Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 1, С. 131–140

УДК 519.64
DOI 10.46698/l9013-9196-4430-x

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ, СОДЕРЖАЩИЕ НАПЕРЕД ЗАДАННЫЕ УЗЛЫ[#]

Ш. С. Хубежты[1,2]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: shalva57@rambler.ru

Аннотация. Приближенные методы вычисления определенных интегралов являются актуальными по сегодняшний день. Среди них самыми популярными оказываются методы квадратур, которые позволяют приближенно вычислить интеграл при помощи конечного числа значений интегрируемой функции. Кроме того, во многих случаях требуются затраты меньшего вычислительного труда, сравнительно с другими методами. С применением многочленов Чебышева первого, второго, третьего и четвертого родов соответственно весовым функциям $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, на отрезке $[-1, 1]$ строятся квадратурные формулы с наперед заданными узлами $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, степени точности $2n + 1$ с оценками остаточных членов. В этом деле особое место занимает построение ортогональных многочленов по весу $p(x)(x^2 - 1)$ и нахождение их корней. Эта задача оказалась трудоемкой и решались методами вычислительной математики.

Ключевые слова: весовые функции, ортогональные многочлены, квадратурные формулы, наперед заданные узлы, остаточные члены, степени точностей.

AMS Subject Classification: 65R10, 65R20.

Образец цитирования: *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности, содержащие наперед заданные узлы // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 1.—С. 131–140. DOI: 10.46698/l9013-9196-4430-x.

Введение

В прикладных задачах математической физики, механики и техники часто возникает необходимость построения таких квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее, другая часть узлов может быть взята произвольно [1–3]. Это встречается, например, при решении граничных задач дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[a, b]$.

В таких случаях при выборе квадратурной формулы естественно принять во внимание, что значения неизвестной функции на концах отрезка $[a, b]$ нам известны, и взять формулу вида

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{1}$$

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2022-890.

содержащую два фиксированных узла a и b. Прочие узлы x_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ являются произвольными.

В общем случае квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы имеют вид [1]

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^{m} B_l f(a_l), \tag{2}$$

в которых m узлов a_1, a_2, $\dots$, a_m фиксированы. Они содержат $2n+m$ параметров x_k, A_k $(k = 1, \dots, n)$ и B_l $(l = 1, \dots, m)$. Попытаемся их выбрать так, чтобы равенство (2) стало точным для многочленов возможно более высокой степени.

Введем два многочлена, связанных с узлами a_l и x_k:

$$\Omega(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_m),$$

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n).$$

За счет выбора коэффициентов A_k и B_l формулу (2) можно сделать верной для многочленов степени $n+m-1$. Для того чтобы равенство (2) было верным для многочленов степени $2n + m - 1$, необходимо и достаточно (см. [1, с. 168]) выполнение следующих условий.

Теорема 1. *Для того чтобы формула* (2) *была точной для многочленов степени* $2n + m - 1$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *она была интерполяционной;*

2) *многочлен* $\omega(x)$ *был ортогонален на отрезке* $[a, b]$ *по весу* $p(x)\Omega(x)$ *ко всякому многочлену* $Q(x)$ *степени ниже* n.

Таким образом, построение квадратурных формул (2), верных для многочленов степени $2n + m - 1$, приводится к нахождению многочлена $\omega(x)$ степени n, ортогонального на $[a, b]$ по весу $p(x)\Omega(x)$ ко всякому многочлену меньшей степени. Корни многочлена $\omega(x)$ должны быть действительными, различными и принадлежать отрезку $[a, b]$. Кроме того, они должны быть отличны от фиксированных узлов a_l $(l = 1, 2, \dots, m)$. Таким образом, решение этих задач обычным путем представляет большие математические трудности.

В литературе [1, 4, 5] описывается правило построения указанных квадратурных формул. Но конкретные квадратурные формулы, в основном, построены в случаях $m = 1$, $m = 2$ и $p(x) = 1$.

