Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 4, С. 77–88

УДК 517.98+530.1
DOI 10.46698/h4964-7674-7067-w

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕР ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ТРИ

М. М. Рахматуллаев[1,2]**, Ж. Д. Дехконов**[3]

[1] Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университеткая, 7;
[2] Наманганский государственный университет,
Узбекистан, 160136, Наманган, ул. Уйчи, 316;
[3] Андижанский государственный университет,
Узбекистан, 170100, Андижан, ул. Университетская, 129
E-mail:`mrahmatullaev@rambler.ru`, `dehqonovjasur@bk.ru`

Аннотация. Одна из основных проблем для гамильтониана модели Изинга — это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что для модели Изинга такие меры образуют непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер. Задача полного описания элементов этого множества далека от своего завершения. Для модели Изинга на дереве Кэли порядка три были изучены трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса, но слабо периодические меры Гиббса не были изучены. Отметим, что всякая периодическая мера Гиббса также является слабо периодической, но обратное неверно. Поэтому интересно изучать слабо периодические меры Гиббса, не являющиеся периодическими. Работа посвящена изучению слабо периодических (не периодических) мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка три ($k = 3$). Известно, что слабо периодическая мера Гиббса для модели Изинга зависеть от выбора нормального делителя группового представления дерева Кэли. В данной работе рассматривается один из нормальных делителей индекса четыре группового представления дерева Кэли. Относительно этого нормального делителя доказано существование слабо периодических (не периодических) мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка три. Точнее, доказано, что при некоторых условиях на параметры существуют не менее 4 слабо периодических (не периодических) мер Гиббса.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Изинга, слабо периодическая мера.

Mathematical Subject Classification (2010): 82B26, 60K35.

Образец цитирования: *Рахматуллаев М. М., Дехконов Ж. Д.* Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка три // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 4.—С. 77–88. DOI: 10.46698/h4964-7674-7067-w.

1. Введение

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более одной меры Гиббса, то говорят, что существует фазовый переход. Основная проблема для данного Гамильтониана — описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Эти меры, в основном, были трансляционно-инвариантными, либо периодическими с периодом два. Более того, для многих моделей на дереве Кэли доказано, что множество периодических мер Гиббса очень бедно, т. е. существуют периодические гиббсовские меры с периодом два. В работах [1–4] для модели Изинга описаны трансляционно-инвариантные меры Гиббса на дереве Кэли. Описанию периодических гиббсовских мер для некоторых моделей с конечным числом радиуса взаимодействия посвящены работы [5–11].

Чтобы получить более широкое множество гиббсовских мер, в работах [12–15] введены более общие понятия периодической меры Гиббса, т. е. слабо периодические гиббсовские меры, и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k \geqslant 4$. В работах [1, 15, 16] изучены континуальные множества непериодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли.

В работе [11] для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ найдены новые классы гиббсовских мер, подобных слабо периодическим. В работах [17] и [18] доказано, что на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ относительно нормального делителя индекса два не существуют слабо периодические меры Гиббса. В работе [19] изучены слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга с внешним полем. А в работах [20] и [21] изучены слабо периодические меры Гиббса для модели Поттса.

В данной статье изучаются слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка три относительно нормального делителя индекса четыре.

Структура работы: в § 2 даются необходимые определения и постановка задачи, § 3 посвящен изучению существования слабо периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка три.

2. Определения и постановка задачи

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geqslant 1$, — дерево Кэли порядка k, т. е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k. Известно, что τ^k можно представить как G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка.

Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ — конфигурация, т. е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$.

Рассмотрим гамильтониан модели Изинга

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

где $J \in R$, $\langle x, y\rangle$ — ближайшие соседи.

Известно, что каждой мере Гиббса модели Изинга соответствует совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \tag{2}$$

где $S(x)$ — множество *прямых потомков*, точки $x \in V$ и $f(x, \theta) = \mathrm{arcth}(\theta th x)$, $\theta = th(J\beta)$, $\beta = 1/T$, $T > 0$ — температура (см. [1–4]).

Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ — фактор группа, где $\widehat{G}_k$ — нормальный делитель индекса $r \geqslant 1$. Для $x \in G_k$ обозначим через $x_\downarrow = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\} \backslash S(x)$.

Определение 1. Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется $\widehat{G}_k$-*периодической* ($\widehat{G}_k$-*слабо периодической*), если $h_x = h_i$, при $x \in H_i$ ($h_x = h_{ij}$, при $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$), $\forall\, x \in G_k$. G_k-периодическая мера называется *трансляционно-инвариантной мерой.*

Определение 2. Говорят, что мера μ является $\widehat{G}_k$-(*слабо*) *периодической*, если она соответствует $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической совокупности величин h.

В работах [17] и [18] доказано, что на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ относительно нормального делителя индекса два не существуют слабо периодические меры Гиббса. А в работе [11] для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ найдены новые классы гиббсовских мер, подобных слабо периодическим. В работе [22] доказано, что в группе G_k не существует нормального делителя нечетного (отличного от единицы) индекса. В работе [23] доказано существование слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k = 2$ относительно нормального делителя индекса 4. Поэтому естественно рассмотреть задачу существования слабо периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка три относительно нормального делителя индекса четыре.

