3) $[312]=[321]=4$, $[323]=[332]=26$, $[333]=64$

$\lhd$ Упрощение формул (+). $\rhd$

По лемме 2 имеем $[333]=64$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=3$ *и* $d(v,w)=2$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

(1) $[122]=-r_4+r_6-18$, $[123]=[132]=r_4-r_6+20$, $[133]=-r_4+r_6-15$;

(2) $[211]=r_5$, $[213]=[231]=-r_5+2$, $[222]=r_4$, $[223]=[232]=-r_4+10$, $[233]=r_4+r_5+18$;

(3) $[311]=-r_5+1$, $[313]=[331]=r_5+4$, $[322]=-r_6+29$, $[323]=[332]=r_6$, $[333]=-r_5-r_6+86$,

где $r_4\in\{0,1,\ldots,10\}$, $r_5\in\{0,1\}$, $r_6\in\{18,19,\ldots,29\}$.

$\lhd$ Упрощение формул (+). $\rhd$

По лемме 3 имеем $56\leqslant[333]=-r_5-r_6+86\leqslant 68$.

Лемма 4. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

(1) $[122]=-r_7+2$, $[123]=[132]=r_7$, $[133]=-r_7+5$;

(2) $[212]=-r_{10}+2$, $[213]=r_{10}$, $[221]=-r_8+2$, $[222]=r_9$, $[223]=r_8-r_9+8$, $[231]=r_8$, $[232]=r_{10}-r_9+8$, $[233]=-r_{10}-r_8+r_9+22$;

(3) $[312]=r_{10}$, $[313]=-r_{10}+5$, $[321]=r_8$, $[322]=r_7-r_9+8$, $[323]=-r_7-r_8+r_9+22$, $[331]=-r_8+5$, $[332]=-r_{10}-r_7+r_9+22$, $[333]=r_{10}+r_7+r_8-r_9+62$,

где $r_7,r_8,r_{10}\in\{0,1,2\}$, $r_9\in\{0,1,\dots,10\}$.

$\lhd$ С помощью упрощения формул $(+)$ получим равенства

$[122]=-r_7+2$, $[123]=[132]=r_7$, $[133]=-r_7+5$;

$[212]=-r_{10}+2$, $[213]=r_{10}$, $[221]=-r_8+2$, $[222]=r_9$, $[223]=r_8-r_9+8$, $[231]=r_8$, $[232]=r_{10}-r_9+8$, $[233]=-r_{10}-r_8+r_9+22$;

$[312]=r_{10}$, $[313]=-r_{10}+5$, $[321]=r_8$, $[322]=r_7-r_9+8$, $[323]=-r_7-r_8+r_9+22$, $[331]=-r_8+5$, $[332]=-r_{10}-r_7+r_9+22$, $[333]=r_{10}+r_7+r_8-r_9+62$,

где $r_7,r_8,r_{10}\in\{0,1,2\}$, $r_9\in\{0,1,\dots,10\}$.

Симметризация. Имеем равенства

$$[222]=r_9=r_9'=r_9^*=r_{13}^\sim,\quad [123]=[132]=r_7=r_7',\quad [213]=r_{10}=[231]'=r_8',$$

$$[213]=[312]=r_{10}=r_{10}^\sim,\quad [231]=[321]=r_8=r_8^*.$$

Далее, $[312]=r_{10}=r_{10}^\sim$, поэтому

$$r_{10}'=(r_{10}^*)^\sim \quad \text{и} \quad [321]=r_8=[132]^\sim=r_7^\sim.$$

Аналогично $[231]=[321]=r_8=r_8^*$, поэтому

$$r_8'=(r_8^\sim)^* \quad \text{и} \quad [213]=r_{10}=[132]^*=r_7^*.$$

Лемма доказана. $\rhd$

Теперь $r_7\leqslant 2$, $r_9\leqslant r_7+8\leqslant 10$, поэтому

$$52\leqslant[333]=r_{10}+r_7+r_8-r_9+62\leqslant 68.$$

Так как $\{v,w\}\cup\Lambda(v)\cup\Lambda(w)$ содержит $180-[333]$ вершин, то

$$54\leqslant[333]=r_{10}+r_7+r_8-r_9+62\leqslant 68 \quad \text{и} \quad r_9-r_{10}-r_7-r_8\leqslant 8.$$

