*Владикавказский математический журнал*
*2023, Том 25, Выпуск 1, С. 20–32*

**УДК** 517.98, 517.15, 511.42
**DOI** 10.46698/u2067-6110-4876-g

# УТОЧНЕННЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

**В. И. Войтицкий**[1,2], **А. С. Прудкий**[1]

[1] Институт экономики и управления АПК РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева,
Россия, 127434, Москва, ул. Тимирязевская, 49;
[2] Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов,
Россия, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, 3

E-mail: v.voytickiy@rgau-msha.ru, voytitskiy_vi@rudn.ru, prudkiy@rgau-msha.ru

**Аннотация.** В одномерных краевых спектральных задачах размерности собственных подпространств не превосходят некоторого известного числа (как правило 1 или 2). В многомерных самосопряженных задачах с дискретным спектром, несмотря на конечную размерность всех собственных подпространств последовательность кратностей может быть неограничена. Это верно даже для классических краевых задач, решающихся методом разделения переменных. В случае задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в прямоугольной области $\Omega = (0; a) \times (0; b)$ хорошо известна явная формула $\lambda_{km} = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$ для описания всех собственных значений (индексы $k, m$ принимают положительные или неотрицательные значения соответственно для задачи Дирихле или Неймана). Исследование кратностей сводится к подсчету числа различных упорядоченных пар $(k, m)$, соответствующих одному и тому же числу $\lambda_{km}$. На основе классических и новых результатов теории чисел и теории диофантовых приближений в работе изучаются вопросы взаимного расположения, кратностей и асимптотики собственных значений $\lambda_{km}$ в зависимости от параметров $a$ и $b$. В случае квадратной области ($a = b$) описан явный алгоритм подсчета кратности любого собственного значения, основанный на разложении натурального числа на простые сомножители и подсчете числа сомножителей вида $4k + 1$. Для прямоугольной области установлена зависимость распределения кратностей от того, являются ли числа $f := a/b$ и $f^2$ рациональными или нет. В случае $f, f^2 \notin \mathbb{Q}$ доказано, что все собственные значения однократные, но на сколь угодно близком расстоянии располагается бесконечно много пар собственных значений. На основе уточненной оценки остатка в проблеме круга Гаусса установлена асимптотическая формула Вейля с двумя первыми членами и квалифицированной оценкой остатка.

**Ключевые слова:** дискретный спектр, кратности собственных значений, простые числа, диофантовы приближения, степенная асимптотика, проблема круга Гаусса.

**AMS Subject Classification:** 47A10, 26A12, 11D09.

**Образец цитирования:** *Войтицкий В. И., Прудкий А. С.* Уточненные спектральные свойства задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в прямоугольной области // Владикавк. мат. журн.— 2023.—Т. 25, вып. 1.—С. 20–32. DOI: 10.46698/u2067-6110-4876-g.

## Введение

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона являются классическими хорошо изученными краевыми задачами математической физики, в частности, они описывают стационарное распределение тепла в данной области $\Omega$. Для многих типов областей и правых частей можно получить явное или приближенное решение в виде интегралов или рядов. В частности такое (обобщенное) решение можно представить в виде разложения правой части из $L_2(\Omega)$ в ряд Фурье по собственным функциям оператора задачи. В связи с этим представляет интерес изучение локализации, асимптотики и кратностей собственных значений этого оператора.

Итак, далее будут изучаться спектральные задачи

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in \Omega; \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & x \in \Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Для произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ данные задачи можно трактовать как задачи на собственные значения соответствующих самосопряженных неограниченных операторов $A_D$ или $A_N$, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ с энергетическими пространствами $H_{A_D} = \mathscr{D}(A_D^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$, $H_{A_N} = \mathscr{D}(A_N^{1/2}) = H^1(\Omega)$. Оператор $A_D$ является положительно определенным, оператор $A_N$ является неотрицательным. Компактность вложения пространств $H_{A_D}$ и $H_{A_N}$ в $L_2(\Omega)$ обеспечивает компактность резольвент операторов $A_D$ и $A_N$. При этом оператор $A_D^{-1}$ является компактным положительным, $A_N^{-1}$ не существует в виду того, что $0 \in \sigma_p(A_N)$. Отсюда, используя теорему Гильберта — Шмидта, приходим к обоснованию классической спектральной теоремы о том, что задачи Дирихле и Неймана имеют спектр, состоящий из изолированных конечнократных собственных значений $\lambda_k$ с предельной точкой $+\infty$, при этом из системы собственных функций $u_k(x)$ можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Отличие задач состоит в том, что все собственные значения задачи Дирихле положительные, а собственные значения задачи Неймана неотрицательные (число ноль является однократным собственным значением, которому отвечают собственные функции — константы).

Как известно алгебраическая и геометрическая кратности самосопряженных операторов совпадают и равны размерностям собственных подпространств. В одномерных спектральных задачах как правило все эти размерности равномерно ограничены и зачастую равны 1. Например, все собственные значения самосопряженной задачи Штурма — Лиувилля простые в случае распадающихся краевых условий и суммируемого потенциала. В случае потенциалов из пространств Соболева (в том числе потенциалов-распределений) кратности равномерно ограничены и асимптотически равны одному [1], в случае периодических или антипериодических краевых условий кратности не превышают двух [2, с. 28].

Во многих многомерных задачах математической физики все собственные подпространства конечномерные, но при этом последовательность кратностей может не быть равномерно ограниченной. В связи с этим возникает ряд вопросов, представляющих интерес для спектральной теории. Можно ли явно описать классы многомерных краевых задач, в которых последовательность кратностей нормальных собственных значений является равномерно ограниченной некоторым числом $N$ (задача A)? Какова зависимость проблемы кратностей от размерности области, коэффициентов дифференциального выражения, выбора краевых условий, гладкости и конфигурации границы (задача B)? Для любого ли натурального $d \in [1; N]$ существуют собственные подпространства размерности $d$ (задача C)? По каким наборам подмножеств $\{K \subset \mathbb{N}\}$ можно восстановить многомерную спектральную задачу, для которой каждый элемент из $K$ является размерностью некоторого собственного подпространства (задача D)?

