

УДК 519.642

DOI 10.46698/s7895-5601-5395-f

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО  
УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Х. Геббай<sup>1</sup>, М. Гиат<sup>1</sup>, В. Мерчела<sup>2,3</sup>, С. Сегни<sup>1</sup>, Е. В. Степаненко<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Лаборатория прикладной математики и моделирования,  
Университет Гельмы — 8 мая 1945 г., Алжир, 24000, Гельма, ВР. 401;

<sup>2</sup>Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина,  
Россия, 392000, Тамбов, ул. Интернациональная, 33;

<sup>3</sup>Университет Мюстафа Стамбули, Алжир, 29000, Маскара, ВР. 305;

<sup>4</sup>Тамбовский государственный технический университет,  
Россия, 392000, Тамбов, ул. Советская, 106

E-mail: guebaihamza@yahoo.fr, guebbai.hamza@univ-guelma.dz;

mourad.ghi24@gmail.com, ghiat.mourad@univ-guelma.dz;

merchela.wassim@gmail.com; segnianis@gmail.com,

signi.sami@univ-guelma.dz; Stepanenko.ei@yandex.ru

**Аннотация.** Статья посвящена численному решению нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Рассматриваемое уравнение имеет специальное ядро в том смысле, что представляет собой произведения двух частей: слабо сингулярной части, не зависящей от решения, и нелинейной дифференцируемой по Фреше части, зависящей от решения. Приближенное решение, предложенное в статье, определяется как итерационная последовательность типа Ньютона — Канторовича. При этом используются три численных метода: метод Ньютона — Канторовича для линеаризации задачи, метод регуляризации с конволюцией и разложением в ряд Фурье. Это необходимо, чтобы получить конечную последовательность, и «Nat functions projection» для работы с нелинейным членом, возникающим в конструкции Ньютона — Канторовича. Доказано, что такая специальная последовательность типа Ньютона — Канторовича сходится к точному решению. Кроме того, приведен численный пример, демонстрирующий практическую эффективность численного метода и подтверждающий точность теоретических результатов.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение Фредгольма, нелинейное уравнение, метод типа Ньютона, производная Фреше, слабая сингулярность.

**AMS Subject Classification:** 45B05, 45E10, 65J10, 65R20, 35P05.

**Образец цитирования:** Геббай Х., Гиат М., Мерчела В., Сегни С., Степаненко Е. В. Приближенное решение нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода // Владикавк. мат. журн.— 2023.—Т. 25, вып. 1.—С. 33–47. DOI: 10.46698/s7895-5601-5395-f.

## 1. Введение

При решении задач математического моделирования физических явлений с четко определенными граничными условиями, таких как перенос излучения [1], управляемый специальной функцией, известной под названием интегральная экспонента и обозначаемой  $E_1(\cdot)$ , одним из часто используемых понятий является понятие слабой сингулярности. Интегральная экспонента является одним из лучших примеров для полного понимания понятия слабой сингулярности. Являясь положительной функцией, интегральная

экспонента позволяет оценить значения следующим образом:

$$E_1(0^+) = +\infty \quad (\forall a \in \mathbb{R}^+); \quad \int_0^a E_1(t) dt < +\infty.$$

Рассмотрим численное решение нелинейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, имеющего слабо сингулярное ядро. Это уравнение является обобщением линейного случая, подробно описанного в [2–7, 8, 9, 10, 11]. Так, в [12–15] рассматривается

$$f(x) = \int_0^1 s(|x-y|) R[f](y) dy + g(x) \quad (\forall x \in [0, 1]), \quad (1)$$

где  $R[\cdot]$  — нелинейная Фреше функция, дифференцируемая на открытом множестве  $\Omega$  в  $L^1([0, 1], \mathbb{C})$ ,  $g \in L^1([0, 1], \mathbb{C})$  и  $s$  является слабо сингулярной функцией, т. е.  $s(0^+) = +\infty$ .

Класс интегральных уравнений представляет большой математический интерес благодаря различным приложениям в физике, технике и биологии [16]. Потому что она эквивалентна задаче нелинейных дифференциальных уравнений с краевыми условиями (см. [17, 18]). Это связано с возможностью применения теории неподвижной точки и метода Ньютона — Канторовича для нахождения локально единственного решения, т. е. такое решение существует и единственно в шаре с центром в заданной точке пространства, но мы не можем гарантировать отсутствие другого решения вне этого шара (см. [19]).

