Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 1, С. 100–108

УДК 514.172.45
DOI 10.46698/w8842-6654-4046-v

О СОСТАВНЫХ RR-МНОГОГРАННИКАХ ВТОРОГО ТИПА

В. И. Субботин[1]

[1] Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова, Россия, 346400, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

E-mail: geometry@mail.ru

Аннотация. В классической и современной геометрии актуальна задача классификации многогранников в E^3 на основе свойств симметрии элементов многогранника. Первыми примерами такой классификации являются пять правильных (платоновых, точнее — пифагоровых) многогранников, равноугольно-полуправильные (архимедовы) многогранники. Класс равноугольно-полуправильных многогранников характеризуется тем, что все его грани — правильные многоугольники, и группа симметрий многогранника транзитивна на его вершинах. Среди примеров невыпуклых многогранников можно выделить четыре правильных звездчатых многогранника Кеплера — Пуансо, полнота списка которых была доказана О. Коши. Среди многочисленных современных обобщений и развитий приведенных примеров укажем класс, состоящий из девяноста двух замкнутых выпуклых многогранников в E^3, грани которых являются правильными многоугольниками различного типа (многогранники Джонсона — Залгаллера). В настоящей работе автором продолжено изучение RR-многогранников: найден полный список составных RR-многогранников второго типа. RR-многогранником (от слов «rhombic» и «regular») называется такой замкнутый выпуклый многогранник в E^3, множество граней которого можно разбить на два непустых непересекающихся класса — класс граней, образующих гранные звезды симметричных ромбических вершин, и класс правильных граней; если правильные грани такого многогранника одного типа, то его будем относить к первому типу; если различного — ко второму типу RR-многогранников. Если звезда вершины V многогранника состоит из равных и одинаково расположенных, т. е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов (не квадратов), то вершину V будем называть ромбической. Если вершина V расположена на такой оси вращения звезды, что порядок оси совпадает с числом ромбов звезды, то V называется симметричной ромбической вершиной. Ранее автором были найдены двадцать три RR-многогранника первого типа и доказана полнота списка таких многогранников.

Ключевые слова: RR-многогранник, составной многогранник второго типа, симметричная ромбическая вершина.

AMS Subject Classification: 52B15.

Образец цитирования: *Субботин В. И.* О составных RR-многогранниках второго типа // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 1.—С. 100–108. DOI: 10.46698/w8842-6654-4046-v.

1. Введение

Много современных исследований в области дискретной геометрии посвящено задачам классификации как выпуклых, так и невыпуклых многогранников с различными условиями симметрии (правильности) элементов многогранника, см., например, [1–5]. Заметим, что удобно выделить из всех условий симметрии такие, которые позволяют найти полный список многогранников, удовлетворяющих этим условиям. Причем, условия симметрии, которые позволяют найти полный список многогранников с точностью до подобия, будем называть *жесткими.* Условия, которые позволяют найти полный список многогранников с точностью до комбинаторной эквивалентности, будем называть *сильными.*

В некоторых работах (см., например, [6]) автором была доказана полнота списка определенных классов замкнутых выпуклых многогранников в E^3 с сильными условиями симметрии без условий правильности граней. Естественным образом возникает вопрос о жестких условиях симметрии при наличии правильных граней и при некоторых ограничениях на количество последних. В связи с этим в [7] был рассмотрен класс RR-многогранников, некоторые из граней которых являются не правильными, а ромбическими. Там же в [7] было доказано существование и единственность двух RR-многогранников, а в [8–9] — полнота списка этого класса, состоящего из двадцати трех многогранников, при условии однотипности правильных граней.

В настоящей работе рассматривается класс выпуклых RR-многогранников с правильными гранями различного типа. Это, конечно, приводит к связи данного класса с девяносто двумя многогранниками Джонсона — Залгаллера, у которых все грани — правильные многоугольники различного типа (см. [4, 5]).

2. Определения

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется *RR-многогранником* (от слов «rombic» и «regular»), если у него существуют симметричные ромбические вершины, а все грани, не принадлежащие звездам этих вершин, являются правильными многоугольниками.