В случае прямоугольной области $\Omega = (0; a) \times (0; b)$ спектральная задача изучается методом разделения переменных. Поиск собственных функций в виде $u_{km}(x, y) = X_k(x) \cdot$

$Y_m(y)$ (см., например, [3, с. 184]) приводит к тому, что задача Дирихле имеет собственные значения

$$\lambda_{km} = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2, \quad k, m \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

которым соответствуют собственные функции

$$u_{km}(x, y) = \sin\frac{\pi k x}{a}\,\sin\frac{\pi m y}{b}.$$

В задаче Неймана собственными значениями являются числа (2) при $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а собственные функции имеют вид

$$u_{km}(x, y) = \cos\frac{\pi k x}{a}\,\cos\frac{\pi m y}{b},$$

где косинусы равны тождественным единицам при нулевых индексах.

Явный вид собственных значений (2) позволяет исследовать сформулированные выше задачи A–D в классе прямоугольных областей. Данное исследование послужило толчком для написания данной статьи. Отметим, что в классе прямоугольных областей представляет интерес также исследование соотношений между сторонами, приводящее к минимизации $k$-го собственного значения [4]. Сформулированные задачи напрямую связаны с проблемой распределения целых точек внутри круга или эллипса (проблема Гаусса). Основываясь на асимптотике данного распределения можно доказать асимптотические формулы Вейля для числа собственных значений $N(\lambda)$ (с учетом кратности) в полуинтервале $[0; \lambda)$ (либо отрезке $[0; \lambda]$) с двумя главными членами и квалифицированной оценкой остатка в терминах $O$-большое.

Известно, что для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, допускающих разделение переменных [5, с. 33], либо для областей с достаточно гладкой границей, где биллиардный поток в $\Omega$ удовлетворяет условию непериодичности (см. [6], а также [7]), выполнена асимптотика

$$N(\lambda) = a_m|\Omega|\,\lambda^{m/2} \mp \frac{a_{m-1}|\partial\Omega|}{4}\,\lambda^{(m-1)/2} + o\big(\lambda^{(m-1)/2}\big), \quad \lambda \to +\infty, \tag{3}$$

где $a_m := (2\pi)^{-m} v_m$, $v_m$ — объем единичного шара в $m$-мерной области, $|\Omega|$ и $|\partial\Omega|$ — мера области и ее границы. При этом знак «минус» соответствует задаче Дирихле, а знак «плюс» — задаче Неймана. Используя результат М. Хаксли (M. Huxley) [8] об асимптотике числа целых точек внутри круга, в случае прямоугольной области $\Omega = (0; a) \times (0; b)$ формула (3) может быть уточнена, а именно

$$N(\lambda) = \frac{ab}{4\pi}\,\lambda \mp \frac{a+b}{2\pi}\,\lambda^{1/2} + O\big(\lambda^{131/416+\varepsilon}\big) \quad (\forall\, \varepsilon > 0,\ \lambda \to +\infty). \tag{4}$$

По-видимому, имеет место более точная оценка остаточного члена, но на сегодняшний день она не доказана. Известно, что она равна $O(\lambda^t)$, где $1/4 < t < 131/416 + \varepsilon$.

## 1. Размерности собственных подпространств в случае квадратной области

В случае квадрата $\Omega = (0; a) \times (0; a)$ собственные значения (2) имеют вид

$$\lambda_{km} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(k^2 + m^2\right), \tag{5}$$

где $k, m \in \mathbb{N}$ или $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в зависимости от того, рассматриваем ли мы задачу Дирихле или Неймана. Очевидно кратность каждого собственного значения не зависит от размеров квадрата, а зависит от числа способов представить натуральное число $n = (\lambda_{km} a^2)/\pi^2$ в виде суммы двух квадратов. Для простоты будем считать, что $a = \pi$, тогда все собственные значения являются целыми числами $n = \lambda_{km} = k^2 + m^2$. Явная формула для числа $r(n)$ всевозможных представлений натурального $n$ в виде суммы квадратов двух целых чисел (с учетом порядка), по-видимому, впервые получена К. Якоби в [9] (см. также [10]):

$$r(n) = 4 \sum_{2\,|(d+1),\, d|\, n} (-1)^{(d-1)/2}. \tag{6}$$

Суммирование здесь ведется по всевозможным нечетным делителям $d$ числа $n$. Будем обозначать кратность собственного значения $n$ задачи Дирихле или Неймана соответственно через $\nu_D(n)$ или $\nu_N(n)$, считая что эти функции равны нулю, если $n$ не является собственным значением. Для большинства натуральных чисел $n$ значения $\nu_D(n)$ и $\nu_N(n)$ совпадают. Например, с учетом того, что сумма квадратов не может давать остаток 3 при делении на 4 получаем, что $\nu_D(4k+3) = \nu_N(4k+3) = 0$. Согласно теореме Эйлера — Ферма (см., например, [11, с. 297]) каждое простое число вида $p = 4k+1$ раскладывается в сумму квадратов единственным образом (без учета порядка слагаемых), поэтому для таких простых чисел $\nu_D(p) = \nu_N(p) = 2$.