Ввиду лемм 2–3 для числа ребер e между $\Lambda(w)$ и $\Lambda-(\{w\}\cup\Lambda(w))$ верны неравенства

$$1900=5\cdot 56+30\cdot 54\leqslant e=5\cdot 68+30\cdot 68=2380.$$

С другой стороны, по лемме 4 имеем

$$e=90\cdot 89-\sum_i[333]^i=90\cdot 89-\sum_i\left(r_{10}^i+r_7^i+r_8^i-r_9^i\right)-90\cdot 62,$$

поэтому

$$1900\leqslant e=2430-\sum_i\left(r_{10}^i+r_7^i+r_8^i-r_9^i\right)\leqslant 2380,\quad 50\leqslant\sum_i\left(r_{10}^i+r_7^i+r_8^i-r_9^i\right)\leqslant 530,$$

$$0.55\leqslant\sum_i\frac{r_{10}^i+r_7^i+r_8^i-r_9^i}{90}\leqslant 5.89.$$

Противоречие с тем, что $8\leqslant r_{10}+r_7+r_8-r_9$.

Итак, граф с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$ не существует.

Теорема 1 доказана.

3. Граф с массивом пересечений $\{42,30,2;1,10,36\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{42,30,2;1,10,36\}$. Тогда Γ имеет спектр 42^1, 9^{32}, 2^{66}, -6^{77}, $1+42+126+7=176$ вершин и дуальную матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 32 & 66 & 77\\ 1 & \frac{48}{7} & \frac{22}{7} & -11\\ 1 & -\frac{32}{21} & -\frac{22}{7} & \frac{11}{3}\\ 1 & -\frac{128}{7} & \frac{198}{7} & -11\end{pmatrix}.$$

Лемма 5. Γ *имеет следующие числа пересечений:*

(1) $p^1_{11}=11$, $p^1_{21}=30$, $p^1_{32}=6$, $p^1_{22}=90$, $p^1_{33}=1$;

(2) $p^2_{11}=10$, $p^2_{12}=30$, $p^2_{13}=2$, $p^2_{22}=90$, $p^2_{23}=5$, $p^2_{33}=0$;

(3) $p^3_{12}=36$, $p^3_{13}=6$, $p^3_{22}=90$, $p^3_{23}=0$, $p^3_{33}=0$.

$\lhd$ Прямые вычисления. $\rhd$

Ввиду леммы 5 граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами (176,126,90,90) и неглавными собственными значениями 6, -6. Далее, граф Γ_3 является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{7,6,6;1,1,2\}$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{rst\}=\left\{{uvw \atop rst}\right\}$ и $[rst]=\left[{uvw \atop rst}\right]$. Положим $\Delta=\Gamma_2(u)$ и $\Lambda=\Delta_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени 90 на 126 вершинах.

Лемма 6. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=2$ и $d(v,w)=1$. Тогда тройные числа пересечений равны:*

(1) $[111]=r_2+r_3-19$, $[112]=[121]=-r_2-r_3+29$, $[122]=r_2$, $[123]=[132]=r_3+1$, $[133]=-r_3+1$;

(2) $[211]=-r_1-r_2-r_3+30$, $[212]=[221]=r_1+r_2+r_3-12$, $[222]=-r_1-r_2+86$, $[223]=[232]=-r_3+5$, $[233]=r_3$;

(3) $[311]=r_1$, $[312]=[321]=-r_1+2$, $[322]=r_3+3$,

где $r_1\in\{0,1,2\}$, $r_2\in\{18,19,\dots,29\}$, $r_3\in\{0,1\}$.

$\lhd$ Упрощение формул (+). $\rhd$

По лемме 6 имеем $56\leqslant[222]=-r_1-r_2+86\leqslant 68$.

Лемма 7. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=2$ и $d(v,w)=3$. Тогда тройные числа пересечений равны:*

(1) $[112]=[121]=8$, $[122]=22$, $[113]=[131]=2$;

(2) $[212]=[221]=26$, $[213]=[231]=4$, $[222]=64$;

(3) $[312]=[321]=2$, $[322]=3$.