Отдельное направление в данной области посвящено изучению существования и единственности решений тех уравнений, которые вообще приводят к локальному существованию [14, 20, 21]. С другой стороны, работа, представленная в этой статье, относится к численному анализу, предназначенному для аппроксимации решения, которое предполагается существующим и единственным в открытом множестве из  $L^1([0, 1], \mathbb{C})$ . Это направление представляет большой математический интерес благодаря разработке новых и более эффективных методов: А. Альтюрк (A. Alturk) [22] использует теорему о промежуточном значении для преобразования интегрального уравнения в нелинейную систему уравнений, а затем — метод линеаризации для получения его решения. Д. А. Хаммад и др. (Hammad et al.) [23] используют кубические сплайны для дискретизации этого уравнения, в отличие от К. Малекнежад и др. (K. Maleknejad et al.) [24], которые использовали вейвлеты для получения другой формы нелинейной системы. В [21] этот подход описан как дискретизация/линеаризация, что не так эффективно, как линеаризация/дискретизация. Предлагаемый в данной работе метод является методом линеаризации/дискретизации, поскольку начинается с построения последовательности типа Ньютона, которая представляет собой линеаризацию рассматриваемой задачи. Эту последовательность невозможно вычислить численно, поэтому предлагается использовать метод свертки и рядов Фурье, описанные в [9]. Метод дискретизации был разработан для линейных интегральных уравнений Фредгольма, он позволяет переходить от одной итерации к другой для вычисления членов рассматриваемой последовательности Ньютона. Это означает, что данная работа позволяет адаптировать метод свертки и рядов Фурье для обработки нелинейных интегральных уравнений методом Ньютона — Канторовича. Другими словами, данная работа позволяет адаптировать метод Ньютона — Канторовича к трактовке слабосингулярных ядер методом свертки и рядов Фурье.

Очевидно, что сложность численного решения заключается в двух моментах. С одной стороны — это нелинейность. В этом случае применимы методы приближения Ньютона — Канторовича [19] в отличие от сингулярности, которую сложно преодолеть из-за пространства  $L^1([0, 1], \mathbb{C})$ , в котором необходимо найти решение.

Математические исследования очень заинтересованы в численной обработке этого слабо сингулярного класса ядра [2, 3, 5–7, 9–11, 25–27]. Но авторы остановили свой выбор на методе регуляризации сверткой с последующим разложением в ряд Фурье [5–7, 27], потому что он предлагает наилучшее приближение линейного оператора, полученного из производной Фреше в последовательности Ньютона — Канторовича.

С другой стороны, нелинейный член нашей последовательности Ньютона — Канторовича будет приближаться более классическим и достаточно эффективным способом — как “hat function projection” [4, 10, 28].

Применение этих трех методов приводит к построению последовательности Ньютона — Канторовича конечного ранга, которая легко программируется и обрабатывается машиной. Покажем, что эта последовательность (укажите, как сходится последовательность — абсолютно, условно, равномерно, неравномерно) сходится и дает хорошее приближение решения.

## 2. Постановка задачи

Пусть  $X = L^1([0, 1], \mathbb{C})$  — банахово пространство функций с интегрируемым модулем на  $[0, 1]$ . Пространство  $X$  имеет следующую норму:

$$\|\varphi\|_X = \int_0^1 |\varphi(x)| dx \quad (\forall \varphi \in X).$$

На этом пространстве определим пространство ограниченных эндоморфизмов на  $X$ , обозначим его через  $BL(X)$ , которое имеет норму

$$\|A\| = \sup \{ \|A\varphi\|_X : \|\varphi\|_X = 1 \} \quad (\forall A \in BL(X)).$$

Рассмотрим задачу (1), где  $g \in X$  и  $s$  является слабо сингулярной частью (см. [5–7, 9]) такой, что

$$(A_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad s \in L^1([0, 1], \mathbb{R}); \\ (2) \quad s \text{ убывает и положительна}; \\ (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) = +\infty; \\ (4) \quad (\exists C > 0) (\exists \gamma > 0) (\forall \varepsilon > 0) \int_0^\varepsilon s(y) dy \leq C\varepsilon^\gamma \end{array} \right\}.$$

Эти ограничения слабее, чем требуется в [2, 10] и  $R$ -регулярной части, такие, что существует открытое множество  $\Omega \neq \emptyset$  в  $X$  такое, что  $R$  — нелинейная Фреше функция на  $\Omega$  [9], т. е.

$$R'[\varphi]x \in X \quad (\forall \varphi \in \Omega, \forall x \in X),$$

и предположим что функция  $R'$  является  $l$ -липшицевой, т. е.

$$(\exists l > 0) (\forall \varphi, \psi \in \Omega) \quad \|R'[\varphi] - R'[\psi]\| \leq l\|\varphi - \psi\|.$$

Это уравнение является нелинейным случаем уравнения, изученного Х. Геббай (Guebbai et al.) [6, 9].