На основе формулы Якоби (6) можно явно описать алгоритм подсчета кратностей $\nu_D(n)$ и $\nu_N(n)$ для любого натурального числа $n$. Согласно основной теореме арифметики имеет место единственное разложение

$$n = 2^{\alpha} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_l^{\beta_l} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \dots q_t^{\gamma_t}, \tag{7}$$

где $p_i$ — простые числа вида $4k+1$, $q_i$ — простые числа вида $4k+3$, $\alpha, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Теорема 1.** *Обозначим* $B := (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_l + 1)$. *Справедливо правило*

$$\nu(n) = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы одно } \gamma_i \text{ нечетное;} \\ B, & \text{если все } \gamma_i \text{ и } B(\alpha+1) \text{ четные;} \\ B \mp 1, & \text{если все } \gamma_i \text{ четные, а } B(\alpha+1) \text{ нечетное,} \end{cases} \tag{8}$$

*где минус в последней строке соответствует* $\nu_D(n)$, *а плюс —* $\nu_N(n)$.

$\lhd$ В формуле Якоби (6) коэффициент 4 можно убрать, если считать, что мы ищем разложения $n = k^2 + m^2$, где $k > 0,\ m \geqslant 0$, так как такие разложения соответствуют четвертой части множества $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0;0)\}$.

В (6) под суммой стоит единица для каждого делителя вида $4k+1$, либо минус единица для каждого делителя вида $4k+3$. Таким образом, общая сумма равна нулю, если количества нечетных делителей обеих типов совпадают. Это происходит в случае, если хотя бы одно $\gamma_i$ нечетное. Действительно, всевозможные произведения чисел $p_i$ в различных степенях являются делителями вида $4k+1$, таких делителей ровно $B$. Каждый такой делитель при умножении на $q_i$ образует число вида $4k+3$, поэтому сумма (6) равна нулю, если в (7) есть ровно одно $q_i$ в первой степени. Аналогично сумма равна нулю, если есть несколько различных сомножителей $q_i$ в первой степени.

Далее, несложно заметить, что при домножении числа $n$ на $q_i^2$ разность между числом делителей вида $4k+1$ и $4k+3$ остается неизменной, так как каждому дополнительному делителю вида $4k+1$ соответствуют сомножители содержащие $q_i^2$, а каждому дополнительному делителю вида $4k+3$ — сомножители содержащие $q_i$ (без квадрата).

Отсюда следует, что сумма (6) равна нулю, если в разложении (7) хотя бы одно $\gamma_i$ является нечетным числом. Из приведенного доказательства также получаем, что количество разложений числа $n$ в сумму $k^2+m^2$, где $k>0$, $m\geqslant 0$, в случае, если все $\gamma_i$ — четные, равно числу $B$.

В задаче Дирихле разложение с нулевым слагаемым не допустимо. Оно реализуется, когда $n=k^2+0^2$, т. е. $n$ является точным квадратом. Это выполнено если $\alpha$ и все числа $\beta_i$ являются четными, т. е. когда нечетным является число $B(\alpha+1)$. Таким образом, в этом случае в задаче Дирихле число разложений равно $B-1$. В задаче Неймана в случае, когда $n$ является точным квадратом, нужно, наоборот, добавить одно дополнительное слагаемое, соответствующее $k=0$, $m>0$. Таким образом, число разложений равно $B+1$. $\triangleright$

**Следствие 1.** *Из доказанной теоремы следует, что в случае квадратной области для любого $d\in\mathbb{N}$ в спектре оператора Лапласа с условиями Дирихле или Неймана встречаются собственные значения кратности $d$* (*решены задачи* C *и* D). *Последовательность кратностей, очевидно, неограничена* (*данная задача не попадает в класс* A). *Отметим также, что размерность собственного подпространства* $2^d$ *реализуется на собственном значении $n$, равном произведению первых $d$ простых сомножителей вида* $4k+1$. *По-видимому, такое число $n$ является минимальным собственным значением, обладающим данным свойством. Этот факт верен для числа* 5 (*минимальное собственное значение кратности* 2), $65=5\cdot 13$ (*минимальное собственное значение кратности* 4), $1105=5\cdot 13\cdot 17$ (*минимальное собственное значение кратности* 8).

## 2. Размерности собственных подпространств в случае прямоугольной области

**2.1.** Рассмотрим сначала случай прямоугольной области $\Omega=(0;a)\times(0;b)$, когда

$$f:=\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}\in\mathbb{Q}, \tag{9}$$

где дробь $a_1/b_1$ несократима. Тогда $a=ta_1$, $b=tb_1$, где $t$ — наибольший общий делитель чисел $a$ и $b$. Согласно (2) имеем

$$\lambda_{km}=\left(\frac{\pi k}{ta_1}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{tb_1}\right)^2=\left(\frac{\pi}{ta_1b_1}\right)^2\bigl(b_1^2k^2+a_1^2m^2\bigr),$$

отсюда размерность собственного подпространства определяется числом решений диофантова уравнения

$$n=b_1^2k^2+a_1^2m^2 \tag{10}$$

в зависимости от натурального $n$. Мы вновь получили проблему разложений в сумму двух квадратов специального вида. Ясно, что число таких разложений $\nu'(n)$ не превосходит соответствующего значения $\nu(n)$ и в среднем кратные собственные значения встречаются реже. Несмотря на это для любого натурального числа $d$ можно подобрать $n$ такое, что уравнение (11) будет иметь ровно $d$ решений во множестве $\mathbb{N}$ или $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Действительно, если $k=a_1k_1$, $m=b_1m_1$, то

$$n=b_1^2a_1^2k_1^2+a_1^2b_1^2m_1^2=a_1^2b_1^2\bigl(k_1^2+m_1^2\bigr). \tag{11}$$

Согласно теореме 1 число решений уравнения $n_1=k_1^2+m_1^2$ равно $\nu(n_1)$, причем для любого $d$ можно подобрать $n_1$ так, что $\nu(n_1)=d$. С другой стороны, $\nu'(a_1^2b_1^2n_1)=\nu(n_1)=d$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, если стороны прямоугольника рационально соизмеримы, то кратные собственные значения встречаются среди чисел вида

$$\lambda_{km} = \left(\frac{\pi}{ta_1b_1}\right)^2 a_1^2b_1^2n_1 = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 n_1, \quad n_1 = k_1^2 + m_1^2,$$

где $\nu(n_1) > 1$, причем в спектре имеются собственные значения любой заданной кратности $d$ (этот случай аналогичен задаче в квадрате).