Настоящая заметка посвящена часто встречающимся случаям

$$[a, b] = [-1, 1], \quad m = 2, \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$p(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad p(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}, \quad p(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

В этих случаях существуют ортогональные многочлены [1, 6] по указанным весам на отрезке $[-1, 1]$. Их называют многочленами Чебышева соответственно весовым функциям:

I рода, $T_n(x) = \cos(\arccos x)$;

II рода, $U_n(x) = \dfrac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

III рода, $C_n(x) = \dfrac{\cos\frac{2n-1}{2}\arccos x}{\cos\frac{1}{2}\arccos x}$;

IV рода, $S_n(x) = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\arccos x}{\sin\frac{1}{2}\arccos x}$.

Так как формула (2) является интерполяционной, ее коэффициенты A_k и B_l должны иметь следующие значения:

$$\begin{aligned} A_k &= \int_{-1}^{1} p(x)\,\frac{\omega(x)\Omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)\Omega(x_k)}\,dx, \\ B_l &= \int_{-1}^{1} p(x)\,\frac{\omega(x)\Omega(x)}{(x-a_l)\omega(a_l)\Omega'(a_l)}\,dx, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\omega'(x_k) = \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i), \quad \Omega'(a_l) = \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq l}}^{m}(a_l - a_i).$$

Для остатка квадратуры $R(f)$ справедлива формула

$$R(f) = \int_{-1}^{1} p(x)\Omega(x)\omega^2(x)\,\frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}\,dx, \quad -1 < \xi < 1. \tag{4}$$

В [1, с. 173] доказано, что многочлены $\omega(x)$ при $m = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ вычисляются по формуле

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta\Omega(x)}\begin{vmatrix} \widetilde{P}_{n+2}(x) & \widetilde{P}_{n+2}(-1) & \widetilde{P}_{n+2}(1) \\ \widetilde{P}_{n+1}(x) & \widetilde{P}_{n+1}(-1) & \widetilde{P}_{n+1}(1) \\ \widetilde{P}_{n}(x) & \widetilde{P}_{n}(-1) & \widetilde{P}_{n}(1) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где

$$\Omega(x) = x^2 - 1, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \widetilde{P}_{n+1}(-1) & \widetilde{P}_{n+1}(1) \\ \widetilde{P}_{n}(-1) & \widetilde{P}_{n}(1) \end{vmatrix},$$

а $\widetilde{P}_n(x)$ — многочлены Чебышева, соответствующие весу $p(x)$ со старшими коэффициентами единицы, т. е. вида $\widetilde{P}_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Будем рассматривать отдельно каждый случай веса $p(x)$.

1. Вычисление интеграла вида $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,f(x)\,dx$

В этом случае формула (2) принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,f(x)\,dx \approx Af(-1) + Bf(1) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{6}$$

$$\widetilde{P}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\,T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n\arccos x).$$

После вычисления по формуле (5) получаем

$$\omega(x) = \frac{1}{2^n}\,U_n(x),$$

где $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ — многочлены Чебышева II рода.

Для коэффициентов A, B, A_k получены значения

$$A = \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad B = \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad A_k = \frac{\pi}{n+1}, \quad x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно получается квадратурная формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,f(x)\,dx = \frac{\pi}{2(n+1)}f(-1) + \frac{\pi}{2(n+1)}f(1) + \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) + R_n(f). \qquad (7)$$

Остаточный член формулы имеет вид

$$R_n(f) = -\frac{\pi}{2^{2n+2}}\,\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}, \quad -1 < \xi < 1.$$

2. Вычисление интеграла вида $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,f(x)\,dx$

В этом случае по формуле (5) с подстановкой $\widetilde{P}_n(x) = \frac{1}{2^n}U_n(x)$ для $\omega(x)$ получается выражение

$$\omega(x) = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)(x^2-1)}\big((n+1)U_{n+2}(x) - (n+3)U_n(x)\big), \qquad (8)$$

где $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\frac{1}{2}\arccos x}$.

Далее для построения квадратурной формулы (2) необходимо знание узлов x_k $(k = 1, \dots, n)$, т. е. корни многочлена (8). Но они в общем случае не выражаются формулой. Поэтому будем рассматривать частные случаи относительно степени n. Эти случаи при $n = 1, 2, \dots, 6$ приведены ниже.

