Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 1, С. 36–43

УДК 517.983
DOI 10.46698/t8778-6480-0136-d

О НОРМАЛЬНЫХ μ-ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРАХ[#]

Е. Ю. Кузьменкова[1], **А. Р. Миротин**[1]

[1] Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Беларусь, 246019, Гомель, Советская, 104

E-mail: katuha66@tut.by, oamirotin@yandex.ru

Аннотация. Операторы Ганкеля образуют один из наиболее важных классов операторов в пространствах аналитических функций и имеют многочисленные реализации. Эти операторы можно определить как операторы, имеющие ганкелевы матрицы (т. е. матрицы, элементы которых зависят лишь от суммы индексов) относительно некоторого ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Данная работа продолжает исследования, начатые в работе авторов «μ-Hankel operators on Hilbert spaces», Opuscula Math., 2021, vol. 41, no. 6, pp. 881–899, в которой был введен новый класс операторов в гильбертовых пространствах (μ-ганкелевы операторы, μ — комплексный параметр). Такие операторы действуют в сепарабельном гильбертовом пространстве и в некотором ортонормированном базисе этого пространства имеют матрицы, диагонали которых, ортогональные главной диагонали, представляют собой геометрические прогрессии со знаменателем μ. Таким образом, классические ганкелевы операторы отвечают случаю $\mu = 1$. Основной результат работы дает критерий нормальности μ-ганкелевых операторов. По аналогии с операторами Ганкеля, рассматриваемый класс операторов имеет конкретные реализации в виде интегральных операторов, что позволяет применять к этим операторам результаты, полученные в абстрактном контексте, и тем самым внести вклад в теорию интегральных операторов. В данной работе такая реализация рассматривается в пространстве Харди на единичном круге. Даны критерии самосопряженности и нормальности этих операторов.

Ключевые слова: Ганкелев оператор, μ-ганкелев оператор, нормальный оператор, самосопряженный оператор, пространство Харди, интегральный оператор.

AMS Subject Classification: 47B15, 47B35.

Образец цитирования: *Кузьменкова Е. Ю., Миротин А. Р.* О нормальных μ-ганкелевых операторах // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 36–43. DOI: 10.46698/t8778-6480-0136-d.

1. Введение и предварительные сведения

Как известно, классические операторы Ганкеля образуют один из наиболее важных классов операторов в пространствах аналитических функций. Эти операторы определяются как операторы, имеющие бесконечные ганкелевы матрицы (т. е. матрицы, элементы которых зависят лишь от суммы индексов) относительно некоторого ортонормированного базиса. Конечные матрицы с таким свойством были введены Ганкелем. Одним из первых результатов применения данных операторов была теорема Кронекера, которая характеризует матрицы Ганкеля конечного ранга как те, матричные элементы которых являются коэффициентами Фурье рациональных функций. В 1957 г. Нехари описал ограниченные операторы Ганкеля в сепарабельном гильбертовом пространстве последовательностей, что положило начало современному этапу изучения этих операторов.

[#]Работа выполнена в рамках задания 1.3.03 подпрограммы «Математические модели и методы» ГПНИ на 2021–2025 гг. «Конвергенция–2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь, № 2021ГР20211776.

© 2022 Кузьменкова Е. Ю., Миротин А. Р.

Операторы Ганкеля допускают различные реализации. Этот класс имеет множество приложений к анализу, теории вероятностей, теории управления и т. д. В частности, в анализе операторы Ганкеля широко применяются в проблеме моментов, теории ортогональных полиномов, теории приближений и теории операторов, в том числе для получения операторных моделей и при построении различных примеров и контрпримеров (см. [1, 2, 3]). Не удивительно, что существует большое количество обобщений и аналогов операторов этого класса.