**2.2.** Пусть теперь $f = a/b \notin \mathbb{Q}$, но $f^2 \in \mathbb{Q}$. Тогда, считая дробь $f^2$ несократимой, приходим к разложению $a^2 = t_2a_2$, $b^2 = t_2b_2$, где $t_2$ является наибольшим общим делителем чисел $a^2$ и $b^2$. Согласно (2) имеем

$$\lambda_{km} = \frac{\pi^2k^2}{t_2a_2} + \frac{\pi^2m^2}{t_2b_2} = \frac{\pi^2}{t_2a_2b_2}\left(b_2k^2 + a_2m^2\right).$$

Размерность соответствующего собственного подпространства определяется в этом случае числом решений диофантова уравнения

$$n = b_2k^2 + a_2m^2 \tag{12}$$

в зависимости от натурального $n$.

В теории чисел имеется алгоритм (гауссова теория квадратичных форм), позволяющий для каждой пары натуральных чисел $a_2$, $b_2$ и заданного $n$ найти число решений уравнения (12). Согласно результатам этой теории (см., например, [11, гл. 31.2]) уравнение (12) не имеет решений в случае, если сравнение

$$B^2 \equiv \Delta \pmod{4n}$$

не имеет решений в промежутке $B \in [0; 2n)$, где $\Delta := -a_2b_2$. Согласно относительно недавним результатам теории чисел число решений уравнения (12) во множестве $\mathbb{Z}$ можно найти по формуле [10, с. 4]

$$r'(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dq^n}\sqrt{\sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{kb_2+ma_2=t} r(k)\,r(m)\right)q^t}\;\right]\Bigg|_{q=0},$$

где $r(k)$ находится по формуле Якоби (6) (вычисляется $n$-й коэффициент ряда Тейлора функции, стоящей под корнем). Автору неизвестно, следует ли из этой формулы неограниченность числа решений (12) при неограниченном росте $n$ для любых $a_2, b_2 \in \mathbb{N}$. Также, по-видимому, неизвестно всегда ли можно найти число $n$ такое, что во множестве $\mathbb{N}$ или $\mathbb{N} \cup \{0\}$ уравнение (12) имеет заданное число $d$ решений.

Для многих конкретных коэффициентов $a_2, b_2$ неограниченность числа решений (12) имеет место. Например, при $a_2 = 2$, $b_2 = 1$ ($f = \sqrt{2}$), имеем уравнение $n = k^2 + 2m^2$. Известно (см., например, [11, с. 298]), что это уравнение разрешимо в целых взаимно простых числах, если каноническое разложение $n$ не содержит простых делителей вида $8l+5$ и $8l+7$. Если число $n = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_s^{\beta_s}$, где все $p_i$ — простые вида $8l+1$ или $8l+3$, то число взаимно простых решений $k$, $m$ равно $2^{s+1}$. Отсюда в виду бесконечности простых чисел вида $8l+1$ или $8l+3$ (теорема Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях) получаем неограниченность кратностей собственных значений.

**2.3.** Рассмотрим, наконец, ситуацию $f = a/b \notin \mathbb{Q}$, $I := f^2 \notin \mathbb{Q}$. В этом случае все собственные значения являются однократными. Действительно, тогда $a^2 = Ib^2$,

$$\lambda_{km} = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 = \left(\frac{\pi^2}{Ib^2}\right)\left(k^2 + Im^2\right). \tag{13}$$

Предполагая противное, имеем $\lambda_{k_1m_1} = \lambda_{k_2m_2}$ при $(k_1, m_1) \neq (k_2, m_2)$. Отсюда $k_1^2 + Im_1^2 = k_2^2 + Im_2^2$,

$$I = \frac{k_1^2 - k_2^2}{m_2^2 - m_1^2} \in \mathbb{Q}. \tag{14}$$

Приходим к противоречию.

Несмотря на отсутствие кратных собственных значений, в спектре будут присутствовать собственные значения, находящиеся сколь угодно близко друг к другу. Для доказательства этого результата применим один тонкий результат теории диофантовых приближений [12, § 4, теорема 10].

**Лемма 1.** *Пусть $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ — иррациональное число и несократимая дробь $p/q$ удовлетворяет неравенству*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

*Тогда $p/q$ является подходящей или промежуточной дробью вида*

$$\frac{p}{q} = \frac{p_{n,r}}{q_{n,r}} := \frac{rp_{n+1} + p_n}{rq_{n+1} + q_n},$$

*где $r = 0, 1, \ldots, a_{n+2}$. Каждая из промежуточных дробей для $0 < r < a_{n+2}$ располагается строго между подходящими дробями $p_n/q_n$ и $p_{n+2}/q_{n+2}$. При $r = a_{n+2}$ имеем*

$$\frac{p_{n,r}}{q_{n,r}} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}.$$

**Теорема 2.** *Если $I := f^2 = a^2/b^2 \notin \mathbb{Q}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много различных пар $(k_1, m_1)$ и $(k_2, m_2)$, $k_1 \neq k_2$, $m_1 \neq m_2$ таких, что*

$$\left|\lambda_{k_1m_1} - \lambda_{k_2m_2}\right| < \varepsilon.$$

$\lhd$ Согласно (13) имеем

$$\left|\lambda_{k_1m_1} - \lambda_{k_2m_2}\right| = \left(\frac{\pi^2}{Ib^2}\right)\left|k_1^2 + Im_1^2 - k_2^2 - Im_2^2\right| < \varepsilon$$

как только $|k_1^2 - k_2^2 - I(m_2^2 - m_1^2)| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 := \varepsilon b^2 I/\pi^2$. В силу условия $m_1 \neq m_2$ это равносильно соотношению

$$\left|\frac{k_1^2 - k_2^2}{m_2^2 - m_1^2} - I\right| < \frac{\varepsilon_1}{m_2^2 - m_1^2}. \tag{15}$$

Разложим число $I$ в бесконечную цепную дробь $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ ($a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$). Тогда известно (см., например, [13, с. 21]), что для $n$-й подходящей (несократимой) дроби $p_n/q_n = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - I\right| < \frac{1}{q_n^2},$$

где числовые последовательности $p_n$ и $q_n$ неограниченно возрастают.