Целью работы является описание множества слабо периодических гиббсовских мер для модели Изинга на дереве Кэли порядка три относительно нормального делителя индекса четыре.

3. Слабо периодические меры

Отметим, что слабо периодические меры Гиббса зависят от выбора нормального делителя.

Пусть $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ — четно}\}$, где $w_x(a_i)$ — число буквы a_i в слове $x \in G_k$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| \text{ — четно}\}$ и $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ — соответствующий ему нормальный делитель индекса 4.

Замечание 1. Среди всех нормальных делителей индекса 4 выбранный нами нормальный делитель $G_k^{(4)}$ удобен тем, что в этом случае из системы (2) мы получаем систему уравнений с 8 неизвестными, при этом для произвольного нормального делителя индекса 4 число неизвестных может достигать 16.

Рассмотрим фактор группу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$H_0 = \big\{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ — четно, } |x| \text{ — четно}\big\}$,

$H_1 = \big\{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ — нечетно, } |x| \text{ — четно}\big\}$,

$H_2 = \big\{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ — четно, } |x| \text{ — нечетно}\big\}$,

$H_3 = \big\{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ — нечетно, } |x| \text{ — нечетно}\big\}$.

Тогда в силу (2) $G_k^{(4)}$-слабо периодическая совокупность h имеет вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x \in H_3,\ x_\downarrow \in H_1, \\ h_2, & x \in H_1,\ x_\downarrow \in H_3, \\ h_3, & x \in H_3,\ x_\downarrow \in H_0, \\ h_4, & x \in H_0,\ x_\downarrow \in H_3, \\ h_5, & x \in H_1,\ x_\downarrow \in H_2, \\ h_6, & x \in H_2,\ x_\downarrow \in H_1, \\ h_7, & x \in H_2,\ x_\downarrow \in H_0, \\ h_8, & x \in H_0,\ x_\downarrow \in H_2, \end{cases} \tag{3}$$

где h_j, $j = \overline{1, 8}$, удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = (k-i)f(h_2, \theta) + if(h_4, \theta), \\ h_2 = (k-i)f(h_1, \theta) + if(h_6, \theta), \\ h_3 = (k-i+1)f(h_2, \theta) + (i-1)f(h_4, \theta), \\ h_4 = (k-i+1)f(h_7, \theta) + (i-1)f(h_3, \theta), \\ h_5 = (k-i+1)f(h_1, \theta) + (i-1)f(h_6, \theta), \\ h_6 = (k-i+1)f(h_8, \theta) + (i-1)f(h_5, \theta), \\ h_7 = (k-i)f(h_8, \theta) + if(h_5, \theta), \\ h_8 = (k-i)f(h_7, \theta) + if(h_3, \theta), \end{cases} \tag{4}$$

здесь $i = |A|$ — мощность множества A.

Пользуясь тем, что $f(h,\theta)=\operatorname{arcth}(\theta thh)=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\theta)e^{2h}+(1-\theta)}{(1-\theta)e^{2h}+(1+\theta)}$, и обозначив $\alpha=\frac{1-\theta}{1+\theta}$, $z_i=e^{2h_i}$, где $i=\overline{1,4}$, из (4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1=(\varphi(z_2))^{k-i}\,(\varphi(z_4))^{i},\\ z_2=(\varphi(z_1))^{k-i}\,(\varphi(z_6))^{i},\\ z_3=(\varphi(z_2))^{k-i+1}\,(\varphi(z_4))^{i-1},\\ z_4=(\varphi(z_7))^{k-i+1}\,(\varphi(z_3))^{i-1},\\ z_5=(\varphi(z_1))^{k-i+1}\,(\varphi(z_6))^{i-1},\\ z_6=(\varphi(z_8))^{k-i+1}\,(\varphi(z_5))^{i-1},\\ z_7=(\varphi(z_8))^{k-i}\,(\varphi(z_5))^{i},\\ z_8=(\varphi(z_7))^{k-i}\,(\varphi(z_3))^{i}, \end{cases} \tag{5}$$

где $\varphi(z)=\frac{z+\alpha}{\alpha z+1}$.

Запишем систему уравнений (5) в виде

$$\begin{cases} z_1=(\varphi(z_2))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)}\right)^{i},\\ z_2=(\varphi(z_1))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)}\right)^{i},\\ z_3=(\varphi(z_2))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)}\right)^{i-1},\\ z_4=(\varphi(z_7))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_3)}{\varphi(z_7)}\right)^{i-1},\\ z_5=(\varphi(z_1))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)}\right)^{i-1},\\ z_6=(\varphi(z_8))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_5)}{\varphi(z_8)}\right)^{i-1},\\ z_7=(\varphi(z_8))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_5)}{\varphi(z_8)}\right)^{i},\\ z_8=(\varphi(z_7))^{k}\left(\dfrac{\varphi(z_3)}{\varphi(z_7)}\right)^{i}. \end{cases} \tag{6}$$