Операторы Ганкеля существенно используются и в теории важного класса тёплицевых операторов (см. [1, 3]). С другой стороны, интересное обобщение тёплицевых операторов («лямбда-тёплицевы операторы») было рассмотрено в [4, 5]. Поэтому значительный интерес представляет класс операторов в гильбертовых пространствах, которые так же связаны с лямбда-тёплицевыми операторами, как ганкелевы — с операторами Тёплица. Именно такой класс операторов (μ-ганкелевы операторы, μ — комплексный параметр) и рассматривается в данной работе, которая продолжает исследования, начатые в работе авторов [6]. Основной результат работы дает критерий нормальности этих операторов.

По аналогии с операторами Ганкеля следует ожидать, что указанный класс операторов имеет конкретные реализации в виде интегральных операторов, что позволяет применять к этим операторам результаты, полученные в абстрактном контексте, и тем самым внести вклад в теорию интегральных операторов. В данной работе такая реализация рассматривается в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ на единичном круге (относительно последнего пространства см., например, [1, 3]).

Определение 1. Пусть μ, ν — комплексные числа, $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\geqslant 0}$ — последовательность комплексных чисел, и пусть $\mathscr{H}, \mathscr{H}'$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Оператор $A_{(\mu,\nu),\alpha} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}'$ назовем (μ,ν)-*ганкелевым*, если для некоторых ортонормированных базисов $(e_k)_{k\geqslant 0} \subset \mathscr{H}$ и $(e'_j)_{j\geqslant 0} \subset \mathscr{H}'$ матрица этого оператора $(a_{jk})_{k,j}$, где* $a_{jk} = \langle A_{(\mu,\nu),\alpha} e_k, e'_j\rangle$, состоит из элементов вида

$$a_{jk} = \mu^k \nu^j \alpha_{k+j}.$$

В частности, $A_{(1,1),\alpha}$ — ганкелев оператор (относительно последних см., например, [1, 3, 7]).

Вместо $A_{(\mu,1),\alpha}$ мы будем далее писать $A_{\mu,\alpha}$ (или A_μ) и называть такой оператор μ-*ганкелевым*. Исключая тривиальный случай, для этих операторов мы будем считать, что $\mu \neq 0$.

Таким образом, матрица μ-ганкелева оператора $A_{\mu,\alpha}$ имеет вид $(a_{jk})_{k,j\geqslant 0} = (\mu^k \alpha_{k+j})_{k,j\geqslant 0}$, т. е. вид

$$[A_{\mu,\alpha}] := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \mu\alpha_1 & \mu^2\alpha_2 & \mu^3\alpha_3 & \mu^4\alpha_4 & \dots \\ \alpha_1 & \mu\alpha_2 & \mu^2\alpha_3 & \mu^3\alpha_4 & \dots & \\ \alpha_2 & \mu\alpha_3 & \mu^2\alpha_4 & \dots & & \\ \alpha_3 & \mu\alpha_4 & \dots & & & \\ \alpha_4 & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

Ниже, как правило, будет рассматриваться случай, когда $\mathscr{H} = \mathscr{H}'$ и оператор $A_{\mu,\alpha}$ допускает матричное представление. Напомним [8, с. 90, Теорема 1], что такой оператор ограничен.

*Здесь и ниже угловые скобки обозначают скалярное произведение.

В данной работе ганкелевы операторы понимаются как операторы в пространстве

$$H^2 = H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0 \text{ при } n < 0\}$$

(всюду ниже через $\widehat{f}(n)$ обозначаются коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(\mathbb{T})$; $\mathbb{T}$ — единичная окружность**), имеющие соответствующую матрицу в стандартном ортонормированном базисе $e_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ этого пространства. Такие операторы действуют по правилу $H_\varphi f = PJ(\varphi f)$, где $P : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ — ортопроектор, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ — символ оператора, $Jf(z) := f(\overline{z})$ (см., например, [7, с. 136]).