Несложно убедиться в том, что $p_n$ и $q_n$ представимы в виде разности двух квадратов натуральных чисел, если каждое из них является произведением либо двух четных либо двух нечетных различных чисел. Действительно, если $q_n = m_2^2 - m_1^2 = (m_2 - m_1)(m_2 + m_1) = st$, то $m_2 = (s+t)/2$, $m_1 = (t-s)/2$. Следовательно, $m_1$ и $m_2$ однозначно восстанавливаются по $s$ и $t$, если эти числа имеют одинаковую четность.

Допустим сначала, что среди подходящих дробей имеется бесконечно много пар нечетных чисел $p_n$, $q_n$ (каждое не менее 3). Пусть они образуют (возрастающие) подпоследовательности $p_{n_k}$, $q_{n_k}$. Каждая такая пара представляет собой разность квадратов натуральных чисел, так как каждое нечетное число $p \geqslant 3$ представимо в виде $p = [(p+1)/2]^2 - [(p-1)/2]^2$ (возможно, имеются и другие разложения). Неравенство (15) выполнено, если $1/q_{n_k} < \varepsilon_1 = \varepsilon b^2 I/\pi^2$. В силу неограниченности $q_{n_k}$ можно подобрать номер $K$ такой, что

$$q_{n_k} > \frac{\pi^2}{\varepsilon b^2 I}, \quad k \geqslant K.$$

Каждый такой номер $n_k$ порождает индексы $k_1 = (p_{n_k} + 1)/2$, $k_2 = (p_{n_k} - 1)/2$ и $m_1 = (q_{n_k} - 1)/2$, $m_2 = (q_{n_k} + 1)/2$, для которых $|\lambda_{k_1 m_1} - \lambda_{k_2 m_2}| < \varepsilon$. Очевидно, все указанные пары $(k_1, m_1)$ и $(k_2, m_2)$ различны.

Пусть теперь среди подходящих дробей нечетных пар $p_n$, $q_n$ конечное число. Тогда, начиная с некоторого номера $N$, каждая подходящая дробь равна отношению чисел разной четности. Известно (см., например, [11, с. 64]), что подходящие дроби удовлетворяют равенству

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как правая часть — нечетное число, то ровно одно из чисел $p_{n+1} q_n$ либо $p_n q_{n+1}$ является нечетным. Следовательно, при любом $n \geqslant N$ числа $p_n$ и $p_{n+1}$, а также $q_n$ и $q_{n+1}$ имеют различную четность. Значит промежуточная дробь

$$\frac{p_{n,1}}{q_{n,1}} = \frac{p_n + p_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}$$

является отношением двух нечетных чисел. В силу вышесказанного каждое из чисел $p_{n,1}$, $q_{n,1}$ представимо хотя бы одним способом в виде разности квадратов. Следовательно, в силу леммы 1 в этом случае получаем бесконечное число пар собственных значений, удовлетворяющих оценке $|\lambda_{k_1 m_1} - \lambda_{k_2 m_2}| < \varepsilon$. Они порождаются индексами $k_1 = (p_{n,1} + 1)/2$, $k_2 = (p_{n,1} - 1)/2$ и $m_1 = (q_{n,1} - 1)/2$, $m_2 = (q_{n,1} + 1)/2$, где $n \geqslant \max\{K_1, N\}$, $q_{n,1} > \frac{\pi^2}{\varepsilon b^2 I}$, $n \geqslant K_1$. $\rhd$

Замечание 1. В случае $f^2 = I \in \mathbb{Q}$ из разложения (14) следует, что существует бесконечно много пар $(k_1, m_1)$ и $(k_2, m_2)$, $k_1 \neq k_2$, $m_1 \neq m_2$ таких, что $\lambda_{k_1 m_1} = \lambda_{k_2 m_2}$, т. е. количество кратных собственных значений бесконечно. Действительно, это следует из того, что любое положительное рациональное число можно бесконечным числом способов представить в виде отношения разностей двух квадратов. Например, если $f^2 = p/q$, то для любого $d \geqslant 3$ равенство

$$f^2 = \frac{p 2^d}{q 2^d} = \frac{k_1^2 - k_2^2}{m_2^2 - m_1^2}$$

выполнено, например, для $k_1 = p2^{d-2} + 1$, $k_2 = p2^{d-2} - 1$, $m_1 = q2^{d-2} - 1$, $m_2 = q2^{d-2} + 1$. Так как различным числам $d$ соответствуют разные пары индексов, то количество кратных собственных значений бесконечно.

### 3. Уточненная асимптотика собственных значений оператора Лапласа

Докажем сейчас асимптотическую формулу (4).

В статье В. Новака (W. Nowak) [14] изучается асимптотика числа целых точек $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ (в том числе взаимно простых), лежащих внутри эллипса

$$Ak^2+Bkm+Cm^2\leqslant x,\quad A>0,\ \Delta:=B^2-4AC<0,$$

с ростом $x$. В частности, там сказано, что с учетом результатов статей [15–17] эта асимптотика (изученная для любых гладких выпуклых областей) описывается формулой

$$R(x)=\frac{2\pi}{\sqrt{-\Delta}}\,x+P(x),\quad P(x)\leqslant Cx^t, \tag{16}$$

где $1/4<t<131/416+\varepsilon$. Точное значение числа $t$ до сих пор не найдено, эта константа порождается асимптотикой числа целых точек внутри круга (такая асимптотика получается с использованием «методов решета» [18]). Нижняя оценка доказана Г. Харди и Э. Ландау (G. Hardy and E. Landau) в 1915 г. [19], наилучшая на сегодня верхняя оценка доказана М. Хаксли (M. Huxley) в 2003 г. [8].