Таким образом, множество граней RR-многогранника является объединением двух непересекающихся непустых множеств: множества граней (ромбов, не квадратов), образующих звезды симметричных ромбических вершин, и множества правильных граней. Если указанные правильные грани — различного вида, то многогранник назовем RR-многогранником *второго типа.*

Здесь звезда $\mathrm{Star}(V)$ вершины V многогранника, иначе называемая далее *ромбической звездой* — это совокупность всех граней, имеющих одну общую вершину, совпадающую с V. Если звезда $\mathrm{Star}(V)$ состоит из n равных и одинаково расположенных, т. е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов, то вершину V будем называть *n-ромбической.* Если V расположена на оси вращения порядка n множества $\mathrm{Star}(V)$, то V называется *симметричной n-ромбической вершиной.*

Свободными углами ромбической звезды будем называть углы с вершинами, совпадающими с общей вершиной двух тупых углов двух соседних ромбов.

Если поместить в свободные углы n-ромбической звезды правильные треугольные грани, то получим многогранную поверхность — *ромбическую шапочку.* Приклеивая к границе шапочки правильный n-угольник, получим выпуклый многогранник, который удобно назвать *n-ромбической пирамидой.*

Составным будем называть такой RR-многогранник второго типа, который можно разбить плоскостями на части, представляющие собой ромбические пирамиды и выпуклые многогранники с правильными гранями.

В данной работе будут найдены все составные RR-многогранники второго типа.

3. Основная теорема

Теорема 1. *Существуют только пятьдесят четыре составных RR-многогранника второго типа.*

$\triangleleft$ Для доказательства теоремы рассмотрим n-ромбическую пирамиду с вершиной V и основанием $ABCDE\ldots$, острыми углами α ромбов и свободными углами β. Двугранный угол при ребрах $AB, BC, \ldots$ основания обозначим γ. Рассмотрим также малую пирамиду (с треугольными гранями) $VMP, \ldots, S, \ldots$ (рис. 1, A). Высоты ромбической пирамиды и малой пирамиды обозначим соответственно H и h. Внутренний угол правильного n-угольника в основании ромбической пирамиды обозначим ϕ.

Элементарными вычислениями легко проверить, что

$$H = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4\cos^2\frac{\phi}{2}}}, \quad h = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\phi}{2}}}. \tag{1}$$

Используя (1), для двугранного угла γ найдем выражение:

$$\sin\gamma = \frac{H-h}{\sqrt{3}\backslash 2}. \tag{2}$$

Напомним формулу из [9], связывающую углы α и β со степенью ромбической вершины:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\phi}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\pi(n-2)}{2n}}. \tag{3}$$

Для того, чтобы найти все составные RR-многогранники, необходимо проверить все случаи возможного присоединения ромбических пирамид к выпуклым многогранникам с правильными гранями, учитывая при этом и бесконечные серии последних. Очевидно, что для этого достаточно рассмотреть правильные многогранники, равноугольно-полуправильные многогранники и многогранники Джонсона — Залгаллера, а также бесконечные серии правильногранных призм и антипризм. Отметим сразу, что число таких присоединений окажется конечным.

Двугранный угол γ n-ромбической пирамиды в дальнейшем будем обозначать γ_n. В общем случае через $\delta_{n,m}$ будем обозначать двугранный угол n-угольной грани с m-угольной.

При доказательстве будем пользоваться формулами (1)–(3).

Подставляя $n = 3$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ в (1), получим

$$H = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin\gamma_3 = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{4}$$

Для 4-ромбической пирамиды получим

$$n = 4, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \cos\frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad H = \sqrt{3}, \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\gamma_4 = 1. \tag{5}$$

Таким образом, в случае $n = 4$ треугольные грани ромбической пирамиды перпендикулярны основанию пирамиды.

Проводя аналогичные выкладки, получим

$$\sin\gamma_5 = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}}{\sqrt{3}\backslash 2}, \quad \sin\gamma_6 = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{6}$$

$$\sin\gamma_8 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin\gamma_{10} = \frac{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}}{\sqrt{3}\backslash 2}. \tag{7}$$

Покажем на примерах архимедовых многогранников как доказать, что некоторые из них не могут являться частью составных RR-многогранников.