Пусть $n = 1$. $\omega(x) = x$, т. е. корень $x_1 = 0$, после вычисления по формуле (3) получаем

$$A = \frac{\pi}{16}, \quad B = \frac{\pi}{16}, \quad A_1 = \frac{3\pi}{8},$$

т. е. справедлива формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{16}\,f(-1) + \frac{\pi}{16}\,f(1) + \frac{3\pi}{8}\,f(0). \qquad (9)$$

Пусть $n = 2$. По формуле (8) получаем

$$\omega(x) = x^2 - \frac{1}{6}, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

а по формуле (3) имеем

$$A = \frac{\pi}{40}, \quad B = \frac{\pi}{40}, \quad A_1 = \frac{9\pi}{40}, \quad A_2 = \frac{9\pi}{40},$$

т. е. справедлива формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx \approx \frac{\pi}{40}\, f(-1) + \frac{\pi}{40}\, f(1) + \frac{9\pi}{40}\, f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{9\pi}{40}\, f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right). \tag{10}$$

Пусть $n = 3$. По формуле (3), (8) получаем

$$\omega(x) = x^3 - \frac{3}{8}\, x, \quad x_1 = -\sqrt{\frac{3}{8}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{8}},$$

$$A = \frac{\pi}{80}, \quad B = \frac{\pi}{80}, \quad A_1 = \frac{2\pi}{15}, \quad A_2 = \frac{5\pi}{24}, \quad A_3 = \frac{2\pi}{15},$$

и имеем формулу

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx \approx \frac{\pi}{80}\, f(-1) + \frac{\pi}{80}\, f(1) + \frac{2\pi}{15}\, f\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right) + \frac{5\pi}{24}\, f(0) + \frac{2\pi}{15}\, f\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right). \tag{11}$$

Аналогично получается для $n = 4$. $\omega(x) = x^4 - \dfrac{3}{5}\, x^2 + \dfrac{3}{80}$, $A = \dfrac{\pi}{140}$, $B = \dfrac{\pi}{140}$, узлы x_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ и коэффициенты A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ вычисляются приближенно с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$, и получаем

$x_1 = -0.727412$	$A_1 = 0.261508$
$x_2 = -0.266216$	$A_2 = 0.501451$
$x_3 = 0.266216$	$A_3 = 0.501451$
$x_4 = 0.727412$	$A_4 = 0.261508$

$n = 5$. $\omega(x) = x^5 - \dfrac{5}{6}\, x^3 + \dfrac{1}{8}\, x$, $A = \dfrac{\pi}{224}$, $B = \dfrac{\pi}{224}$.

$x_1 = -0.798214$	$A_1 = 0.172198$
$x_2 = -0.442930$	$A_2 = 0.370102$
$x_3 = 0.000000$	$A_3 = 0.458149$
$x_4 = 0.442930$	$A_4 = 0.370102$
$x_5 = 0.798214$	$A_5 = 0.172198$

$n = 6$. $\omega(x) = x^6 - \dfrac{15}{14}\, x^4 - \dfrac{15}{56}\, x^2 - \dfrac{1}{112}$, $A = \dfrac{\pi}{336}$, $B = \dfrac{\pi}{336}$.

$x_1 = -0.844751$	$A_1 = 0.118702$
$x_2 = -0.564399$	$A_2 = 0.273839$
$x_3 = -0.198187$	$A_3 = 0.383508$
$x_4 = 0.198187$	$A_4 = 0.383508$
$x_5 = 0.564399$	$A_5 = 0.273839$
$x_6 = 0.844751$	$A_6 = 0.118702$

Погрешности построенных квадратурных формул равны

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,(x^2-1)\omega^2(x)\,dx, \quad -1 < \eta < 1.$$

3. Вычисление интеграла вида $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, f(x)\,dx$