Разделив в этой системе уравнений первое уравнение на третье, второе на пятое, шестое на седьмое, четвертое на восьмое, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{z_1}{z_3}=\dfrac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)},\\ \dfrac{z_2}{z_5}=\dfrac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)},\\ \dfrac{z_6}{z_7}=\dfrac{\varphi(z_8)}{\varphi(z_5)},\\ \dfrac{z_4}{z_8}=\dfrac{\varphi(z_7)}{\varphi(z_3)}. \end{cases}$$

Используя эти соотношения, систему (6) можно записать так:

$$\begin{cases} z_1 = (\varphi(z_2))^k \left(\dfrac{z_1}{z_3}\right)^i, \\ z_2 = (\varphi(z_1))^k \left(\dfrac{z_2}{z_5}\right)^i, \\ z_3 = (\varphi(z_2))^k \left(\dfrac{z_1}{z_3}\right)^{i-1}, \\ z_4 = (\varphi(z_7))^k \left(\dfrac{z_8}{z_4}\right)^{i-1}, \\ z_5 = (\varphi(z_1))^k \left(\dfrac{z_2}{z_5}\right)^{i-1}, \\ z_6 = (\varphi(z_8))^k \left(\dfrac{z_7}{z_6}\right)^{i-1}, \\ z_7 = (\varphi(z_8))^k \left(\dfrac{z_7}{z_6}\right)^i, \\ z_8 = (\varphi(z_7))^k \left(\dfrac{z_8}{z_4}\right)^i. \end{cases} \tag{7}$$

Из первого уравнения системы (7) найдем z_3, из второго — z_5, из седьмого — z_6, из восьмого z_4 и, подставив их в восьмое, седьмое, второе и первое уравнения системы (5) соответственно, получим

$$\begin{cases} z_1 = \left(\varphi\left(z_8^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_7))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_2))^{k-i}, \\ z_2 = \left(\varphi\left(z_7^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_8))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_1))^{k-i}, \\ z_7 = \left(\varphi\left(z_2^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_1))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_8))^{k-i}, \\ z_8 = \left(\varphi\left(z_1^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_2))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_7))^{k-i}. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим отображение $W : R^4 \to R^4$, определенное следующим образом:

$$\begin{cases} z_1' = \left(\varphi\left(z_8^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_7))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_2))^{k-i}, \\ z_2' = \left(\varphi\left(z_7^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_8))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_1))^{k-i}, \\ z_7' = \left(\varphi\left(z_2^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_1))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_8))^{k-i}, \\ z_8' = \left(\varphi\left(z_1^{\frac{i-1}{i}} (\varphi(z_2))^{\frac{k}{i}}\right)\right)^i (\varphi(z_7))^{k-i}. \end{cases} \tag{9}$$

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Отображение W имеет следующие инвариантные множества:*

$$I_1 = \left\{z \in R^4 : z_1 = z_2 = z_7 = z_8\right\}, \quad I_2 = \left\{z \in R^4 : z_1 = z_7;\ z_2 = z_8\right\},$$

$$I_3 = \left\{z \in R^4 : z_1 = z_2;\ z_7 = z_8\right\}, \quad I_4 = \left\{z \in R^4 : z_1 = z_8;\ z_2 = z_7\right\}.$$

Замечание 2. Из определений 1 и 2 следует, что в случае I_2 (или I_j, $j = 3, 4$) слабо периодическая совокупность величин не совпадает с периодической, если хотя бы одно из равенств $z_1 = z_3$, $z_2 = z_5$, $z_4 = z_8$, $z_6 = z_7$ не выполняется.

Лемма 2. *Если на инвариантных множествах I_j, $j = 2, 3, 4$, существуют слабо периодические меры Гиббса, то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими (не периодическими).*

Рассмотрим инвариантное множество I_3. Пусть $z_1 = z_2$; $z_7 = z_8$. Из (5) имеем $z_4 = z_6; z_3 = z_5$. Если $z_1 = z_3$, тогда имеем $z_2 = z_5$. Из равенства $z_2 = z_5$ и из второго и пятого уравнений системы (5) получим $z_1 = z_6$. Из равенства $z_1 = z_3$ и из первого и третьего уравнений системы (5) получим $z_2 = z_4$. Следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = z_7 = z_8$, т. е. соответствующие меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Если $z_1 \neq z_3$, то ясно, что соответствующие меры Гиббса являются слабо периодическими. В остальных случаях I_j, $j = 2, 4$, лемма доказывается аналогичным образом.