2. Самосопряженность и нормальность μ-ганкелевых операторов

Критерий самосопряженности μ-ганкелевых операторов дает следующее простое

Предложение 1. *Матрица ненулевого оператора $A_{\mu,\alpha}$ самосопряжена тогда и только тогда, когда $|\mu| = 1$ и $\overline{\alpha_n} = \mu^n \alpha_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

$\lhd$ Из вида сопряженной матрицы следует, что матрица оператора $A_{\mu,\alpha}$ самосопряжена тогда и только тогда когда

$$\mu^k \alpha_{k+j} = \overline{\mu}^j \overline{\alpha_{k+j}} \quad (k, j \in \mathbb{Z}_+). \tag{1}$$

Полагая здесь $j = 0$, получаем первое необходимое условие $\mu^k \alpha_k = \overline{\alpha_k}$. При $\alpha_k \neq 0$ получаем отсюда и второе необходимое условие $|\mu| = 1$.

Обратно, если $|\mu| = 1$ и $\mu^n \alpha_n = \overline{\alpha_n}$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то, заменяя в последнем равенстве n на $k + j$, получаем $\mu^{k+j}\alpha_{k+j} = \overline{\alpha_{k+j}}$, $k, j \in \mathbb{Z}_+$, откуда сразу следует (1). $\rhd$

Лемма 1. *Пусть $|\mu| = 1$ и оператор $A_{\mu,\alpha}$ μ-ганкелев в стандартном базисе $e_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ пространства $H^2(\mathbb{T})$. Этот оператор ограничен тогда и только тогда, когда он представляется в виде $A_{\mu,\alpha} = H_\varphi U_\mu$, где $U_\mu f(z) := f(\mu z)$ — унитарный, а H_φ — ограниченный ганкелев оператор в пространстве $H^2(\mathbb{T})$, причем можно выбрать его символ $\varphi \in L^\infty$ таким, что $\widehat{\varphi}(-k) = \alpha_k$ при $k \in \mathbb{Z}_+$.*

$\lhd$ Достаточность следует из равенства $U_\mu e_k = \mu^n e_k$ и того известного факта, что оператор H_φ, для которого $\varphi \in L^\infty$ и $\widehat{\varphi}(-k) = \alpha_k$, имеет в базисе $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ганкелеву матрицу (α_{k+j}) (см., например, [7, с. 125]).

Необходимость. Пусть $|\mu| = 1$, и оператор $A_{\mu,\alpha}$ μ-ганкелев в базисе $e_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Легко проверить, что оператор U_μ имеет в этом базисе матрицу $[U_\mu] = \operatorname{diag}(1, \mu, \mu^2, \dots)$, и $[A_{\mu,\alpha}] = [H][U_\mu]$, где $[H] = (\alpha_{k+j})_{k,j\in\mathbb{Z}_+}$ — ганкелева матрица. С другой стороны, это матрица ограниченного оператора $H_\varphi := A_{\mu,\alpha} U_\mu^{-1}$. Значит, этот оператор ганкелев в силу теоремы Нехари (см., например, [7, теорема 4.1.13]). $\rhd$

Замечание. Пусть $|\mu| = 1$. Рассмотрим унитарный оператор $W_\mu f(z) := f(\mu z)$ в $L^2(\mathbb{T})$. Сужения $U_\mu := W_\mu | H^2(\mathbb{T})$ и $V_\mu := W_\mu | H^2_-(\mathbb{T})$ являются унитарными в $H^2(\mathbb{T})$ и $H^2_-(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2(\mathbb{T})$ соответственно. Пусть $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ и T_φ обозначает оператор Тёплица с символом φ. Тогда оператор $T_{\mu,\varphi} := U_\mu T_\varphi$ является μ-тёплицевым в силу [5, теорема 2.5]. С другой стороны, легко проверить, что оператор $A_\mu = V_\mu H_\varphi$, где $H_\varphi : H^2(\mathbb{T}) \to H^2_-(\mathbb{T})$ — ганкелев оператор с символом φ, является μ-ганкелевым. При этом

$$T_{\mu,\varphi} f + A_\mu f = W_\mu M_\varphi f, \quad f \in H^2(\mathbb{T}),$$

где M_φ есть оператор умножения на φ в $L^2(\mathbb{T})$. Это соотношение является обобщением известной связи между классическими операторами Ганкеля и Тёплица.