Будем считать количество собственных значений на отрезке $[0;x]$, тогда

$$\lambda_{km}=\left(\frac{\pi k}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\leqslant x,\quad A=\frac{\pi^2}{a^2},\quad B=0,\quad C=\frac{\pi^2}{b^2},\quad \Delta=-\frac{4\pi^4}{a^2b^2}, \tag{17}$$

поэтому

$$R(x)=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^4}{a^2b^2}}}\,x+P(x)=\frac{abx}{\pi}+P(x).$$

Вычислим теперь количество точек внутри эллипса (17), которые лежат на координатных осях, т. е. при $k=0$ или $m=0$. Таких целых точек ровно

$$R_0(x)=1+2\left[\frac{a\sqrt{x}}{\pi}\right]+2\left[\frac{b\sqrt{x}}{\pi}\right],$$

где в квадратных скобках обозначена целая часть числа. Отсюда число точек внутри эллипса, соответствующих положительным $k$ и $m$ (задача Дирихле) вычисляется по формуле

$$R_D(x)=\frac{R(x)-R_0(x)}{4}=\frac{abx}{4\pi}-\frac12\left[\frac{a\sqrt{x}}{\pi}\right]-\frac12\left[\frac{b\sqrt{x}}{\pi}\right]+O\big(x^t\big)=\frac{abx}{4\pi}-\frac{(a+b)\sqrt{x}}{2\pi}+O\big(x^t\big).$$

Добавляя к этому выражению число точек на полуосях, приходим к числу точек внутри эллипса, соответствующих неотрицательным $k$ и $m$ (задача Неймана):

$$R_N(x)=R_D(x)+\left[\frac{a\sqrt{x}}{\pi}\right]+\left[\frac{b\sqrt{x}}{\pi}\right]+1=\frac{abx}{4\pi}+\frac{(a+b)\sqrt{x}}{2\pi}+O\big(x^t\big).$$

Заменяя $x$ на $\lambda$, приходим к асимптотике (4):

$$N(\lambda)=\frac{ab}{4\pi}\,\lambda\mp\frac{a+b}{2\pi}\,\lambda^{1/2}+O\big(\lambda^t\big),\quad \lambda\to+\infty.$$

Так как $N(\lambda_n)\sim n$ $(n\to\infty)$, то отсюда можно доказать асимптотику распределения собственных значений (с учетом кратности)

$$\lambda_n=\frac{4\pi}{ab}\,n\pm\frac{4\sqrt{\pi}\,(a+b)}{(ab)^{3/2}}\,\sqrt{n}+O\big(n^t\big),\quad n\to\infty, \tag{18}$$

где знак «плюс» соответствует задаче Дирихле, а знак «минус» — задаче Неймана.

Для иллюстрации точности этой формулы вычислим несколько собственных значений задачи Дирихле при $a = b = \pi$. Имеем $\lambda_{20} \approx 31.91$, фактически $\lambda_{20} = 32$, погрешность $|-0.09| < \sqrt[4]{20} \approx 2.11$; $\lambda_{60} \approx 87.57$, фактически $\lambda_{60} = 85$, погрешность $|2.57| < \sqrt[4]{60} \approx 2.78$; $\lambda_{180} \approx 248.59$, фактически $\lambda_{180} = 250$, погрешность $|-1.41| < \sqrt[4]{180} \approx 3.66$.

## Заключение

На основе сформулированных выше результатов получаем, что кратности собственных значений оператора Лапласа с условиями Дирихле или Неймана в прямоугольной области $\Omega = (0; a) \times (0; b)$ являются равномерно ограниченными (однократными), если $f^2 = a^2/b^2 \notin \mathbb{Q}$ (задача A, B). При этом, однако, существует бесконечно много пар собственных значений, находящихся на расстоянии менее данного числа $\varepsilon > 0$ (теорема 2). Если $f^2 \in \mathbb{Q}$, то существует бесконечно много кратных собственных значений. При дополнительном условии $f = a/b \in \mathbb{Q}$ кратности неограниченны, причем для любого натурального числа $d$ существует собственное подпространство размерности $d$ (задача C). Предполагая в качестве гипотезы (проверена на некоторых примерах), что это верно для всех $f^2 \in \mathbb{Q}$, приходим к тому, что в прямоугольной области реализуется одна из двух ситуаций — либо все собственные значения однократные, либо кратности могут быть равны любому натуральному числу (задача D).

В случае квадратной области описан явный алгоритм подсчета кратностей собственного значения $\lambda$, основанный на подсчете числа $B$ простых делителей вида $4k+1$ у числа $n = (\lambda a^2)/\pi^2$ (теорема 1, формула (8)). Этот алгоритм распространяется на подсчет кратностей части собственных значений задачи в прямоугольнике, когда $f \in \mathbb{Q}$.

На основе уточненной оценки остатка в проблеме круга Гаусса получена асимптотическая формула для считающей функции (4) (а также для собственных значений (18)), уточняющая известную асимптотику Вейля (3) в случае прямоугольной области.

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность проф. К. А. Мирзоеву за введение в данную проблематику и полезные советы. Результаты работы докладывались на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Москва, 26–30 декабря 2021 г.), посвященной памяти И. Г. Петровского [20].