Построим приближенное решение уравнение (1). Собственно построение разобьем на два этапа.

Сначала построим последовательность типа Ньютона — Канторовича, для которой определим необходимое условие ее сходимости. Затем воспользуемся методом свертки и разложения в ряд Фурье, чтобы получить возможность запрограммировать полученную последовательность.

Для удобства понимания сформулируем задачу следующим образом:

Найти  $f \in X$ ,  $S(f) = 0_X$ , где

$$S(f)(x) = f(x) - \int_0^1 s(|x-y|) R[f](y) dy - g(x) \quad (\forall x \in [0, 1]).$$

**Предложение 1.**  $S$  является производной Фреше, причем

$$S'(\varphi)\psi(x) = \psi(x) - \int_0^1 s(|x-y|) R'[\varphi]\psi(y) dy \quad (\forall \varphi \in X, \forall \psi \in X).$$

Кроме этого, функция  $S'$  является  $L$ -липшицевым на  $\Omega$ .

◁ Для любых  $\varphi \in \Omega$  и  $\psi \in X$

$$R[\varphi + \psi] - R[\psi] = R'[\varphi]\psi + o(\psi).$$

Тогда для любого  $x \in [0, 1]$  получим

$$\begin{aligned} S(\varphi + \psi) - S(\varphi) &= \psi(x) - \int_0^1 s(|x-y|) (R[\varphi + \psi](y) - R[\varphi](y)) dy \\ &= \psi(x) - \int_0^1 s(|x-y|) R'[\varphi]\psi(y) dy + o(\psi). \end{aligned}$$

Т. е.  $S$  является производной Фреше на  $\Omega$ . Тогда при любых  $\varphi \in \Omega$ ,  $\psi \in X$  и  $x \in [0, 1]$  получим, что

$$S'(\varphi)\psi(x) = \psi(x) - \int_0^1 s(|x-y|) R'[\varphi]\psi(y) dy.$$

Чтобы доказать, что  $S'$  является  $L$ -липшицевым на  $\Omega$ , достаточно взять  $L = \max_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 s(|x-y|) dx$ . ▷

Таким образом, данное уравнение рассматривается при следующих условиях:

Предполагается, что существует  $\Omega$  открытое множество из  $X$ , в котором уравнение (1) имеет единственное решение  $f^\infty \in X$ , т. е.

$$S(f^\infty) = 0_X.$$

Это единственное решение предполагается проверить

$$(A_2) : \|S'(f^\infty)^{-1}\| = d > 0.$$

### 3. Последовательность Ньютона — Канторовича

Сформулируем и докажем достаточное условие для следующей известной последовательности Ньютона — Канторовича [19]:

$$f^0 \in \Omega, \\ f^{k+1} = f^k - [S'(f^k)]^{-1} S(f^k).$$

**Теорема 1.** Для любой  $f^0 \in \Omega$  такой, что  $\|f^0 - f^\infty\|_X \leq (2Ld)^{-1}$ , существует  $C_1 > 0$  такое, что для любого  $k \geq 0$

$$\|f^{k+1} - f^\infty\|_X \leq C_1 \|f^k - f^\infty\|_X^2.$$

◁ Пусть функция  $f \in \Omega$  такая, что  $\|f - f^\infty\|_X \leq (Ld)^{-1}$ . Тогда

$$S'(f) = S'(f^\infty) + S'(f) - S'(f^\infty) = S'(f^\infty) \left\{ I - [S'(f^\infty)]^{-1} (S'(f^\infty) - S'(f)) \right\},$$

но  $[S'(f^\infty)]^{-1} (S'(f^\infty) - S'(f)) \leq dL \|f^\infty - f\|_X \leq 1$ .