**Исключение составляет лишь замечание после леммы 1, в котором рассматриваются ганкелевы операторы, действующие из $H^2(\mathbb{T})$ в $H^2_-(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2(\mathbb{T})$.

Теорема 1. *Ненулевой ограниченный оператор $A_{\mu,\alpha}$ в пространстве $H^2(\mathbb{T})$ нормален тогда и только тогда, когда $|\mu| = 1$ и существует такая константа $C \in \mathbb{C}$, что $|C| = 1$ и $\overline{\alpha_n} = C\mu^n\alpha_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

$\lhd$ Достаточность. Пусть $|\mu| = 1$ и $\overline{\alpha_k} = C\mu^k\alpha_k$, $|C| = 1$. Имеем при всех $i, j \in \mathbb{Z}_+$

$$[A_{\mu,\alpha}A^*_{\mu,\alpha}]_{ij} = \sum_k [A_{\mu,\alpha}]_{ik}[A^*_{\mu,\alpha}]_{kj} = \sum_k \mu^k\alpha_{i+k}\overline{\mu}^k\overline{\alpha_{k+j}} = \sum_k \alpha_{i+k}\overline{\alpha_{k+j}},$$

$$[A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha}]_{ij} = \sum_k [A^*_{\mu,\alpha}]_{ik}[A_{\mu,\alpha}]_{kj} = \sum_k \overline{\mu}^i\overline{\alpha_{i+k}}\mu^j\alpha_{k+j} = \sum_k \mu^{j-i}\overline{\alpha_{i+k}}\alpha_{k+j}.$$

И осталось заметить, что

$$\alpha_{i+k}\overline{\alpha_{k+j}} = \overline{C\mu^{i+k}\alpha_{i+k}}C\mu^{k+j}\alpha_{k+j} = \mu^{j-i}\overline{\alpha_{i+k}}\alpha_{k+j}.$$

Необходимость. Пусть $A_{\mu,\alpha}A^*_{\mu,\alpha} = A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha}$. Поскольку $[A_{\mu,\alpha}A^*_{\mu,\alpha}]_{00} = \sum_k |\mu|^{2k}|\alpha_k|^2$, $[A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha}]_{00} = \sum_k |\alpha_k|^2$, то $|\mu| = 1$.

Далее, так как $A_{\mu,\alpha} = H_\varphi U_\mu$, то $A^*_{\mu,\alpha} = U_{\overline{\mu}}H_{\varphi^*}$, где $\varphi^*(z) := \overline{\varphi(\overline{z})}$ [7, теорема 4.4.2]. Пусть $Sf(z) = zf(z)$ — оператор сдвига в $H^2(\mathbb{T})$. Тогда в силу леммы 4.4.4 из [7] имеем

$$A_{\mu,\alpha}A^*_{\mu,\alpha} - S^*A_{\mu,\alpha}A^*_{\mu,\alpha}S = H_\varphi H_{\varphi^*} - S^*H_\varphi H_{\varphi^*}S = (P\breve{\varphi}) \otimes (P\overline{\varphi^*}) = (P\breve{\varphi}) \otimes (P\breve{\varphi}), \quad (2)$$

где $\breve{\varphi}(z) := \varphi(\overline{z})$, а $(f \otimes g)h := \langle h, g\rangle f$ — одномерный оператор в $H^2(\mathbb{T})$.