Теорема 1. *Для модели Изинга все $G_k^{(4)}$-слабо периодические меры Гиббса, соответствующие совокупности величин из I_1, являются трансляционно-инвариантными.*

$\lhd$ Доказательство очевидно. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть $i = 1$. При $k = 3$ существуют критические значения $\alpha_{cr} = 2$, $\alpha_c = \frac{\sqrt{3\sqrt{46}-2-\sqrt{402-12\sqrt{46}}}}{2}$ (≈ 0.33) такие, что для модели Изинга:*

a) *при $\alpha \in (0, \alpha_c) \cup \left(\alpha_{cr}, \alpha_c^{-1}\right)$ существуют не менее трех $G_k^{(4)}$-слабо периодических мер Гиббса;*

b) *при $\alpha \in [\alpha_c, \alpha_{cr}] \cup \left\{\alpha_{cr}^{-1}\right\}$ существует не менее одной $G_k^{(4)}$-слабо периодической меры Гиббса;*

c) *при $\alpha \in \left(\alpha_{cr}^{-1}, +\infty\right)$ существуют не менее пяти $G_k^{(4)}$-слабо периодических мер Гиббса.*

$\lhd$ Пусть $k = 3$, $i = 1$, $\alpha_{cr} = 2$, $\alpha_c = \frac{\sqrt{3\sqrt{46}-2-\sqrt{402-12\sqrt{46}}}}{2}$ (≈ 0.33). Учитывая, что $\varphi(z) = \frac{z+\alpha}{\alpha z+1}$ на I_2, из системы уравнений (8) получим

$$\begin{cases} z_1 = \varphi\big(\varphi^3(z_1)\big)\,\varphi^2(z_2), \\ z_2 = \varphi\big(\varphi^3(z_2)\big)\,\varphi^2(z_1). \end{cases} \tag{10}$$

Отметим, что $\alpha > 0$. Введем обозначение $x = \frac{z_1+\alpha}{\alpha z_1+1}$, $y = \frac{z_2+\alpha}{\alpha z_2+1}$. Тогда из (10) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 = \psi(y), \\ y^2 = \psi(x), \end{cases} \tag{11}$$

где $\psi(x) = \left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha x}\right)\left(\frac{\alpha x^3+1}{x^3+\alpha}\right)$. Очевидно, что при α, удовлетворяющей $\psi(x) < 0$ или $\psi(y) < 0$, система уравнений (11) не имеет решения.

Чтобы найти слабо периодическую меру Гиббса, не являющуюся трансляционно-инвариантной, надо найти корни уравнения

$$x^2 - \psi\big(\sqrt{\psi(x)}\,\big) = 0, \tag{12}$$

отличающиеся от корней уравнения

$$x^2 - \psi(x) = 0. \tag{13}$$

Легко видеть, что уравнения (12) и (13) соответственно равносильны следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&[x+1]\,[x^2+1]\,[\alpha x^2-x+\alpha]\,[x^2-\alpha x+1]\,[(\alpha^2+1)x^4+2ax^3+2ax+a^2+1]\\
&\times\left[(\alpha^2+1)x^4-6\alpha x^3+4(\alpha^2+1)x^2-6\alpha x+\alpha^2+1\right]\left[\alpha^4x^{20}-(\alpha^5+\alpha^3)x^{19}+3\alpha^4x^{18}\right.\\
&+3(\alpha^5+\alpha^3)x^{17}-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^{16}-12(\alpha^5+\alpha^3)x^{15}+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^{14}\\
&-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^{13}+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^{12}+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^{11}\\
&-(4\alpha^8+40\alpha^6+118\alpha^4+40\alpha^2+4)x^{10}+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^9+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^8\\
&-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^7+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^6-12(\alpha^5+\alpha^3)x^5\\
&\left.-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^4+3(\alpha^5+\alpha^3)x^3+3\alpha^4x^2-(\alpha^5+\alpha^3)x+\alpha^4\right]=0,
\end{aligned}\tag{14}$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(\alpha x^2-x+\alpha)=0.\tag{15}$$

Из вышесказанного, для слабо периодических мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
&\left[x^2-\alpha x+1\right]\left[(\alpha^2+1)x^4+2\alpha x^3+2\alpha x+\alpha^2+1\right]\\
&\times\left[(\alpha^2+1)x^4-6\alpha x^3+4(\alpha^2+1)x^2-6\alpha x+\alpha^2+1\right]\left[\alpha^4x^{20}-(\alpha^5+\alpha^3)x^{19}\right.\\
&+3\alpha^4x^{18}+3(\alpha^5+\alpha^3)x^{17}-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^{16}-12(\alpha^5+\alpha^3)x^{15}\\
&+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^{14}-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^{13}+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^{12}\\
&+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^{11}-(4\alpha^8+40\alpha^6+118\alpha^4+40\alpha^2+4)x^{10}\\
&+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^9+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^8-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^7\\
&+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^6-12(\alpha^5+\alpha^3)x^5-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^4\\
&\left.+3(\alpha^5+\alpha^3)x^3+3\alpha^4x^2-(\alpha^5+\alpha^3)x+\alpha^4\right]=0.
\end{aligned}\tag{16}$$

Далее, рассмотрим выражение в первой скобке левой части (16). Оно равно нулю тогда и только тогда, когда

$$x_{1,2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4}}{2}.\tag{17}$$

Легко проверить, что $x_{1,2}>0$ при $\alpha>2=\alpha_{cr}$.

Вторую скобку в (16) перепишем в следующем виде: $(\alpha^2+1)x^4+2\alpha x^3+2\alpha x+\alpha^2+1=0$. Очевидно, что последнее уравнение при $\alpha>0$ не имеет положительных корней.