Рассмотрим усеченный тетраэдр. Найдем двугранный угол его треугольной грани с 6-угольной.

$$\cos\delta_{3,6} = \frac{\cos\frac{2\pi}{3}(1-\cos\frac{\pi}{3})}{\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{3}. \tag{8}$$

Присоединим 6-ромбическую пирамиду основанием к 6-угольной грани усеченного тетраэдра. Учитывая (6), получим: $\sin^2\gamma_6 + \cos^2\delta_{3,6} = 1$. Т. е. треугольная грань усеченного тетраэдра и треугольная грань ромбической пирамиды лежат в одной плоскости. Таким образом, в этом случае составной RR-многогранник не получится.

Далее для краткости будем указывать полуправильный многогранник и соответствующие значения углов.

Усеченный октаэдр:

$$\sin\delta_{4,6} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin\gamma_6 > \sin\delta_{4,6},$$

и присоединение 6-ромбической пирамиды даст невыпуклый многогранник.

Следующие пять многогранников также не дадут составной RR-многогранник.

Усеченный куб:

$$\cos\delta_{3,8} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sin^2\gamma_8 + \cos^2\delta_{3,8} = 1.$$

Усеченный икосаэдр.

Очевидно, достаточно проверки присоединения ромбической пирамиды к 6-угольной грани усеченного икосаэдра.

$$|\cos\delta_{5,6}| = \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{6}\sqrt{5+\sqrt{5}}} > \frac{1}{3} = \cos\gamma_6.$$

Усеченный кубооктаэдр:

$$|\cos\delta_{4,6}| = \sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{1}{3} = \cos\gamma_6.$$

Усеченный икосододекаэдр.

$$|\cos\delta_{6,10}| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}, \quad \sin^2\gamma_{10} + \cos^2\delta_{6,10} = 1.$$

Усеченный додекаэдр:

$$|\cos\delta_{3,10}| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}}, \quad \sin^2\gamma_{10} + \cos^2\delta_{3,10} = 1.$$

Здесь принята во внимание формула (7).

Для икосододекаэдра достаточно заметить, что для него $\cos\delta_{3,5}$ равен $\cos\delta_{6,10}$ для усеченного икосододекаэдра. Поэтому и для икосододекаэдра не существует RR-многогранников, получаемых присоединением ромбических пирамид к нему. Аналогично проверяется несуществование для некоторых других архимедовых и правильных многогранников.

Перейдем теперь к существующим составным RR-многогранникам. На рис. 1 представлен сорок один такой многогранник, существование которых очевидно следует из предыдущего; при этом условно будем считать ромбическую пирамиду составным многогранником.