С другой стороны,

$$A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha} - S^*A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha}S = U_{\overline{\mu}}H_{\varphi^*}H_\varphi U_\mu - S^*U_{\overline{\mu}}H_{\varphi^*}H_\varphi U_\mu S. \quad (3)$$

Заметим, что $U_\mu S = \mu SU_\mu$, а потому $S^*U_{\overline{\mu}} = \overline{\mu}U_{\overline{\mu}}S^*$. Так как $\mu\overline{\mu} = 1$, (3) приобретает вид

$$A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha} - S^*A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha}S = U_{\overline{\mu}}(H_{\varphi^*}H_\varphi - S^*H_{\varphi^*}H_\varphi S)U_\mu.$$

Снова воспользовавшись леммой 4.4.4 из [7], получаем отсюда

$$A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha} - S^*A^*_{\mu,\alpha}A_{\mu,\alpha}S = U_{\overline{\mu}}((P\breve{\varphi}^*) \otimes (P\overline{\varphi}))U_\mu = U_{\overline{\mu}}((P\overline{\varphi}) \otimes (P\overline{\varphi}))U_\mu. \quad (4)$$

Так как оператор $A_{\mu,\alpha}$ нормален, то из (2) и (4) следует, что

$$((P\breve{\varphi}) \otimes (P\breve{\varphi})) = U_{\overline{\mu}}((P\overline{\varphi}) \otimes (P\overline{\varphi}))U_\mu.$$

Следовательно, при всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$U_\mu((P\breve{\varphi}) \otimes (P\breve{\varphi}))e_n(z) = ((P\overline{\varphi}) \otimes (P\overline{\varphi}))U_\mu e_n(z). \quad (5)$$

Рассмотрим правую часть (5). Поскольку $U_\mu e_n = \mu^n e_n$, то

$$((P\overline{\varphi}) \otimes (P\overline{\varphi}))U_\mu e_n(z) = \mu^n\langle e_n, P\overline{\varphi}\rangle P\overline{\varphi}.$$

Так как H_φ зависит лишь от коаналитической части функции φ, можно считать, что

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}(-k)e_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_{-k}.$$

Поэтому $P\overline{\varphi} = \overline{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\alpha_k}e_k$. Значит, правая часть (5) равна

$$\mu^n\langle e_n, P\overline{\varphi}\rangle P\overline{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^n\alpha_n\overline{\alpha_k}e_k.$$

С другой стороны, левая часть (5) есть

$$U_\mu((P\breve{\varphi}) \otimes (P\breve{\varphi}))e_n = \langle e_n, P\breve{\varphi}\rangle U_\mu P\breve{\varphi}.$$

Поскольку $\breve{\varphi}(z) = \varphi(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k(z) \in H^2(\mathbb{T})$, то

$$U_\mu P\breve{\varphi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k U_\mu e_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \alpha_k e_k(z).$$

Кроме того, $\langle e_n, P\breve{\varphi}\rangle = \langle e_n, \breve{\varphi}\rangle = \overline{\alpha_n}$. Итак, левая часть (5) имеет вид

$$U_\mu((P\breve{\varphi}) \otimes (P\breve{\varphi}))e_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \overline{\alpha_n} \alpha_k e_k(z).$$

Приравнивая полученные выражения для обеих частей равенства (5), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \overline{\alpha_n} \alpha_k e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^n \overline{\alpha_k} \alpha_n e_k,$$

откуда $\mu^k \overline{\alpha_n} \alpha_k = \mu^n \overline{\alpha_k} \alpha_n$ при всех $k, n \in \mathbb{Z}_+$. Зафиксировав такое k, что $\alpha_k \neq 0$, получаем отсюда $\overline{\alpha_n} = C\mu^n \alpha_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$, где $C = \mu^{-k}\overline{\alpha_k}/\alpha_k$, $|C| = 1$. $\triangleright$

3. Интегральные μ-ганкелевы операторы

Пусть $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, а σ есть ограниченная (вообще говоря, комплексная) мера на замкнутом единичном круге $\overline{\mathbb{D}}$ комплексной плоскости. Рассмотрим оператор

$$\Gamma_{a,\sigma} f(z) := \int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{f(\zeta)}{1 - a\zeta z}\, d\sigma(\zeta) \quad (|z| < 1)$$

и последовательность моментов меры σ

$$\gamma_n := \int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} \zeta^n d\sigma(\zeta) \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Частные случаи таких операторов рассматривались в [9, 10].