$\lhd$ Упрощение формул (+). $\rhd$

По лемме 7 имеем $[222]=64$.

Лемма 8. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$. Тогда тройные числа пересечений равны:*

(1) $[111]=r_6-r_7+8$, $[112]=-r_4-r_5+30$, $[113]=r_4+r_5-r_6+r_7-28$, $[121]=r_4-r_6+r_7$, $[122]=r_5$, $[123]=-r_4-r_5+r_6-r_7+30$, $[131]=-r_4+2$, $[132]=r_4$;

(2) $[211]=r_7$, $[212]=r_4+r_5-r_6$, $[213]=-r_4-r_5+r_6-r_7+30$, $[221]=-r_4-r_5+30$, $[222]=-r_5+r_6+84$, $[223]=r_4+r_5-r_6+r_7-25$, $[231]=r_4$, $[232]=-r_4+5$;

(3) $[311] = -r_6 + 2$, $[312] = [321] = r_6$, $[322] = -r_6 + 5$,
где $r_4, r_6 \leqslant 2$, $r_7 \leqslant r_6 + 8 \leqslant 10$, $15 \leqslant r_6 + 25 - r_4 - r_7 \leqslant r_5 \leqslant r_4 + 30 \leqslant 32$.

$\lhd$ Упрощение формул $(+)$. $\rhd$

По лемме 8 имеем $54 \leqslant [222] = -r_5 + r_6 + 84 \leqslant 73$.

Пусть $d(u, v) = 2$. Ввиду лемм 6, 7 для числа ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ верны неравенства

$$2000 = 30 \cdot 56 + 5 \cdot 64 \leqslant d \leqslant 30 \cdot 68 + 5 \cdot 64 = 2360.$$

С другой стороны, по лемме 8 имеем $[222] = -r_5 + r_6 + 84$, поэтому

$$2000 \leqslant d = 90 \cdot 89 + \sum_i \left(r_5^i - r_6^i\right) - 90 \cdot 84 \leqslant 2360, \quad 17.222 \leqslant \sum_i \frac{r_5^i - r_6^i}{90} \leqslant 20.112.$$

Симметризация. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда верны равенства

$$[122] = r_5 = r_5', \quad [211] = r_7 = r_7', \quad [131] = -r_4 + 2,$$

поэтому

$$r_4 = r_4^{\sim}, \quad r_4 = [132] = [312]^* = r_6^*, \quad [311] = -r_6 + 2 \quad \text{и} \quad r_6 = r_6'.$$

Далее, $[122] = r_5 = r_5'$ влечет $r_5^* = (r_5^{\sim})'$, поэтому

$$[212] = r_4 + r_5 - r_6 = [221]' = -r_4' - r_5' + 30 \quad \text{и} \quad r_4 + r_4' + 2r_5 = r_6 + 30.$$

Аналогично $[211] = r_7 = r_7'$ влечет $r_7^* = (r_7^{\sim})'$, поэтому

$$[121] = r_4 - r_6 + r_7 = [112]' = -r_4' - r_5' + 30 \quad \text{и} \quad r_4 + r_4' + r_5 + r_7 = r_6 + 30.$$

Сравнивая с $r_4 + r_4' + 2r_5 = r_6 + 30$, получим $r_5 = r_7$. Противоречие с тем, что $r_7 \leqslant 10$ и $13 \leqslant r_5$.

Итак, граф с массивом пересечений $\{42, 30, 2; 1, 10, 36\}$ не существует.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.
2. *Fon Der Flaas D.* There exists no distance-regular graph with intersection array $\{5, 4, 3; 1, 1, 2\}$ // Europ. J. Comb.—1993.—Vol. 14, № 5.—P. 409–412. DOI: 10.1006/eujc.1993.1045.
3. *Нирова М. С.* О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН.—2018.—Т. 24, № 2.—С. 215–228. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-215-228.
4. *Coolsaet K., Jurishich A.* Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory. Ser. A.—2008.—Vol. 115, № 6.—P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. *Махнев А. А., Нирова М. С.* Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки.—2018.—Т. 103, № 5.—С. 730–744. DOI: 10.4213/mzm11503.