Тогда по теореме Неймана получим существование  $[S'(f)]^{-1}$ , причем  $\|S'(f)^{-1}\| \leq 2d$ . Пусть  $k \geq 0$ . Предположим, что  $\|f^k - f^\infty\|_X \leq (2dL)^{-1}$ . Тогда

$$\|f^{k+1} - f^\infty\|_X = \left\| f^k - f^\infty - [S'(f^k)]^{-1} \{ S(f^k) - S(f^\infty) \} \right\| \\ \leq \left\| f^k - f^\infty - [S'(f^k)]^{-1} S'(f^\infty) \{ f^k - f^\infty \} \right\|_X + O(\|f^k - f^\infty\|_X^2),$$

но

$$[S'(f^k)]^{-1} S'(f^\infty) = I + [S'(f^k)]^{-1} \times [S'(f^\infty) - S'(f^k)].$$

Получим

$$\|f^{k+1} - f^\infty\|_X \leq \left\| -[S'(f^k)]^{-1} [S'(f^\infty) - S'(f^k)] (f^k - f^\infty) \right\|_X + O(\|f^k - f^\infty\|_X^2) \\ \leq 2dL \|f^k - f^\infty\|_X^2 + O(\|f^k - f^\infty\|_X^2). \triangleright$$

**Следствие 1.** Если  $\|f^0 - f^\infty\|_X < \min(C_1^{-1}, (2dL)^{-1})$ , то для любого  $k \geq 0$

$$\|f^k - f^\infty\|_X \leq C_1^{-1} \left( C_1 \|f^0 - f^\infty\|_X \right)_{k \rightarrow +\infty}^{2k} \rightarrow 0.$$

◁ Доказательство очевидно. ▷

### 4. Последовательность Ньютона — Канторовича конечного ряда

Рассмотрим последовательность типа Ньютона — Канторовича, для которой существует приближенное численное решение в отличие от последовательности, описанной в предыдущем разделе, которая остается теоретическим инструментом, неприменимым на практике.

Чтобы определить новую последовательность, нужно построить два приближения. В первую очередь используем метод регуляризации свертки и ряды Фурье для построения оператора конечного ранга  $S'_N(\cdot)$ ,  $N \geq 1$ , который в норме сходится к  $S'(\cdot)$ .

Во-вторых, основываясь на предположении регулярности для  $R[\cdot]$ , построим  $S_M(\cdot)$ ,  $M \geq 1$ , одно приближение для  $S(\cdot)$  методом «интеграции продукта».

**4.1. Построения  $S'_N(\cdot)$ .** Пусть  $m \geq 2$  и  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — регуляризирующая функция, имеет вид:

- (1)  $\rho(x) = 0 \quad (\forall x \in ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[)$ ;
- (2)  $\rho(-x) = \rho(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ ;
- (3)  $\int_{-1}^1 \rho(y) dy = 1$ ;
- (4)  $\rho(x) \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ ;
- (5)  $\rho \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Расширим функцию  $s$  на  $\mathbb{R}$  для любого  $x \in [1, 2]$ ,  $s(x) = s(2-x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ ,  $s(x+2k) = s(x)$  для любого  $k \in \mathbb{Z}$ , т. е.  $s$  стала четной и 2-периодической функцией на  $\mathbb{R}$ .

Для  $N \geq 2$  и  $f \in \Omega$  определим следующий интегральный оператор:

$$S'_N(f)\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2} a_0 \int_0^1 \varphi(y) dy - \sum_{j=1}^N a_j \cos(j\pi x) \int_0^1 \cos(j\pi y) R'[f]\varphi(y) dy \\ - \sum_{j=1}^N a_j \sin(j\pi x) \int_0^1 \sin(j\pi y) R'[f]\varphi(y) dy \quad (\forall \varphi \in X, \forall x \in [0, 1]),$$

где для любого  $0 \leq j \leq N$

$$a_j = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho(y) s\left(\left|x - N^{-\frac{m}{m+\gamma}} y\right|\right) \cos(j\pi x) dy dx.$$

Подробнее см. [5–7, 9].

**Теорема 2.** Для любого сколь угодно большого  $N$  и любой  $f \in \Omega$

$$\|S'(f) - S'_N(f)\| \leq \|R'[f]\| \left( 2^{3-\gamma} C \sup_{-1 \leq x \leq 1} \rho(x) + 2\kappa_m \|\rho^{(m)}\|_{L^1([-1,1], \mathbb{R})} \|s\|_{L^1([0,1], \mathbb{R})} (3 + \ln N) \right) N^{-\gamma \frac{m}{m+\gamma}},$$

где  $\kappa_m = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+m+j}}{(2j+1)^{m+1}}$  является постоянной Фаваре.