## Литература

1. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* О собственных значениях оператора Штурма — Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева // Мат. заметки.—2006.—Т. 80, № 6.—С. 864–884. DOI: 10.4213/mzm3363.
2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака.—М.: Наука, 1988.—208 с.
3. *Пикулин В. П., Похожаев С. И.* Практический курс по уравнениям математической физики.—М.: МЦНМО, 2004.—208 с.
4. *Antunes P. R. S., Freitas P.* Optimal spectral rectangles and lattice ellipses // Proc. Royal Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.—2013.—Vol. 469. DOI: 10.1098/rspa.2012.0492.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ.—1977.—Т. 14.—С. 5–58.
6. *Ivrii V.* Sharp spectral asymptotics for operators with irregular coefficients. II. Domains with boundary and degeneration // Comm. Partial Differ. Equ.—2003.—Vol. 28, № 1–2.—P. 103–128. DOI: 10.1081/PDE-120019376.
7. *Сафаров Ю. Г., Филонов Н. Д.* Асимптотические оценки разности считающих функций задач Дирихле и Неймана // Функц. анализ и его прил.—2010.—Т. 44, № 4.—С. 54–64. DOI: 10.4213/faa3014.
8. *Huxley M. N.* Exponential sums and lattice points III // Proc. London Math. Soc.—2003.—Vol. 87, № 3.—P. 591–609. DOI: 10.1112/S0024611503014485.

9. *Jacobi C. G. J.* Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum.—Sumtibus fratrumBorntraeger, 1829.—207 p.
10. *Bagis N. D., Glasser M. L.* On the Number of Representation of Integers into Quadratic Forms.—2014.—arXiv: 1406.0466v5 [math.GM].
11. *Бухштаб А. А.* Теория чисел.—М.: Просвещение, 1960.—375 с.
12. *Ленг С.* Введение в теорию диофантовых приближений.—М.: Мир, 1970.—102 с.
13. *Шмидт В.* Диофантовы приближения.—М.: Мир, 1983.—232 с.
14. *Nowak W. G.* Primitive lattice points inside an ellipse // Czech. Math. J.—2005.—Vol. 55, № 2.—P. 519–530. DOI: 10.1007/s10587-005-0043-8.
15. *Bleher P.* On the distribution of the number of lattice points inside a family of convex ovals // Duke Math. J.—1992.—Vol. 67, № 3.—P. 461–481. DOI: 10.1215/S0012-7094-92-06718-4.
16. *Nowak W. G.* On the mean lattice point discrepancy of a convex disc // Arch. Math. (Basel).—2002.—Vol. 78, № 3.—P. 241–248. DOI: 10.1007/s00013-002-8242-0.
17. *Krätzel E.* Lattice points in planar convex domains // Monatsh. Math.—2004.—Vol. 143, № 2.—P. 145–162. DOI: 10.1007/s00605-003-0146-y.
18. *Хооли К.* Применение методов решета в теории чисел.—М.: Наука, 1987.—136 с.
19. *Hardy G. H.* On the expression of a number as the sum of two square // Quarterly J. Math.—1915.—Vol. 46.—P. 263–283.
20. *Войтицкий В. И.* О кратностях и асимптотике собственных значений задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа в прямоугольнике // Междунар. конф., посвященная выдающемуся математику И. Г. Петровскому (24-е совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тез. докл.—М.: Изд-во МГУ, 2021.—С. 195–197.


*Статья поступила 21 января 2022 г.*


Войтицкий Виктор Иванович
Институт экономики и управления АПК РГАУ-МСХА
им. К. А. Тимирязева, *доцент*
РОССИЯ, 127550, Москва, ул. Тимирязевская, 49;
Математический институт им. С. М. Никольского,
Российский университет дружбы народов, *доцент*
РОССИЯ, 115419, Москва, ул. Орджоникидзе, 3
E-mail: v.voytickiy@rgau-msha.ru, voytitskiy_vi@rudn.ru

Прудкий Александр Сергеевич
Института экономики и управления АПК РГАУ-МСХА
им. К. А. Тимирязева, *и. о. заведующего кафедрой, доцент*
РОССИЯ, 127550, Москва, ул. Тимирязевская, 49
E-mail: prudkiy@rgau-msha.ru


*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2023, Volume 25, Issue 1, P. 20–32*

# REFINED SPECTRAL PROPERTIES OF DIRICHLET AND NEUMANN PROBLEMS FOR THE LAPLACE OPERATOR IN A RECTANGULAR DOMAIN


Voytitsky, V. I.[1,2] and Prudkii, A. S.[1]

[1] Institute of Economics and Management in Agribusiness RSAU — MTAA,
49 Timiryazevskaya St., Moscow 127550, Russia;
[2] Mathematical institute of S. M. Nikolsky, Russian University of People Friendship,
3 Ordzhonikidze St., Moscow 115419, Russia

E-mail: v.voytickiy@rgau-msha.ru, voytitskiy_vi@rudn.ru, prudkiy@rgau-msha.ru


**Abstract.** In one-dimensional boundary value spectral problems the dimensions of eigen-subspaces are not greater than some known number (as a rule 1 or 2). In multidimensional self-adjoint problems with a discrete spectrum the sequence of multiplicities can be unbound despite the finite dimensions of all eigen-subspaces. It is realized even for classical boundary value problems solved by the method of separation of variables. In the case of Dirichlet or Neumann problems for the Laplace operator given in a rectangular domain $\Omega = (0; a) \times (0; b)$ the formula $\lambda_{km} = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2$ for eigenvalues is well known (indexes $k, m$ are correspondingly positive or nonnegative integers for Dirichlet or Neumann problem). The problem of multiplicities reduces to counting the number of ordered pairs $(k, m)$ which determine the same number $\lambda_{km}$. Using classical and new results of number theory and the theory of diophantine approximations we study problems of relative arrangement, multiplicities and asymptotic behavior of eigenvalues $\lambda_{km}$ depending on parameters $a$ and $b$. In the case of square domain ($a = b$) we formulate explicit algorithm for counting the multiplicities of eigenvalues based on decomposition of a natural number into prime factors and counting devisors of the form $4k + 1$. For a rectangular domains we establish relationship between the distribution of multiplicities and rationality of numbers $f := a/b$ and $f^2$. For the case $f, f^2 \notin \mathbb{Q}$ we prove that all eigenvalues are simple but infinitely many pairs of them are located at an arbitrarily close distance. Using the refined estimation of the remainder in the Gauss circle problem we establish Weyl's asymptotic formula with the first two members and qualified assessment of residual member.