Теперь рассмотрим выражение в третьей скобке и будем искать все положительные корни уравнения 4-го порядка:

$$(\alpha^2+1)x^4-6\alpha x^3+4(\alpha^2+1)x^2-6\alpha x+\alpha^2+1=0.\tag{18}$$

Уравнение (18) — симметричное уравнение. Для решения уравнения такого типа воспользуемся следующей заменой переменных:

$$x+\frac{1}{x}=t,\tag{19}$$

и из уравнения (18) получим квадратное уравнение вида

$$t^2-\frac{6}{\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)}\,t+2=0.\tag{20}$$

Заметим, что $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geqslant 2$, так как $\alpha>0$.

Пусть $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$, тогда уравнение (20) имеет решения $t_1=2$, $t_2=1$. Из $x>0$ и (19) имеем $t\geqslant 2$. При $t=2$ получим $x=1$. Заметим, что решению $x=1$, $\alpha=1$ соответствует трансляционно-инвариантная мера Гиббса.

Пусть $\alpha+\frac{1}{\alpha}>2$, тогда из (20) получим $t^2-lt+2=0$, где $l<3$.

Легко проверить, что последнее квадратное уравнение имеет решения, которые меньше 2 (если они существуют). Но из (19) имеем $t\geqslant 2$. Следовательно, при $\alpha+\frac{1}{\alpha}>2$ уравнение (18) не имеет положительного решения.

Выражение в четвертой скобке есть многочлен 20-го порядка и тоже симметрично относительно коэффициентов:

$$\begin{gathered}\alpha^4x^{20}-(\alpha^5+\alpha^3)x^{19}+3\alpha^4x^{18}+3(\alpha^5+\alpha^3)x^{17}-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^{16}\\ -12(\alpha^5+\alpha^3)x^{15}+(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^{14}-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^{13}\\ +(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^{12}+(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^{11}-(4\alpha^8+40\alpha^6+118\alpha^4+40\alpha^2+4)x^{10}\\ +(8\alpha^7+54\alpha^5+54\alpha^3+8\alpha)x^9+(8\alpha^6+2\alpha^4+8\alpha^2)x^8-(8\alpha^7+44\alpha^5+44\alpha^3+8\alpha)x^7\\ +(16\alpha^6+52\alpha^4+16\alpha^2)x^6-12(\alpha^5+\alpha^3)x^5-(4\alpha^6-5\alpha^4+4\alpha^2)x^4\\ +3(\alpha^5+\alpha^3)x^3+3\alpha^4x^2-(\alpha^5+\alpha^3)x+\alpha^4=0.\end{gathered}\tag{21}$$

Воспользуемся следующей заменой переменных:

$$x+\frac{1}{x}=\xi.\tag{22}$$

После замены переменных из уравнения (21) получим следующее уравнение 10-го порядка:

$$\begin{gathered}\alpha^4\xi^{10}-(\alpha^5+\alpha^3)\xi^9-7\alpha^4\xi^8+(12\alpha^5+12\alpha^3)\xi^7-(4\alpha^6-22\alpha^4+4\alpha^2)\xi^6-(60\alpha^5+60\alpha^3)\xi^5\\ +(40\alpha^6+32\alpha^4+40\alpha^2)\xi^4-(8\alpha^7-88\alpha^5-88\alpha^3+8\alpha)\xi^3-(92\alpha^6+184\alpha^4+92\alpha^2)\xi^2\\ +(32\alpha^7+96\alpha^5+96\alpha^3+32\alpha)\xi-(4\alpha^8+24\alpha^6+14\alpha^4+24\alpha^2+4)=0.\end{gathered}$$

Введем обозначение:

$$\begin{gathered}g(\xi,\alpha)=\alpha^4\xi^{10}-(\alpha^5+\alpha^3)\xi^9-7\alpha^4\xi^8+(12\alpha^5+12\alpha^3)\xi^7\\ -(4\alpha^6-22\alpha^4+4\alpha^2)\xi^6-(60\alpha^5+60\alpha^3)\xi^5+(40\alpha^6+32\alpha^4+40\alpha^2)\xi^4\\ -(8\alpha^7-88\alpha^5-88\alpha^3+8\alpha)\xi^3-(92\alpha^6+184\alpha^4+92\alpha^2)\xi^2\\ +(32\alpha^7+96\alpha^5+96\alpha^3+32\alpha)\xi-(4\alpha^8+24\alpha^6+14\alpha^4+24\alpha^2+4).\end{gathered}\tag{23}$$

Легко проверить, что $g(2,\alpha)<0$ при $\alpha\in \mathrm{E}=(0,\alpha_c)\cup(\alpha_c^{-1},+\infty)$.

Действительно, предположим $g(2,\alpha)=-4\alpha^8-8\alpha^6+402\alpha^4-8\alpha^2-4<0$. Отсюда получим

$$4\Big(\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}\Big)+8\Big(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\Big)-402>0.\tag{24}$$

Введем обозначение: $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=t$, $\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}=t^2-2$. Тогда (24) имеет следующий вид:

$$2t^2+4t-205>0.\tag{25}$$

Решив (25) и учытивая $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=t$, получим, что $\mathrm{E}=(0,\alpha_c)\cup(\alpha_c^{-1},+\infty)$, т. е. при $\alpha\in\mathrm{E}$ выполняется $g(2,\alpha)<0$.