◁ Для  $\epsilon = N^{-\frac{m}{m+\gamma}}$  определим оператор

$$S'_\epsilon(f)\varphi(x) = \varphi(x) - \int_0^1 s_\epsilon(x-y) R'[f]\varphi(y) dy \quad (\forall \varphi \in X, \forall x \in [0, 1]),$$

где

$$s_\epsilon(x) = \int_{-1}^1 \rho(y) s\left(\left|x - N^{-\frac{m}{m+\gamma}} y\right|\right) dy \quad (\forall x \in [0, 1]).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \|S'(f) - S'_N(f)\| &\leq \|S'(f) - S'_\epsilon(f)\| + \|S'_\epsilon(f) - S'_N(f)\|, \\ \|S'(f) - S'_\epsilon(f)\| &\leq 2\|R'[f]\| \|s - s_\epsilon\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})}, \\ \|S'_\epsilon(f) - S'_N(f)\| &\leq 2\|R'[f]\| \|s_\epsilon - s_N\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству теоремы 2 из [9] получим

$$\|s - s_\epsilon\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})} \leq 2^{2-\gamma} C \sup_{-1 \leq x \leq 1} \rho(x) N^{-\frac{m\gamma}{m+\gamma}}.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 из [9] получим

$$\|s_\epsilon - s_N\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})} \leq \kappa_m \|\rho^{(m)}\|_{L^1([-1,1],\mathbb{R})} \|s\|_{L^1([0,1],\mathbb{R})} (3 + \ln N) N^{-\gamma \frac{m}{m+\gamma}}. \triangleright$$

Предыдущая теорема позволяет построить приближение  $S'_N(f^k)$ , сходящееся по норме к  $S'(f^k)$ , которое удобно использовать для доказательства сходимости предлагаемого метода. Кроме этого,  $S'_N(f^k)$  имеет конечный ряд, эквивалентный матрице, поэтому программируется на практике.

**4.2. Построения  $S_M(\cdot)$ .** Построим программируемую численную аппроксимацию части  $S_M(\cdot)$ . Идея построения основана на методе «интеграции продукта». Для этого нужно добавить следующие предположения:

- (1)  $(\forall f \in \Omega \cap C^0([0, 1], \mathbb{C})) \quad R[f] \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ ,
- (2)  $R[f^\infty] \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ .

Теперь построим приближение функции  $S(f)$ ,  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ . Для этого определим подмножество

$$M \geq 1, \quad h = \frac{1}{M}, \quad y_p = ph, \quad 0 \leq p \leq M.$$

Применяя метод «интеграция продукта», получим, что при всех  $x \in [0, 1]$

$$S_M(f)(x) = f(x) - \int_0^1 s(|x - y|) \pi_M R[f](y) dy - g(x),$$

где  $y_p \leq y \leq y_{p+1}$  и

$$\pi_M R[f](y) = \left( \frac{y - y_p}{h} R[f](y_{p+1}) \right) + \left( \frac{y_{p+1} - y}{h} R[f](y_p) \right).$$

Тогда при всех  $x \in [0, 1]$  получим

$$S_M(f)(x) = f(x) - \sum_{p=0}^{M-1} \left\{ R[f](y_{p+1}) \alpha_p(x) + R[f](y_p) \beta_{p+1}(x) \right\} - g(x)$$

такой, что при любом  $x \in [0, 1]$  и  $0 \leq p \leq M - 1$

$$\alpha_p(x) = \frac{1}{h} \int_{y_p}^{y_{p+1}} s(|x - y|) (y - y_p) dy, \quad \beta_{p+1}(x) = \frac{1}{h} \int_{y_p}^{y_{p+1}} s(|x - y|) (y_{p+1} - y) dy.$$

Для  $M \geq 1$  определим

$$\Delta_M = \max \left\{ |R[f^\infty](\tilde{x}) - R[f^\infty](x)| : |\tilde{x} - x| < \frac{1}{M} \right\}.$$

Зная, что  $R[f^\infty] \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ , тогда очевидно  $\lim_{M \rightarrow \infty} \Delta_M = 0$ .

**Теорема 3.** Пусть  $M \geq 1$  и при любой  $f \in X \cap C^0([0, 1], \mathbb{C})$  такая, что  $\|f - f^\infty\|_X \leq \Delta_M$ . Тогда

$$\|S(f) - S_M(f)\|_X \leq \|s\|_{L^1([0,1], \mathbb{R})} \left( l \|f - f^\infty\|_X^2 + 2(1 + \|R'[f^\infty]\|) \Delta_M \right).$$