Статья поступила 14 декабря 2020 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Биткина Виктория Васильевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры прикладной математики и информатики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: `bviktoriyav@mail.ru`

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46;
Северо-Кавказский центр математических исследований,
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 19
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-7467-724X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 4, P. 68–76

DISTANCE-REGULAR GRAPHS WITH INTERSECTION ARRAYS $\{7,6,6;1,1,2\}$ AND $\{42,30,2;1,10,36\}$ DO NOT EXIST

Makhnev, A. A.[1], Bitkina, V. V.[2] and Gutnova, A. K.[2,3]

[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia;
[2]North Ossetian State University, 44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
[3]North Caucasus Center for Mathematical Research,
19 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`, `bviktoriyav@mail.ru`, `gutnovaalina@gmail.com`

Abstract. Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 without triangles, u be a vertex of the graph Γ, $\Delta^i=\Gamma_i(u)$ and $\Sigma^i=\Delta^i_{2,3}$. Then Σ^i is a regular graph without 3-cocliques of degree $k'=k_i-a_i-1$ on $v'=k_i$ vertices. Note that for non-adjacent vertices $y,z\in\Sigma^i$ we have $\Sigma^i=\{y,z\}\cup\Sigma^i(y)\cup\Sigma^i(z)$. Therefore, for $\mu'=|\Sigma^i(y)\cap\Sigma^i(z)|$ we have the equality $v'=2k'+2-\mu'$. Hence the graph Σ is coedge regular with parameters (v',k',μ'). It is proved in the paper that a distance-regular graph with intersection array $\{7,6,6;1,1,2\}$ does not exist. In the article by M. S. Nirova “On distance-regular graphs with $\theta_2=-1$” is proved that if there is a strongly regular graph with parameters $(176,49,12,14)$, in which the neighborhoods of the vertices are 7×7 -lattices, then there also exists a distance-regular graph with intersection array $\{7,6,6;1,1,2\}$. M. P. Golubyatnikov noticed that for a distance-regular graph Γ with intersection array $\{7,6,6;1,1,2\}$ graph Γ_2 is distance regular with intersection array $\{42,30,2;1,10,36\}$. With this result and calculations of the triple intersection numbers, it is proved that the distance-regular graphs with intersection arrays $\{7,6,6;1,1,2\}$ and $\{42,30,2;1,10,36\}$ do not exist.

Key words: distance-regular graph, triangle-free graph, triple intersection numbers.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D05.

For citation: *Makhnev, A. A., Bitkina, V. V. and Gutnova, A. K.* Distance-Regular Graphs with Intersection Arrays $\{7,6,6;1,1,2\}$ and $\{42,30,2;1,10,36\}$ Do not Exist, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 68–76 (in Russian). DOI: 10.46698/y2738-1800-0363-i.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989.
2. *Fon Der Flaas, D.* There Exists no Distance-Regular Graph with Intersection Array $\{5,4,3;1,1,2\}$, *European Journal of Combinatorics*, 1993, vol. 14, no. 5, pp. 409–412. DOI: 10.1006/eujc.1993.1045.

3. *Nirova, M. S.* On Distance-Regular Graphs with $\theta_2 = -1$, *Trudy Iinstituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 212–219 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-215-228.
4. *Coolsaet, K. and Jurishich, A.* Using Equality in the Krein Conditions to Prove Nonexistence of Certain Distance-Regular Graphs, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, 2008, vol. 115, pp. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.
5. *Makhnev, A. A. and Nirova, M. S.* Distance-Regular Shilla Graphs with $b_2 = c_2$, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 5–6, pp. 780–792. DOI: 10.1134/S0001434618050103.

Received December 14, 2020

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Head of Departament of Algebra and Topology
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Viktoriya V. Bitkina
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department
of Applied Mathematics and Informatics
E-mail: `bviktoriyav@mail.ru`

Alina K. Gutnova
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Analysis;
North Caucasus Center for Mathematical Research,
19 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-7467-724X