Так как $\lim_{\xi\to+\infty}g(\xi,\alpha)=+\infty$, то отсюда получим, что уравнение (23) при $\alpha\in\mathrm{E}$ имеет хотя бы одно решение, которое больше 2. Из (22) получим, что уравнение (21) при $\alpha\in\mathrm{E}$ имеет два положительных решения.

Заключение: система уравнений (10) при $0 < \alpha \leqslant \alpha_c$ имеет не менее трех положительных решений вида $(1,1)$, $\big(z_3^{(1)}, z_4^{(1)}\big)$, $\big(z_3^{(2)}, z_4^{(2)}\big)$; при $\alpha_c \leqslant \alpha \leqslant 2$ имеет одно положительное решение $(1,1)$; при $2 < \alpha < \alpha_c^{-1}$ имеет не менее трех положительных решений вида $(1,1)$, $\big(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\big)$, $\big(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}\big)$; при $\alpha > \alpha_c^{-1}$ имеет не менее пяти положительных решений вида $(1,1)$, $\big(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}\big)$, $\big(z_1^{(2)}, z_2^{(2)}\big)$, $\big(z_3^{(1)}, z_4^{(1)}\big)$, $\big(z_3^{(2)}, z_4^{(2)}\big)$. $\triangleright$

Замечание 3. 1) В теореме 2 одна из $G_k^{(4)}$-слабо периодических мер является трансляционно-инвариантной. Все остальные меры являются $G_k^{(4)}$-слабо периодическими (не трансляционно-инвариантными).

2) Заметим, что в доказательстве теоремы 2 рассматриваются решения системы уравнений (8) на инвариантном множестве I_2, на других инвариантных множествах задача решения соответствующих систем уравнений пока остается открытой, так как в этих случаях анализ систем уравнений трудный.

3) Заметим, что слабо периодическая мера Гиббса зависит от выбора нормального делителя группы G_k. В случае $|A| = k+1$ соответствующий нормальный делитель $G_k^{(4)}$ совпадает с $G_k^{(2)}$, что и есть нормальный делитель индекса два, а в этом случае слабо периодическая мера Гиббса совпадает с периодической, которая была изучена в работе [5].

Благодарности. Авторы благодарят анонимного рецензента, замечания которого улучшили качество работы.

Литература

1. *Rozikov U. A.* Gibbs Measures on Cayley Trees.—World Scintific, 2013.—385 p. DOI: 10.1142/8841.
2. *Блехер П. М., Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах модели Изинга на решетках Бете // Теория вероятн. и ее примен.—1990.—Т. 35, № 2.—С. 220—230.
3. *Spitzer F.* Markov random field on infinite tree // Ann. Probab.—1975.—Vol. 3, № 3.—P. 387–398. DOI: 10.1214/aop/1176996347.
4. *Zachary S.* Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees // Ann. Probab.—1983.—Vol. 11, № 4.—P. 894–903. DOI: 10.1214/aop/1176993439.
5. *Розиков У. А.* Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса // Теор. и мат. физика.—1997.—Т. 112, № 1.—С. 170–175. DOI: 10.4213/tmf1037.
6. *Розиков У. А.* Построение несчетного числа предельных гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // Теор. и мат. физика.—1999.—Т. 118, № 1.—С. 95–104. DOI: 10.4213/tmf688.
7. *Rozikov U. A, Suhov Yu. M.* Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree // Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Rel. Topics.–2006.—Vol. 9, № 3.—P. 471–488. DOI: 10.1142/S0219025706002494.
8. *Martin J. B, Rozikov U. A, Suhov Yu. M.* A three state hard-core model on a Cayley tree // J. Nonlinear Math. Phys.—2005.—Vol. 12, № 3.—P. 432–448. DOI: 10.2991/jnmp.2005.12.3.7.
9. *Розиков У. А.* Описание предельных гиббсовских мер для λ-моделей на решетках Бете // Сиб. мат. журн.—1998.—Т. 39, № 2.—С. 427–435.
10. *Mukhamedov F. M., Rozikov U. A.* On Gibbs measures of models with competing ternary and binary interactions and corresponding von Neumann algebras // J. Stat. Phys.–2004.—Vol. 114, № 3/4.—P. 825–848. DOI: 10.1023/B:JOSS.0000012509.10642.83.
11. *Gandolfo D., Ruiz J., Shlosman S.* A manifold of pure Gibbs states of the Ising model on a Cayley tree // J. Stat. Phys.—2012.—Vol. 148, № 6.—P. 999–1005. DOI: 10.1007/s10955-012-0574-y.
12. *Малышев В. А, Минлос Р. А.* Гиббсовские случайные поля.—М.: Наука, 1985.—288 с.
13. *Рюэль Д.* Статистическая механика.—М.: Мир, 1971.—368 с.
14. *de Jongh L. J., Miedema A. R.* Experiments on simple magnetic model systems // Adv. Phys.—1974.—Vol. 23, № 1.—P. 1–260. DOI: 10.1080/00018739700101558.
15. *Фейман Р.* Статистическая механика.—М.: Мир, 1978.—412 с.
16. *Розиков У. А., Рахматуллаев М. М.* Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли // Теор. и мат. физика.–2008.—Т. 156, № 2.—С. 292–302. DOI: 10.4213/tmf6248.
17. *Рахматуллаев М. М.* О новых слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли // Изв. вузов. Мат.–2015.—№ 11.—С. 54–63.