◁ Имеем

$$\begin{aligned} \|S(f) - S_M(f)\|_X &= \int_0^1 |S(f)(x) - S_M(f)(x)| dx \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^1 s(|x-y|) \left( R[f](y) - \pi_M R[f](y) \right) dy \right| dx \\ &\leq \max_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 s(|x-y|) dx \int_0^1 |R[f](y) - \pi_M R[f](y)| dy. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|R[f] - \pi_M R[f]\|_X &\leq \|R[f] - R[f^\infty]\|_X + \|R[f^\infty] - \pi_M R[f^\infty]\|_X \\ + \|\pi_M R[f] - \pi_M R[f^\infty]\|_X &\leq 2\|R[f] - R[f^\infty]\|_X + \|R[f^\infty] - \pi_M R[f^\infty]\|_X. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|R[f] - R[f^\infty]\|_X &= \left\| \int_0^1 R'[\lambda f + (1-\lambda)f^\infty](f - f^\infty) d\lambda \right\|_X \\ &\leq \left\| \int_0^1 (R'[\lambda f + (1-\lambda)f^\infty] - R'[f^\infty])(f - f^\infty) d\lambda \right\|_X + \|R'[f^\infty](f - f^\infty)\|_X \\ &\leq \frac{l}{2} \|f - f^\infty\|_X^2 + \|R'[f^\infty]\| \|f - f^\infty\|_X. \end{aligned}$$

Используя леммы из [5, 10], получим  $\|R[f^\infty] - \pi_M R[f^\infty]\|_X \leq \Delta_M$ , и так как

$$\max_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 s(|x-y|) dx \leq 2\|s\|_{L^1([0,1], \mathbb{R})},$$

получим результат. ▷

**4.3. Программируемая последовательность.** Для приближения к  $f^\infty$  рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} f_{N,M}^0 &\text{ выбран из } X, \\ f_{N,M}^{k+1} &= f_{N,M}^k - [S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} [S_M(f_{N,M}^k)], \quad h \geq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что  $\{f_{N,M}^k\}_{k \geq 0}$  прекрасно программируется и доступна на практике.



**Лемма 1.** Пусть задана  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$  такая, что  $\|f - f^\infty\|_X \leq (4dl)^{-1}$ , и достаточно большое  $N$ , что можно найти

$$\sup \{ \|S'(f) - S'_N(f)\|; \|f - f^\infty\|_X \leq (4dl)^{-1} \}.$$

Тогда  $[S'_N(f)]^{-1}$  существует, причем  $\|S'_N(f)^{-1}\| \leq 2d$ .

◁

$$S'_N(f) = [S'(f^\infty)] [I - [S'(f^\infty)]^{-1}(S'(f^\infty) - S'_N(f))].$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \|[S'(f^\infty)]^{-1}(S'(f^\infty) - S'_N(f))\| &\leq \|[S'(f^\infty)]^{-1}(S'(f^\infty) - S'(f))'\| \\ + \|[S'(f^\infty)]^{-1}(S'(f) - S'_N(f))\| &\leq dl\|f^\infty - f\|_X + d\|S'(f) - S'_N(f)\| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Покажем, что приближение к  $f^\infty \in L^1 \subset C^0([0, 1], \mathbb{C})$  строится с помощью непрерывной функции  $f_{N,M}^k$ . ▷

**Лемма 2.** Пусть заданы  $N, M \in \mathbb{N}$ . Если  $f_{N,M}^0 \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ , то  $\{f_{N,M}^k\}_{k \geq 0} \subset C^0([0, 1], \mathbb{C})$ .

◁ Воспользуемся методом математической индукции.

Предположим, что  $f_{N,M}^k \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ , тогда  $S_M(f_{N,M}^k) \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$ , так как

$$\{\alpha_j\}_{j=0}^M \subset C^0([0, 1], \mathbb{C}).$$

Но

$$\{\cos(j\pi \cdot), \sin(j\pi \cdot)\}_{j=1}^N \cup \left[ \frac{1}{2} \right] \subset C^0([0, 1], \mathbb{C}).$$

Тогда получим

$$[S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} S_M(f_{N,M}^k) \in C^0([0, 1], \mathbb{C}).$$

Окончательно приходим к тому, что

$$f_{N,M}^{k+1} = f_{N,M}^k - S_M(f_{N,M}^k) \in C^0([0, 1], \mathbb{C}). \triangleright$$

Теперь сформулируем и докажем основную теорему о сходимости последовательности  $\{f_{N,M}^k\}_{k \geq 0}$ .