Введем обозначение

$$I := \int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{d|\sigma|(\zeta)}{1 - |\zeta|}.$$

Теорема 2. *Пусть $|a| \leqslant 1$, $I < \infty$. Тогда оператор $\Gamma_{a,\sigma}$ в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ является ограниченным μ-ганкелевым в стандартном ортонормированном базисе этого пространства, причем $\mu = 1/a$ и $\|\Gamma_{a,\sigma}\| \leqslant I$. Кроме того,*

1) оператор $\Gamma_{a,\sigma}$ самосопряжен, если и только если $|a| = 1$ и $\overline{a}^n \overline{\gamma_n} = \gamma_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$;

2) оператор $\Gamma_{a,\sigma}$ нормален, если и только если $|a| = 1$ и для некоторой константы C, $|C| = 1$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство $\gamma_n = C\overline{a}^n \overline{\gamma_n}$.

$\lhd$ Рассмотрим стандартный ортонормированный базис $e_n(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ пространства $H^2(\mathbb{D})$. С учетом того, что $|a| \leqslant 1$ и $|z| < 1$, имеем

$$\Gamma_{a,\sigma} e_k(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{\zeta^k}{1 - a\zeta z}\, d\sigma(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{D}} \zeta^k \sum_{j=0}^{\infty} (\zeta z a)^j \, d\sigma(\zeta)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} z^j a^j \int\limits_{\mathbb{D}} \zeta^{k+j}\, d\sigma(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a^k} \gamma_{k+j} a^{k+j} e_j(z).$$

(Почленное интегрирование ряда законно, так как при всех $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{D}} \left| z^j \zeta^{k+j} a^j \right| d|\sigma|(\zeta) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |z|^j \int\limits_{\mathbb{D}} d|\sigma|(\zeta) < \infty.\Big)$$

Следовательно, оператор $\Gamma_{a,\sigma}$ является μ-ганкелевым в $H^2(\mathbb{D})$ с матрицей $a_{jk} = a^j \gamma_{k+j}$, $\mu = 1/a$ и $\alpha_n = a^n \gamma_n$. Для доказательства его ограниченности воспользуемся теоремой 6.23 из [11, с. 152] и ее следствием на с. 153. Имеем при всех j

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}| \leqslant |a|^j \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{D}} |\zeta|^{k+j}\, d|\sigma|(\zeta) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} \sum_{k=0}^{\infty} |\zeta|^k \, d|\sigma|(\zeta) = I,$$

и аналогично при всех k

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |a|^j \int\limits_{\mathbb{D}} |\zeta|^{k+j}\, d|\sigma|(\zeta) \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} \sum_{j=0}^{\infty} |a\zeta|^j \, d|\sigma|(\zeta) = \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{d|\sigma|(\zeta)}{1 - |a\zeta|} \leqslant I.$$

Таким образом, в силу упомянутой теоремы и ее следствия $\|\Gamma_{a,\sigma}\| \leqslant I$. В частности, оператор $\Gamma_{a,\sigma}$ ограничен. Теперь утверждения 1) и 2) теоремы прямо следуют из предложения 1 и теоремы 1 соответственно, если там положить $\mu = \frac{1}{a}$ и $\alpha_n = a^n \gamma_n$. $\rhd$

Пример. Пусть $d\sigma(z) = dA_\alpha(z) := (\alpha+1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$, где $dA(z) := (1/\pi)\, dx\, dy = (r/\pi)\, dr\, d\theta$ — нормированная площадь, $\alpha > 0$. Это вероятностная мера на $\mathbb{D}$ [12, лемма 3.9]. Тогда

$$I = \int\limits_{\mathbb{D}} \frac{dA_\alpha(\zeta)}{1 - |\zeta|} = 2(\alpha+1) \int\limits_0^1 \frac{(1+r)^\alpha r\, dr}{(1-r)^{1-\alpha}} < \infty$$

(последний интеграл может быть выражен через гипергеометрическую функцию, см. [13, с. 302, формула 15]). Легко проверить, что $\gamma_0 = 1$ и $\gamma_n = 0$ при $n \geqslant 1$. Следовательно, в силу теоремы 2 $\|\Gamma_{a,A_\alpha}\| \leqslant I$, и оператор Γ_{a,A_α} (где $|a| \leqslant 1$) нормален тогда и только тогда, когда $|a| = 1$. При этом условии данный оператор самосопряжен.