18. *Rahmatullaev M. M.* On new weakly periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree of order $k \leqslant 5$ // J. Phys. Conf. Ser.–2016.—Vol. 697. DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012020.
19. *Рахматуллаев М. М.* О слабо периодических мерах Гиббса модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли // Теор. и мат. физика.—2015.—Т. 183, № 3.—С. 434–440. DOI: 10.4213/tmf8796.
20. *Рахматуллаев М. М.* Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли // Теор. и мат. физика.—2014. —Т. 180, № 3.—С. 307–317. DOI: 10.4213/tmf8647.
21. *Рахматуллаев М. М.* Слабо периодических мер Гиббса для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли // Сиб. мат. журн.—2015.—Т. 56, № 5.—С. 1163–1170. DOI: 10.17377/smzh.2015.56.515.
22. *Норматов Э. П., Розиков У. А.* Описание гармонических функций с применением свойств группового представления дерева Кэли // Мат. заметки.—2006.—Т. 79, № 3.—С. 434–443. DOI: 10.4213/mzm2712.
23. *Рахматуллаев М. М., Дехконов Ж. Д.* Слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k = 2$ // Теор. и мат. физика.—2021.—Т. 206, № 2.—С. 210–224. DOI: 10.4213/tmf9970.

Статья поступила 10 апреля 2021 г.

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз,
заведующий Наманганского отделения Института математики им. В. И. Романовского АН РУз
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университеткая, 7;

Наманганский государственный университет,
профессор
Узбекистан, 160136, Наманган, ул. Уйчи, 316
E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0003-2987-7714

Дехконов Жасурбек Дилмурод угли
Андижанский государственный университет,
аспирант
Узбекистан, 170100, Андижан, ул. Университетская, 129
E-mail: dehqonovjasur@bk.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 4, P. 77–88

EXISTENCE OF WEAKLY PERIODIC GIBBS MEASURES FOR THE ISING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER THREE

Rahmatullaev, M. M.[1,2] and Dekhkonov, J. D.[3]

[1] V. I. Romanovkiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
7 University St., Tashkent 100174, Uzbekistan;
[2] Namangan State University,
316 Uychi St., Namangan 160136, Uzbekistan,
[3] Andijan State University,
129 University St., Andijan 170100, Uzbekistan

E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru, dehqonovjasur@bk.ru

Abstract. One of the main problems of the Ising model Hamiltonian is to describe all limiting Gibbs measures corresponding to this Hamiltonian. It is well known that for the Ising model, such measures form a nonempty convex compact subset in the set of all probability measures. The problem of completely describing the elements of this set is far from being completely solved. For the Ising model on the Cayley tree of order three translation-invariant and periodic Gibbs measures are studied, but weakly periodic Gibbs measures have not been studied yet. Therefore, it is interesting to study weakly periodic Gibbs measures which is non-periodic. The paper is devoted to the study of weakly periodic Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree of order three ($k = 3$). It is known that the weakly periodic Gibbs measure for the Ising model depends on the choice of the normal subgroup of the group representation of the Cayley tree. In this paper, we consider one normal subgroup of index four of the group representation of a Cayley tree. With respect to this normal subgroup, the existence of weakly periodic Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree of order three is proved. More precisely, the fact that under some conditions on parameters the existence of at least four weakly periodic (non-periodic) Gibbs measures is proved.

Key words: Cayley tree, Gibbs measure, Ising model, weakly periodic measure.

Mathematical Subject Classification (2010): 82B26, 60K35.

For citation: *Rahmatullaev, M. M. and Dekhkonov, J. D.* Existence of Weakly Periodic Gibbs Measures for the Ising Model on the Cayley Tree of Order Three, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 77–88 (in Russian). DOI: 10.46698/h4964-7674-7067-w.