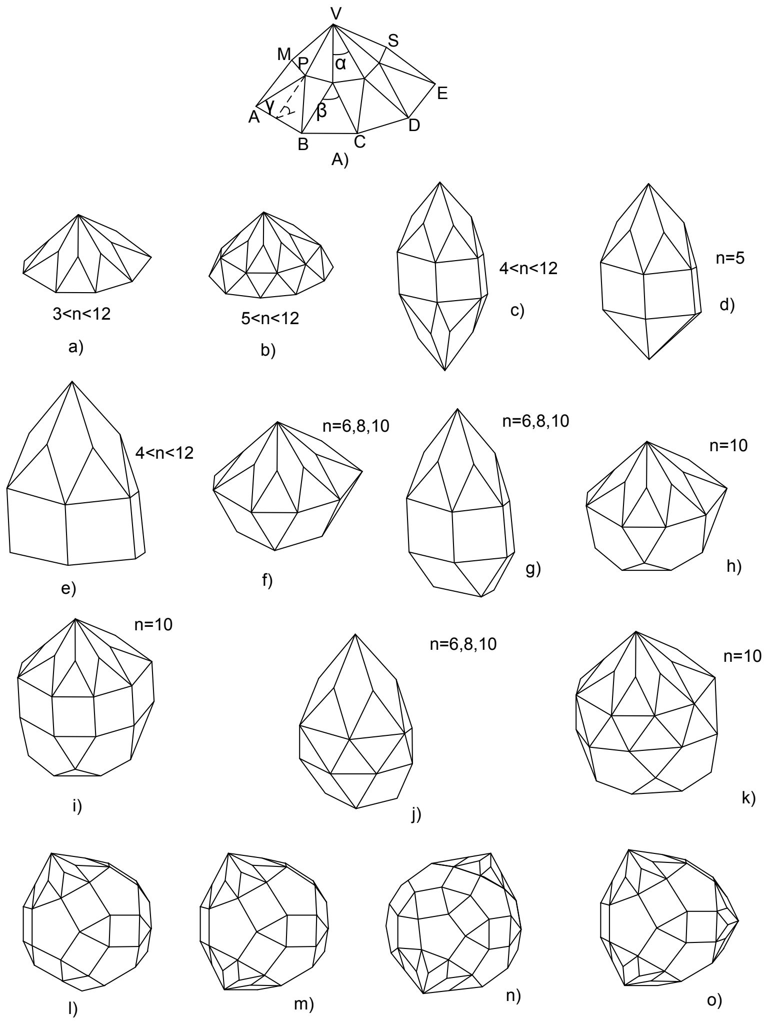

Рис. 1. Составные RR-многогранники второго типа.

Число ромбов n-ромбической пирамиды (рис. 1, a)) не может быть больше одиннадцати. Действительно, при $n = 12$ острые углы ромбов в вершине V должны быть меньше $\frac{\pi}{6}$, и следовательно, тупые углы ромбов — больше $\frac{5\pi}{6}$. Но тогда в вершинах $M, P, \ldots$ получим сумму плоских углов большую 2π. Таким образом, число правильногранных призм (антипризм), к которым можно присоединить ромбические пирамиды, не превышает одиннадцати. Все возможные такие соединения показаны на рис. 1, b), c), e).

Заметим, что некоторые из многогранников на рис. 1 можно рассматривать как полученные отсечением от ромбокубооктаэдра и икосододекаэдра соответсвенно четырехскатного купола и пятискатной ротонды и присоединением ромбической пирамиды к оставшейся части или к отсеченной. Здесь и в дальнейшем мы используем терминологию, принятую в теории многогранников Джонсона — Залгаллера.

Аналогично отсечениями пятискатных куполов от ромбоикосододекаэдра и их поворотами на угол $\frac{\pi}{5}$ с последующим присоединением к оставшейся части 10-ромбических пирамид получим несколько составных RR-многогранников.

Такое присоединение возможно, так как для ромбоикосододекаэдра получим

$$\frac{\cos\gamma_{10}}{\cos\delta_{4,10}} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}} > 1, \quad \cos\delta_{5,10} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \frac{\cos\gamma_{10}}{\cos\delta_{5,10}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-3}}\sqrt[4]{5} > 1.$$

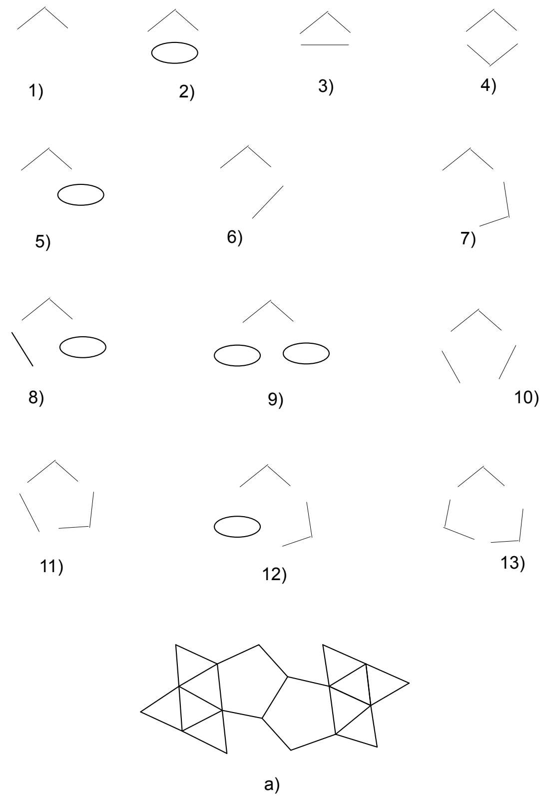

Рис. 2. Ромбические ромбоикосододекаэдры: 1)–13). Дважды косо отсеченный икосаэдр: a).