Литература

1. *Nikolski N. K.* Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. Vol. 1: Hardy, Hankel, and Toeplitz: American Mathematical Society, 2002.—461 p.—(Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 92).
2. *Nikolski N. K.* Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. Vol. 2: Model Operators and Systems: American Mathematical Society, 2002.—438 p.—(Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 93).

3. *Пеллер В. В.* Операторы Ганкеля и их приложения: Монография / Пер. с англ.—М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2005.—1028 с.
4. *Ho M. C.* On the rotational invariance for the essential spectrum of λ-Toeplitz operators // J. Math. Anal. Appl.—2014.—Vol. 413, № 2.—P. 557–565. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.11.056.
5. *Mirotin A. R.* On the essential spectrum of λ-Toeplitz operators over compact Abelian groups // J. Math. Anal. Appl.—2015.—Vol. 424.—P. 1286–1295.
6. *Mirotin A. R., Kuzmenkova E. Yu.* μ-Hankel operators on hilbert spaces // Opuscula Math.—2021.—Vol. 41, № 6.—P. 881–899.
7. *Martнnez-Avendaño R. A., Rosenthal P.* An Introduction to Operators on the Hardy–Hilbert Space.—N. Y.: Springer, 2007.—229 p.
8. *Ахиезер Н. И., Глазман И.* Теория линейных операторов в гильтбертовом пространстве / 2-е изд.—М.: Наука, 1966.—544 с.
9. *Mirotin A. R., Kovalyova I. S.* The Markov–Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces // Integral Transforms and Special Functions.—2016.—Vol. 27, № 12.—P. 995–1007. DOI: 10.1080/10652469.2016.1247074. Corrigendum to our paper "The Markov–Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces" // Integral Transforms and Special Functions.—2017.—Vol. 28, № 5.—P. 421—422. DOI: 10.1080/10652469.2017.1298592.
10. *Миротин А. Р., Ковалева И. С.* Обобщенный оператор Маркова — Стилтьеса в пространствах Харди и Лебега // Тр. Ин-та математики.—2017.—Т. 25, № 1.—С. 39–50.
11. *Weidmann J.* Linear Operators in Hilbert Spaces.—N. Y.: Springer, 1980.—415 p.
12. *Zhu K.* Operator Theory in Function Spaces / Second Edition.— American Mathematical Society, 2007.—348 p.—(Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 138).
13. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев А. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции.—М.: Наука, 1981.—800 с.

Статья поступила 11 июля 2021 г.

Кузьменкова Екатерина Юрьевна
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
Беларусь, 246019, Гомель, Советская, 104
E-mail: katuha66@tut.by

Миротин Адольф Рувимович
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений
Беларусь, 246019, Гомель, Советская, 104
E-mail: amirotin@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0001-7340-4522

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 1, P. 36–43

ON NORMAL μ-HANKEL OPERATORS

Kuzmenkova, E. Yu.[1] and Mirotin, A. R.[1]

[1] Francisk Skorina Gomel State University,
104 Sovetskaya St., Gomel 246019, Belarus
E-mail: katuha66@tut.by, amirotin@yandex.ru

Abstract. Hankel operators form one of the most important classes of operators in spaces of analytic functions and have numerous implementations. These operators can be defined as operators having Hankel matrices (i. e., matrices whose elements depend only on the sum of the indices) with respect to some orthonormal basis in a separable Hilbert space. This work continues the research begun in the work of the authors «μ-Hankel operators on Hilbert spaces», Opuscula Math., 2021, vol. 41, no. 6, p. 881–899, where a new class of operators in Hilbert spaces was introduced (μ-Hankel operators, μ is a complex parameter).