**Теорема 4.** Пусть заданы  $\delta \in [0, 1]$ ,  $f_{N,M}^0 \in C^0([0, 1], \mathbb{C})$  такие, что  $\|f_{N,M}^0 - f^\infty\|_X \leq \delta(4dL)^{-1}$ ,  $N$  — достаточно большое, чтобы

$$C_N = f_{N,M}^k, \quad \|f - f^\infty\|_X \leq \delta(4d)^{-1},$$

и достаточно большое  $M$  такое, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_{N,M}^k - f^\infty\|_X \leq \frac{4d}{8 - 7\delta} \Delta_M.$$

Тогда

$$\Delta_M \leq \delta \frac{(2 - \delta)}{2d} \left( \frac{8 - 7\delta}{8 - 4} \right) (4dL)^{-1}. \quad (2)$$

◁ Воспользуемся методом математической индукции.

Предположим, что  $k \geq 0$ ,  $\|f_{N,M}^k - f^\infty\|_X \leq \delta(4dL)^{-1}$ . Тогда

$$S'_N(f_{N,M}^k) = S'(f^\infty) \left[ I - [S'(f^\infty)]^{-1}(S'(f^\infty) - S'_N(f_{N,M}^k)) \right],$$

но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} & \left\| [S'(f^\infty)]^{-1} (S'(f^\infty) - S'_N(f_{N,M}^k)) \right\| \leq d \left\| S'(f^\infty) - S'_N(f_{N,M}^k) \right\| \\ & + d \left\| S'(f_{N,M}^k) - S'_N(f_{N,M}^k) \right\| \leq dL \|f^\infty - f_{N,M}^k\|_X + dC_N \leq \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{4}\delta = \frac{1}{2}\delta. \end{aligned}$$

Тогда  $\left\| [S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} \right\| \leq \frac{2d}{2-\delta}$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} f_{N,M}^{k+1} - f^\infty &= f_{N,M}^k - f^\infty - [S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} (S'_M(f_{N,M}^k) - S(f^\infty)) \\ &= \int_0^1 [I - [S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} S'((1-\lambda)f_{N,M}^k + \lambda f^\infty)] (f_{N,M}^k - f^\infty) dy \\ & \quad + [S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} (S(f_{N,M}^k) - S_M(f_{N,M}^k)). \end{aligned}$$

Но для любого  $\lambda \in ]0, 1[$

$$\begin{aligned} & \left\| I - [S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} S'((1-\lambda)f_{N,M}^k + \lambda f^\infty) \right\| \\ &= \left\| [S'_N(f_{N,M}^k)]^{-1} (S'_N(f_{N,M}^k) - S'(f_{N,M}^k) + S'(f_{N,M}^k) - S'((1-\lambda)f_{N,M}^k + \lambda f^\infty)) \right\| \\ & \leq \frac{2d}{2-\delta} C_N + \frac{2d}{2-\delta} L \lambda \|f_{N,M}^k - f^\infty\|_X \leq \frac{(1+\lambda)\delta}{4-2\delta}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|f_{N,M}^{k+1} - f^\infty\|_X \leq \frac{3\delta}{8-4\delta} \|f_{N,M}^k - f^\infty\|_X + \frac{2d}{2-\delta} \Delta_M \leq \delta(4dL)^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\|f_{N,M}^{k+1} - f^\infty\|_X - \frac{4d}{8-7\delta} \Delta_M \leq \left( \frac{3\delta}{8-4\delta} \right) \left( \|f^k - f^\infty\|_X - \frac{4d}{8-7\delta} \Delta_M \right).$$

Поскольку  $\frac{3\delta}{8-4\delta} < 1$ , имеет место неравенство (2).  $\triangleright$

**Следствие 2.** Для достаточно большого  $N \lim_{M \rightarrow +\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_{N,M}^k - f^\infty\|_X = 0$ .

$\triangleleft$  Леммы доказывают справедливость данного следствия.  $\triangleright$

## 5. Численные результаты

Применим описанный метод к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{1}{5} E_1(|x-y|) \arctan(f(y)-y) dy + 1+x \\ &+ \frac{\pi}{20} \left( x E_1(x) + (1-x) E_1(1-x) + \exp(-x) + \exp(x-1) - 2 \right) \quad (\forall x \in [0, 1]), \\ f(x) &= 1+x, \quad s(x) = \frac{1}{5} E_1(x), \quad R[f](x) = \arctan(f(x)-x). \end{aligned}$$

Для двух серий испытаний были выбраны

$$f_{N,M}^0(x) = x \text{ и } \rho(x) = \begin{cases} \frac{693}{512} (1-x^2)^5, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

**Алгоритм.** Начинаем предложение с установки значений ( $N$ ;  $M$ ;  $k_{\max}$ ;  $f^{\text{ext}}$  — точное решение). Затем мы программируем функцию, которая представляет свертку  $\rho * s(x)$ .