Если не учитывать отсечения и скручивания пятискатных куполов, то получим четыре ромбических ромбоикосододекаэдра с одной, двумя и тремя ромбическими вершинами (рис. 1, l)–o)). Комбинируя эти четыре с поворотами и отсечениями пятискатных куполов, получим еще девять составных RR-многогранников. На рис. 2 условно изображены схемы присоединения ромбических пирамид (в форме угла), скручиваний куполов (в виде овала) и отсечений куполов (в виде отрезка прямой). На этом рисунке изображены схемы всех тринадцати возможных *ромбических ромбоикосододекаэдров*, причем многогранникам l), m), n), o) на рис. 1 соответствуют схемы 1), 7), 4), 13) на рис. 2. Отметим, что ромбические ромбоиксододекаэдры можно рассматривать как полученные из многогранников Джонсона — Залгаллера. Действительно, отсечения и скручивания пятискатных куполов ромбоикосододекаэдра приводят к правильногранным многогранникам.

Рассматривая остальные многогранники Джонсона — Залгаллера аналогично тому, как были рассмотрены архимедовы и правильные, мы не получим новых составных RR-многогранников. В качестве примера рассмотрим дважды косо отсеченный икосаэдр, обозначаемый в [4] как $M_7 + M_3$ и развертка которого приведена на рис. 2, a). Найдем косинус угла его треугольной грани с пятиугольной:

$$\cos\delta_{3,5} = \frac{\cos\frac{3\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{5}} = -\frac{\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}}{\sqrt{3}}.$$

Сравнивая это значение угла $\delta_{3,5}$ с γ_5 из равенства (6), получим, что треугольная грань ромбической пирамиды, в случае присоединения последней к пятиугольной грани, будет находиться в одной плоскости с треугольной гранью дважды косо отсеченного икосаэдра, и мы не получим RR-многогранника. $\triangleright$

4. Заключение

Решенная здесь задача доказательства существования и полноты списка составных RR-многогранников принадлежит направлению исследований, в котором изучаются различные обобщения и расширения известных классов многогранников с правильными гранями. В отличие от RR-многогранников первого типа, у которых число ромбических вершин не может быть больше двух, многогранники второго типа могут иметь три ромбические вершины. Существуют также несоставные RR-многогранники, доказательство существования и полноты списка которых предполагается оформить отдельной работой.

Литература

1. *Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И.* Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках.—М.: МЦНМО, 2007.—97 с.
2. *Cromwell P. R.* Polyhedra.—Cambridge: Cambridge University Press., 1999.—451 p.
3. *Grunbaum B.* Regular polyhedra — old and new // Aeq. Math.—1977.—Vol. 16, № 1–2.—P. 1–20. DOI: 10.1007/BF01836414.
4. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ.—1967.—Т. 2.—С. 1–220.
5. *Johnson N. W.* Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math.—1966.—Vol. 18, № 1.—P. 169–200. DOI: 10.4153/CJM-1966-021-8.
6. *Субботин В. И.* Об одном классе многогранников с симметричными звездами вершин // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—2019.—Т. 169.—С. 88–97. DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-88-97.
7. *Subbotin V. I.* On two classes of polyhedra with rhombic vertices // J. Math. Sci.—2020.—Vol. 251.—P. 531–538. DOI: 10.1007/s10958-020-05114-3.
8. *Субботин В. И.* Существование и полнота перечисления трехмерных RR-многогранников // Геометр. методы в теории управления и матем. физике.—Рязань: Изд-во Рязанского гос. ун-та. 2021.—С. 15.
9. *Субботин В. И.* О полноте списка выпуклых RR-многогранников // Чебышевский сб.—2020.—Т. 2, № 1.—С. 297–309. DOI: 10.22405/2226-8383-2020-21-1-297-309.

Статья поступила 31 октября 2021 г.