В этом случае весовая функция $p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, и для отрезка $[-1,1]$ ортогональными являются многочлены Чебышева III рода [4, с. 84], $C_n(x) = \frac{\cos\frac{2n+1}{2}\arccos x}{\cos\frac{1}{2}\arccos x}$, $\widetilde{P}_n(x) = \frac{1}{2^n}C_n(x)$. Многочлен $\omega(x)$ после вычисления по формуле (5) имеет вид

$$\omega(x) = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)(x^2-1)}\big((n+1)C_{n+2}(x) + C_{n+1}(x) - (n+2)C_n(x)\big). \tag{12}$$

Корни многочлена $\omega(x)$ как в случае $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ не выражаются формулой. Поэтому пришлось рассматривать частные случаи $n = 1,2,3,4,5,6$ и вычислить их приближенно с коэффициентами A, B, A_k $(k = 1,\dots,n)$. Результаты приведены ниже.

Пусть $n = 1$. $\omega(x) = x - \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $A = \frac{\pi}{20}$, $B = \frac{5\pi}{12}$, $A_1 = \frac{8\pi}{15}$, и получается формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{20} f(-1) + \frac{5\pi}{12} f(1) + \frac{8\pi}{15} f\left(\frac{1}{4}\right).$$

Пусть $n = 2$. $\omega(x) = x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$, $\quad x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{6}$, $\quad x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{6}$,

$$A = \frac{\pi}{56}, \quad B = \frac{7\pi}{24}, \quad A_1 = \frac{29-4\sqrt{7}}{84}\,\pi, \quad A_2 = \frac{29+4\sqrt{7}}{84}\,\pi,$$

Пусть $n = 3$. $\omega(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}$, $A = \frac{\pi}{120}$, $B = \frac{9\pi}{40}$

$x_1 = -0.537986$	$A_1 = 0.339999$
$x_2 = 0.1528279$	$A_2 = 0.822336$
$x_3 = 0.760157$	$A_3 = 1.246275$

Пусть $n = 4$. $\omega(x) = x^4 - \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{20}x + \frac{3}{80}$,

$A = 0.014279$	$B = 0.575959$
$x_1 = -0.682753$	$A_1 = 0.190731$
$x_2 = -0.161469$	$A_2 = 0.488488$
$x_3 = 0.405626$	$A_3 = 0.812411$
$x_4 = 0.838596$	$A_4 = 1.059724$

Пусть $n = 5$. $\omega(x) = x^5 - \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}$.

$A = 0.008637$ $\quad B = 0.486199$

$x_1 = -0.769541$ $\quad A_1 = 0.117139$

$x_2 = -0.370814$ $\quad A_2 = 0.309853$

$x_3 = 0.110027$ $\quad A_3 = 0.542254$

$x_4 = 0.562906$ $\quad A_4 = 0.370102$

$x_5 = 0.884088$ $\quad A_5 = 0.916375$

Пусть $n = 6$. $\omega(x) = x^6 - \frac{3}{7}x^5 - \frac{15}{14}x^4 + \frac{15}{4}x^3 + \frac{15}{56}x^2 - \frac{3}{56}x - \frac{1}{112}$.

$A = 0.008637$ $\quad B = 0.420749$

$x_1 = -0.825326$ $\quad A_1 = 0.076907$

$x_2 = -0.513453$ $\quad A_2 = 0.207544$

$x_3 = -0.114422$ $\quad A_3 = 0.374688$

$x_4 = 0.302831$ $\quad A_4 = 0.549469$

$x_5 = 0.666169$ $\quad A_5 = 0.701664$

$x_6 = 0.912772$ $\quad A_6 = 0.804959$

Для остаточного члена справедлива формула

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,(x^2-1)\omega^2(x)\,dx.$$

4. Вычисление интеграла вида $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,f(x)\,dx$

В этом случае $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, и ортогональными являются многочлены Чебышева IV рода (см. [4, с. 84]), $S_n(x) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\arccos x}{\sin\frac{1}{2}\arccos x}$. Тогда $\widetilde{P}_n(x) = \frac{1}{2^n}S_n(x)$ и по формуле (5) получаем

$$\omega(x) = \frac{1}{2^{2+n}(n+1)(x^2-1)}\big((n+1)S_{n+2}(x) - S_{n+1}(x) - (n+2)S_n(x)\big). \qquad (13)$$

Аналогично предыдущему случаю для различных $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ получаются значения приведенные ниже.