Such operators act in a separable Hilbert space and, in some orthonormal basis of this space, have matrices whose diagonals, orthogonal to the main diagonal, are geometric progressions with denominator μ. Thus, the classical Hankel operators correspond to the case $\mu = 1$. The main result of the paper is a criterion for the normality of μ-Hankel operators. By analogy with the Hankel operators, the considered class of operators has specific implementations in the form of integral operators, which allows apply to these operators the results obtained in an abstract context, and thereby contribute to the theory of integral operators. In this paper, such a realization is considered in the Hardy space on the unit circle. Criteria for the self-adjointness and normality of these operators are given.

Key words: Hankel operator, μ-Hankel operator, normal operator, self-adjoint operator, Hardy space, integral operator.

AMS Subject classification: 47B15, 47B35.

For citation: *Kuzmenkova, E. Yu. and Mirotin, A. R.* On Normal μ-Hankel Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 24, no. 1, pp. 36–43 (in Russian). DOI: 10.46698/t8778-6480-0136-d.

References

1. *Nikolski, N. K. Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading. Vol.* 1*: Hardy, Hankel, and Toeplitz*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 92, American Mathematical Society, 2002, 461 p.
2. *Nikolski, N. K. Operators, Functions, and Systems: an Easy Reading. Vol.* 2*: Model Operators and Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 93, American Mathematical Society, 2002, 438 p.
3. *Peller, V. V. Hankel Operators and Their Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Berlin, Springer-Verlag, 2003, 784 p.
4. *Ho, M. C.* On the Rotational Invariance for the Essential Spectrum of λ-Toeplitz Operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, vol. 413, no. 2, pp. 557–565. DOI: 10.1016/j.jmaa.2013.11.056.
5. *Mirotin, A. R.* On the Essential Spectrum of λ-Toeplitz Operators over Compact Abelian Groups, *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, vol. 424, pp. 1286–1295.
6. *Mirotin, A. R. and Kuzmenkova, E. Yu.* μ-Hankel Operators on Hilbert Spaces, *Opuscula Math.*, 2021, vol. 41, no. 6, pp. 881–899.
7. *Martнnez-Avendaño, R. A. and Rosenthal, P. An Introduction to Operators on the Hardy–Hilbert Space*, New York, Springer, 2007, 229 p.
8. *Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M. Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Translated from the Russian by Merlynd Nestell, New York, Dover Publications, 661 p.
9. *Mirotin, A. R. and Kovalyova, I. S.* The Markov–Stieltjes Transform on Hardy and Lebesgue Spaces, *Integral Transforms and Special Functions*, 2016, vol. 27, no. 12, pp. 995–1007. DOI: 10.1080/10652469.2016.1247074. Corrigendum to our paper "The Markov–Stieltjes transform on Hardy and Lebesgue spaces", *Integral Transforms and Special Functions*, 2017, vol. 28, no. 5, pp. 421–422. DOI: 10.1080/10652469.2017.1298592.
10. *Mirotin, A. R. and Kovalyova, I. S.* Generalized Markov–Stieltjes Operator on Hardy and Lebesgue Spaces, *Tr. Inst. Mat.*, 2017, vol. 25, no. 1, pp. 39–50.
11. *Weidmann, J. Linear Operators in Hilbert Spaces*, New York, Springer, 1980, 415 p.
12. *Zhu, K. Operator Theory in Function Spaces, Second Edition*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 138, American Mathematical Society, 2007, 348 p.
13. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, A. I. Integrals and series: Elementary functions*, New York, Gordon and Breach, 1986, 808 p.

Received July 11, 2021

Ekaterina Yu. Kuzmenkova
Francisk Skorina Gomel State University,
104 Sovetskaya St., Gomel 246019, Belarus
Graduate Student
E-mail: `katuha66@tut.by`

Adolf R. Mirotin
Francisk Skorina Gomel State University,
104 Sovetskaya St., Gomel 246019, Belarus
Head of Department of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: `amirotin@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0001-7340-4522