Субботин Владимир Иванович
Южно-Российский государственный политехнический
университет (НПИ) им. М. И. Платова,
доцент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 346400, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: geometry@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-4204-8195

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 1, P. 100–108

ON COMPOSITE RR-POLYHEDRA OF THE SECOND TYPE

Subbotin, V. I.[1]

[1] Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
132 Enlightenment St., Novocherkassk 346428, Russia
E-mail: `geometry@mail.ru`

Abstract. In classical and modern geometry, the problem of classifying polyhedra in E^3 on the basis of the symmetry properties of the polyhedron elements is topical. The first examples of such a classification are five regular (Platonic, more precisely, Pythagorean) polyhedra, i. e. equiangular-semiregular (Archimedean) polyhedra. The class of equi-semiregular polytopes is characterized by the fact that all its faces are regular polygons and the symmetry group of the polytope is transitive at its vertices. Among the examples of nonconvex polytopes, one can single out four regular stellated Kepler–Poinsot polyhedra, the completeness of the list of which was proved by O. Cauchy. Among the numerous modern generalizations and developments of the above examples, we indicate a class consisting of ninety-two closed convex polyhedra in E^3, whose faces are regular polygons of various types (Johnson–Zalgaller polytopes). In this paper, the author continues the study of RR-polyhedra: a complete list of composite RR-polyhedra of the second type is found. A RR-polyhedron (from the words "rhombic" and "regular") is a closed convex polyhedron in E^3, the set of faces of which can be divided into two nonempty disjoint classes — the class of faces that form faceted stars of symmetric rhombic vertices and a class of regular faces; if the regular faces of such a polyhedron are of the same type, then we will refer it to the first type; if different, to the second type of RR-polyhedra. If the star of the vertex V of the polyhedron consists of equal and equally spaced, i. e. converging at the vertex V either by their acute or obtuse angles of rhombuses (not squares), then the vertex V will be called rhombic. If the vertex V is located on such an rotation axis of the star that the order of the axis coincides with the number of rhombuses in the star, then V is called a symmetric rhombic vertex. Earlier, the author found twenty-three RR-polyhedra of the first type and proved the completeness of the list of such polyhedra.

Key words: RR-polyhedron, composite polyhedron of the second type, symmetric rhombic vertex.

AMS Subject Classification: 52B15.

For citation: *Subbotin, V. I.* On Composite RR-Polyhedra of the Second Type, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 100–108 (in Russian). DOI: 10.46698/w8842-6654-4046-v.

References

1. *Deza, M., Grishukhin, V. P. and Shtogrin, M. I. Izometricheskie poliedral'nye podgrafy v giperkubah i kubicheskih reshetkah* [Isometric Polyhedral Subgraphs in Hypercubes and Cubic Lattices], Moscow, MCNMO, 2007, 97 p. (in Russian).
2. *Cromwell, P. R.* Polyhedra, Cambridge, Cambridge University Press, 1999, 451 p.
3. *Grunbaum, B.* Regular Polyhedra–Old and New, *Aequationes Mathematicae*, 1977, vol. 16, no. 1–2, pp. 1–20. DOI: 10.1007/BF01836414.
4. *Zalgaller, V. A.* Convex Polyhedra with Regular Faces, *Zapiski nauchnych seminarov LOMI*, 1967, vol. 2, pp. 1–220 (in Russian).
5. *Johnson, N. W.* Convex Polyhedra with Regular Faces, *Canadian Journal of Mathematics*, 1966, vol. 18, no. 1, pp. 169–200. DOI: 10.4153/CJM-1966-021-8.
6. *Subbotin, V. I.* On a Class of Polyhedra with Symmetrical Vertex Stars, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory*, 2019, vol. 169, pp. 88–97 (in Russian). DOI: 10.36535/0233-6723-2019-169-88-97.
7. *Subbotin, V. I.* On Two Classes of Polyhedra with Rhombic Vertices, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 251, pp. 531–538. DOI: 10.1007/s10958-020-05114-3.

8. *Subbotin, V. I.* Existence and Completeness of Enumeration of Three-Dimensional *RR*-Polyhedra, *Geometr. metody v teorii upravleniya i matem. fizike* [Geometric Methods in Control Theory and Mathematical Physics], Ryazan, Ryazan State University, 2021, pp. 15 (in Russian).
9. *Subbotin, V. I.* Completeness of the List of Convex *RR*-Polyhedra, *Chebyshevskii Sbornik*, 2020, vol. 2, no. 1, pp. 297–309 (in Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2020-21-1-297-309.

Received October 31, 2021

Vladimir I. Subbotin
Platov South Russian State polytechnic university (NPI),
132 Enlightenment St., Novocherkassk 346428, Russia,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics
E-mail: geometry@mail.ru
https://orcid.org/0000-0003-4204-8195