**Key words:** discrete spectrum, multiplicities of eigenvalues, prime numbers, diophantine approximations, power asymptotic, Gauss circle problem.

**AMS Subject Classification:** 47A10, 26A12, 11D09.

**For citation:** *Voytitsky, V. I. and Prudkii, A. S.* Refined Spectral Properties of Dirichlet and Neumann Problems for the Laplace Operator in a Rectangular Domain, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 1, pp. 20–32 (in Russian). DOI: 10.46698/u2067-6110-4876-g.

## References

1. *Savchuk, A. M. and Shkalikov, A. A.* On the Eigenvalues of the Sturm–Liouville Operator with Potentials from Sobolev Spaces, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 80, no. 6, pp. 814–832. DOI: 10.1007/s11006-006-0204-6.
2. *Levitan, B. M. and Sargsyan, I. S. Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka* [Sturm–Liouville and Dirac Operators], Moscow, Nauka, 1988, 208 p. (in Russian).
3. *Pikulin, V. P. and Pohozhaev, S. I. Prakticheskiy kurs po uravneniyam matematicheskoy fiziki* [Equations in Mathematical Physics: A Practical Course], Moscow, MCCME, 2004, 208 p. (in Russian).
4. *Antunes, P. R. S. and Freitas, P.* Optimal Spectral Rectangles and Lattice Ellipses, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2013, vol. 469. DOI: 10.1098/rspa.2012.0492.
5. *Birman, M. Sh. and Solomyak, M. Z.* Asymptotic Properties of the Spectrum of Differential Equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1979, vol. 12, no. 3, pp. 247–283. DOI: 10.1007/BF01098368.
6. *Ivrii, V.* Sharp Spectral Asymptotics for Operators with Irregular Coefficients. II. Domains with Boundary and Degeneration, *Communications in Partial Differential Equations*, 2003, vol. 28, no. 1–2, pp. 103–128. DOI: 10.1081/PDE-120019376.
7. *Safarov, Yu. G. and Filonov, N. D.* Asymptotic Estimates of the Difference Between the Dirichlet and Neumann Counting Functions, *Functional Analysis and its Applications*, 2010, vol. 44, no. 4, pp. 286–294. DOI: 10.1007/s10688-010-0039-5.
8. *Huxley, M. N.* Exponential Sums and Lattice Points III, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2003, vol. 87, no. 3, pp. 591–609. DOI: 10.1112/S0024611503014485.
9. *Jacobi, C. G. J. Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*, Sumtibus fratrumBorntraeger, 1829.
10. *Bagis, N. D. and Glasser, M. L. On the Number of Representation of Integers into Quadratic Forms*, 2014, arXiv:1406.0466v5 [math.GM].
11. *Bukhshtab, A. A. Teoriya chisel* [The Number Theory], Moscow, Prosveshchenie, 1960. (in Russian).
12. *Leng, S. Vvedenie v Teoriyu Diofantovykh Priblizheniy* [Introduction to the Theory of Diophantine Approximations], Moscow, Mir, 1970, 102 p. (in Russian).
13. *Shmidt, V. Diofantovy priblizheniya* [Diophantine Approximations], Moscow, Mir, 1983. (in Russian).
14. *Nowak, W. G.* Primitive Lattice Points Inside an Ellipse, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 2005, vol. 55, no. 2, pp. 519–530. DOI: 10.1007/s10587-005-0043-8.
15. *Bleher, P.* On the Distribution of the Number of Lattice Points Inside a Family of Convex Ovals, *Duke Mathematical Journal*, 1992, vol. 67, no. 3, pp. 461–481. DOI: 10.1215/S0012-7094-92-06718-4.
16. *Nowak, W. G.* On the Mean Lattice Point Discrepancy of a Convex Disc, *Archiv der Mathematik*, 2002, vol. 78, no. 3, pp. 241–248. DOI: 10.1007/s00013-002-8242-0.

17. *Krätzel, E.* Lattice Points in Planar Convex Domains, *Monatshefte für Mathematik*, 2004, vol. 143, no. 2, pp. 145–162. DOI: 10.1007/s00605-003-0146-y.
18. *Hooley, C. Applications of Sieve of Methods to the Theory of Numbers*, London, Cambridge University Press, 1976, 136 p.
19. *Hardy, G. H.* On the Expression of a Number as the Sum of Two Squares, *Quarterly Journal of Mathematics*, 1915, vol. 46, pp. 263–283.
20. *Voytitsky, V. I.* On Multiplicities and Asymptotic of Eigenvalues for Dirichlet and Neumann Problems for the Laplace Operator in a Rectangle, *International Conference Dedicated to I. G. Petrovskiy: Book of Abstracts*, Moscow, MSU, 2021, pp. 195–197 (in Russian).

*Received January 21, 2022*

Victor I. Voytitsky
Institute of Economics and Management in Agribusiness RSAU — MTAA,
49 Timiryazevskaya St., Moscow 127434, Russia,
*Associate Professor*;

Mathematical institute of S. M. Nikolsky, Russian University of People Friendship,
3 Ordzhonikidze St., Moscow 115419, Russia,
*Associate Professor*
E-mail: v.voytickiy@rgau-msha.ru, voytitskiy_vi@rudn.ru

Aleksandr S. Prudkii
Institute of Economics and Management in Agribusiness RSAU — MTAA,
49 Timiryazevskaya St., Moscow 127434, Russia,
*Acting Head of the Department, Associate Professor*
E-mail: prudkiy@rgau-msha.ru