References

1. *Rozikov, U. A. Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Scientific, 2013, 385 p. DOI: 10.1142/8841.
2. *Blekher, P. M. and Ganikhodgaev, N. N.* On Pure Phases of the Ising Model on the Bethe Lattices, *Theory of Probability & Its Applications*, 1991, vol. 35, no. 2, pp. 216–227. DOI: 10.1137/1135031.
3. *Spitzer, F.* Markov Random Field on Infinite Tree, *The Annals of Probability*, 1975, vol. 3, no. 3, pp. 387–398. DOI: 10.1214/aop/1176996347.
4. *Zachary, S.* Countable State Space Markov Random Fields and Markov Chains on Trees, *The Annals of Probability*, 1983, vol. 11, no. 4, pp. 894–903. DOI: 10.1214/aop/1176993439.
5. *Rozikov, U. A.* Partition Structures of the Cayley Tree and Applications for Describing Periodic Gibbs Distributions, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1997, vol. 112, no. 1, pp. 929–933. DOI: 10.1007/BF02634109.
6. *Rozikov, U. A.* Construction of an Uncountable Number of Limiting Gibbs Measures in the Inhomogeneous Ising Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 1999, vol. 118, no. 1, pp. 77–84. DOI: 10.1007/BF02557197.
7. *Rozikov, U. A. and Suhov, Yu. M.* Gibbs Measures for SOS Model on a Cayley Tree, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 471–488. DOI: 10.1142/S0219025706002494.
8. *Martin, J. B., Rozikov, U. A. and Suhov, Yu. M.* A Three State Hard-Core Model on a Cayley Tree, *Journal Nonlinear Mathematical Physics*, 2005, vol. 12, no. 3, pp. 432–448. DOI: 10.2991/jnmp.2005.12.3.7.
9. *Rozikov U. A.* Description of Limit Gibbs Measures for λ-Models on Bethe Lattices, *Siberian Mathematical Journal*, 1998, vol. 39, no. 2, pp. 373–380. DOI: 10.1007/BF02677521.
10. *Mukhamedov, F. M. and Rozikov, U. A.* On Gibbs Measures of Models with Competing Ternary and Binary Interactions and Corresponding Von Neumann Algebras, *Journal of Statistical Physics*, 2004, vol. 114, no. 3/4, pp. 825–848. DOI: 10.1023/B:JOSS.0000012509.10642.83.
11. *Gandolfo, D., Ruiz, J. and Shlosman, S.* A Manifold of Pure Gibbs States of the Ising Model on a Cayley Tree, *Journal of Statistical Physics*, 2012, vol. 148, no. 6, pp. 999–1005. DOI: 10.1007/s10955-012-0574-y.
12. *Malyshev, V. A. and Minlos, R. A. Gibbsovskiye sluchaynye polya* [Gibbs Random Fields], Moscow, Nauka, 1985, 288 p. (in Russian).
13. *Ryuel', D. Statisticheskaya mekhanika* [Statistical Mechanics], Moscow, Mir, 1971, 368 p. (in Russian).
14. *de Jongh, L. J. and Miedema, A. R.* Experiments on Simple Magnetic Model Systems, *Advances in Physics*, 1974, vol. 23, no. 1, pp. 1–260. DOI: 10.1080/00018739700101558.
15. *Feyman, R. Statisticheskaya mekhanika* [Statistical Mechanics], Moscow, Mir, 1978, 412 p. (in Russian).
16. *Rozikov, U. A. and Rahmatullaev, M. M.* Description of Weakly Periodic Gibbs Measures for the Ising Model on a Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2008, vol. 156, no. 2, pp. 1218–1227. DOI: 10.1007/s11232-008-0091-y.
17. *Rahmatullaev, M. M.* New Weakly Periodic Gibbs Measures of Ising Model on Cayley Tree, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 11, pp. 45–53. DOI: 10.3103/S1066369X15110055.
18. *Rahmatullaev, M. M.* On New Weakly Periodic Gibbs Measures of the Ising Model on the Cayley Tree of Order $k \leqslant 5$, *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 697. DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012020.
19. *Rahmatullaev, M. M.* Weakly Periodic Gibbs Measures of the Ising Model with an External Field on the Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2015, vol. 183, no. 3, pp. 822–828. DOI: 10.1007/s11232-015-0298-7.

20. *Rahmatullaev, M. M.* The Existence of Weakly Periodic Gibbs Measures for the Potts Model on a Cayley Tree, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2014, vol. 180, no. 3, pp. 1019–1029. DOI: 10.1007/s11232-014-0196-4.
21. *Rahmatullaev, M. M.* A Weakly Periodic Gibbs Measure for the Ferromagnetic Potts Model on a Cayley Tree, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 929–935, DOI: 10.1134/S0037446615050158.
22. *Normatov, E. P. and Rozikov, U. A.* A Description of Harmonic Functions via Properties of the Group Representation of the Cayley Tree, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, no. 3–4, pp. 399–407. DOI: 10.1007/s11006-006-0044-4.
23. *Rahmatullaev, M. M. and Dekhkonov, J. D.* Weakly Periodic Gibbs Measures for the Ising Model on the Cayley Tree of Order $k = 2$, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2021, vol. 206, no. 2, pp. 185–198. DOI: 10.1134/S0040577921020069.

Received April 10, 2021

Muzaffar M. Rahmatullaev
V. I. Romanovkiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Sciences,
7 University St., Tashkent 100174, Uzbekistan,
Head of Namangan Regional Department of Institute of Mathematics;
Namangan State University,
316 Uychi St., Namangan 160136, Uzbekistan,
Professor
E-mail: `mrahmatullaev@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2987-7714

Jasurbek D. Dekhkonov
Andijan State University,
129 University St., Andijan 170100, Uzbekistan,
PhD Student
E-mail: `dehqonovjasur@bk.ru`