Пусть $n = 1$. $\omega(x) = x + \frac{1}{4}$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $A = \frac{5\pi}{12}$, $B = \frac{\pi}{20}$, $A_1 = \frac{8\pi}{15}$,

Пусть $n = 2$. $\omega(x) = x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{7}}{6}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{7}}{6}$,

$A = 0.688794$ $\quad B = 0.056099$

$x_1 = -0.607625$ $\quad A_1 = 1.480401$

$x_2 = 0.274292$ $\quad A_2 = 0.688794$

Пусть $n = 3$. $\omega(x) = x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{1}{16}$.

$A = 0.706858$ $\quad B = 0.026179$

$x_1 = -0.760157$ $\quad A_1 = 1.246279$

$x_2 = -0.152829$ $\quad A_2 = 0.822279$

$x_3 = 0.537986$ $\quad A_3 = 0.339999$

Пусть $n = 4$. $\omega(x) = x^4 + \dfrac{2}{5}\,x^3 - \dfrac{3}{5}\,x^2 - \dfrac{3}{20}\,x + \dfrac{3}{80}$.

$A = 0.575958$	$B = 0.0142799$
$x_1 = -0.838596$	$A_1 = 1.059724$
$x_2 = -0.405625$	$A_2 = 0.812412$
$x_3 = 0.161469$	$A_3 = 0.488488$
$x_4 = 0.682753$	$A_4 = 0.190731$

Пусть $n = 5$. $\omega(x) = x^5 + \dfrac{5}{12}\,x^4 - \dfrac{5}{6}\,x^3 - \dfrac{1}{4}\,x^2 + \dfrac{1}{8}\,x + \dfrac{1}{64}$.

$A = 0.486199$	$B = 0.008631$
$x_1 = -0.884088$	$A_1 = 0.9163748$
$x_2 = -0.562906$	$A_2 = 0.7611406$
$x_3 = -0.110027$	$A_3 = 0.5422544$
$x_4 = 0.370814$	$A_4 = 0.309853$
$x_5 = 0.769541$	$A_5 = 0.1171396$

Пусть $n = 6$. $\omega(x) = x^6 + \dfrac{3}{7}\,x^5 - \dfrac{15}{14}\,x^4 - \dfrac{5}{14}\,x^3 + \dfrac{15}{56}\,x^2 + \dfrac{3}{56}\,x - \dfrac{1}{112}$.

$A = 0.4207493$	$B = 0.0056099$
$x_1 = -0.9127718$	$A_1 = 0.8049599$
$x_2 = -0.6661694$	$A_2 = 0.7016636$
$x_3 = -0.3028313$	$A_3 = 0.5494689$
$x_4 = 0.1144215$	$A_4 = 0.3746883$
$x_5 = 0.5134534$	$A_5 = 0.2075442$
$x_6 = 0.8253261$	$A_6 = 0.07690723$

Для остаточного члена справедлива формула

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,(x^2-1)\omega^2(x)\,dx, \quad -1 < \xi < 1.$$

Все построенные квадратные формулы проверяли на тестовых примерах и получили точные значения интегралов.

Замечание. Квадратурные формулы для интегралов при весовых функциях $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ докладывались на XIV и XV Международных научно-технических конференциях города Пенза в 2020–2021 годах и опубликованы в материалах этих конференций [7–8].

Литература

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы.—2-е изд.—М.: Физматлит, 2002.—598 с.
3. *Ильин В. П.* Численный анализ. Ч. 1.—Новосибирск, 2004.—334 с.
4. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011.—235 с.
5. *Марданов А. А.* Вычисление интегралов с особенностями и решение сингулярных интегральных уравнений.—Санкт-Петербург: Изд-во Петербург. ун-та, 2017.—104 с.

6. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.—М.: Наука, 1983.—382 с.
7. *Хубежты Ш. С., Нартикоев Н. Б.* Квадратурные формулы с наперед заданными узлами с весовой функцией $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ // Материалы XIV Междунар. науч.-техн. конф. (Пенза, 1–4 декабря, 2020).—2020.—С. 22–25.
8. *Хубежты Ш. С., Нартикоев Н. Б.* Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы с весовой функцией $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ // Материалы XV Международной научно-технической конференции (Пенза, 1–4 июня, 2021).—2021.—С. 98–102.

Статья поступила 12 ноября 2021 г.

Хубежты Шалва Соломонович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *профессор*
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46,
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: `shalva57@rambler.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 1, P. 131–140

QUADRATURE FORMULA OF THE HIGHEST ALGEBRAIC DEGREE OF ACCURACY CONTAINING PREDEFINED NODS

Khubezhty, Sh. S.[1,2]

[1] North Ossetian State University,
44–46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: `shalva57@rambler.ru`

Abstract. Approximate methods for calculating definite integrals are relevant to this day. Among them, the quadrature methods are the most popular as they enables one to calculate approximately the integral using a finite number of values of the integrable function. In addition, in many cases, less computational labor is required compared to other methods. Using Chebyshev polynomials of the first, second, third, and fourth kind corresponding to the weight functions $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, on the segment $[-1, 1]$, quadrature formulas are constructed with predefined nodes $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, and estimates of the remainder terms with degrees of accuracy $2n + 1$. In this case, a special place is occupied by the construction of orthogonal polynomials with respect to the weight $p(x)(x^2 - 1)$ and finding their roots. This problem turned out to be laborious and was solved by methods of computational mathematics.

Key words: weight functions, orthogonal polynomials, quadrature formulas, predetermined nodes, remainder terms, degrees of accuracy.

AMS Subject Classification: 65R10, 65R20.

For citation: *Khubezhty, Sh. S.* Quadrature Formula of the Highest Algebraic Degree of Accuracy Containing Predefined Nods, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 1, pp. 131–140 (in Russian). DOI: 10.46698/z4764-9590-5591-k.

References

1. *Krylov, V. I. Approximate Calculation of Integrals*, New York, Macmillan Co, 1962.
2. *Bakhvalov, N. S., Zhidkov, N. P. and Kobelkov, G. M. Chislennye metody* [Numerical Methods], 2nd ed., Moscow, Fizmatlit, 2002, 598 p. (in Russian).
3. *Il'in V. P. Chislennyy analiz. Ch. 1* [Numerical Analysis. Part 1], Novosibirsk, 2004, 334 p. (in Russian).
4. *Khubezhty, Sh. S. Kvadraturnye formuly dlja singuljarnyh integralov i nekotorye ih primenenija* [Quadrature Formulas for Singular Integrals and Some of their Applications], Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2011 (in Russian).
5. *Mardanov, A. A. Vychislenie integralov s osobennostjami i reshenie singuljarnyh integral'nyh uravnenij* [Calculation of Integrals with Singularities and Solution of Singular Integral Equations], St. Petersburg, Publ. House, 2017 (in Russian).
6. *Pashkovsky, S. Vychislitel'nye primeneniya mnogochlenov i ryadov Chebysheva* [Computational Applications of Polynomials and Chebyshev Series], Moscow, Nauka, 1983, 382 p. (in Russian).
7. *Khubezhty, Sh. S. and Nartikoev, N. B.* Quadrature Formulas with Predetermined Nodes with the Weight Function $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, *Proceedings of the XIV Intern. Sci.-Tech. Conf., Penza, December* 1–4, 2020, 2020, pp. 22–25 (in Russian).
8. *Khubezhty, Sh. S. and Nartikoev, N. B.* Quadrature Formulas Containing Predetermined Nodes with the Weight Function $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, *Proceedings of the XIV Intern. Sci.-Tech. Conf., Penza, December* 1–4, 2020, 2020, pp. 98–102 (in Russian).

Received November 12, 2021

Shalva S. Khubezhty
North Ossetian State University,
44–46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Professor;

Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher
E-mail: `shalva57@rambler.ru`