Вычисления обычно выполняются с помощью программного обеспечения для компьютерной алгебры (Mathematica, Maple и др.). Начнем расчет с выбора начальной точки  $f^0$ ,  $k = 0$ , и представим параметры  $h = \frac{1}{M}$  и  $t_M = (0, h, 2h, \dots, 1)$  (узлы метода трапеций). Член  $F_M^k$  вычисляется с помощью квадратичной трапеции. На этом этапе мы вычисляем матрицу  $A_N^k$ , представляющую операцию  $S'_N(f^k)$ , затем решаем задачу  $A_N^k Y = F_M^k$  и  $f^{k+1} = f^k - Y$ . Погрешность  $E_{N,M}^k$  оценивается путем аппроксимации квадратурой трапеции

$$E_{N,M}^k = \int_0^1 \|f^k(s) - f^{\text{ext}}(s)\| ds.$$

Повторяем эту процедуру в случае  $k \leq k_{\text{max}}$ .

В качестве исходных данных для серии испытаний были взяты следующие наборы:

1.  $N = 10$  и  $M = 10, 50, 100, 250$ . Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Серия испытаний с  $N = 10$

$N = 10$	$M = 10$	$M = 50$	$M = 100$	$M = 250$
$k = 1$	$3.27 E - 1$	$1.05 E - 2$	$1.12 E - 8$	$1.13 E - 12$
$k = 2$	$2.22 E - 1$	$9.12 E - 3$	$7.82 E - 10$	$9.92 E - 13$
$k = 3$	$2.01 E - 1$	$7.53 E - 3$	$9.33 E - 11$	$4.89 E - 13$
$k = 4$	$1.09 E - 1$	$6.99 E - 4$	$5.11 E - 11$	$2.09 E - 13$
$k = 5$	$9.23 E - 2$	$3.86 E - 4$	$6.12 E - 12$	$9.12 E - 14$
$k = 6$	$2.22 E - 2$	$1.19 E - 4$	$7.44 E - 13$	$3.22 E - 14$

2.  $N = 50$  и  $M = 10, 50, 100, 250$ . Полученные результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2

Серия испытаний с  $N = 50$

$N = 50$	$M = 10$	$M = 50$	$M = 100$	$M = 250$
$k = 1$	$3.63 E - 1$	$1.38 E - 2$	$8.43 E - 9$	$2.23 E - 12$
$k = 2$	$2.47 E - 1$	$9.43 E - 3$	$8.01 E - 10$	$8.52 E - 13$
$k = 3$	$2.07 E - 1$	$7.67 E - 3$	$8.96 E - 11$	$3.77 E - 13$
$k = 4$	$1.89 E - 1$	$6.55 E - 4$	$4.45 E - 11$	$1.13 E - 13$
$k = 5$	$1.02 E - 1$	$4.01 E - 4$	$9.11 E - 12$	$9.45 E - 14$
$k = 6$	$4.23 E - 2$	$1.89 E - 4$	$6.42 E - 13$	$2.95 E - 14$

### Литература

1. Chandrasekhar S. Radiative Transfer.—N. Y.: Dover Publ., 1960.—393 p.
2. Ahues M., d'Almeida F. D., Fernandes R. R. Piecewise constant Galerkin approximations of weakly singular integral equations // Int. J. Pure Appl. Math.—2009.—Vol. 4.—P. 569–580.
3. Amosov A. A., Youssef Y. E. Error estimates of projection type methods for solving weakly singular integral equations // J. Math. Sci.—2016.—Vol. 216.—P. 182–218. DOI: 10.1007/s10958-016-2895-x.
4. Atkinson K., Han W. Theoretical Numerical Analysis: a Functional Analysis Framework.—N. Y.: Springer, 2001.—Vol. 216.—P. 342–404.
5. Debbar R., Guebbai H., Zereg Z. Improving the convergence order of the regularization method for Fredholm integral equations of the second kind // Appl. Math. Comput.—2016.—Vol. 289.—P. 204–213. DOI: 10.1016/j.amc.2016.05.018.

6. Guebbai H., Grammont L. A new degenerate kernel method for a weakly singular integral equation // *Appl. Math. Comput.*—2014.—Vol. 230.—P. 414–427. DOI: 10.1016/j.amc.2013.12.102.
7. Benrabia N., Guebbai H. On the regularization method for Fredholm integral equations with odd weakly singular kernel // *Comp. Appl. Math.*—2018.—Vol. 37.—P. 5162–5174. DOI: 10.1007/s40314-018-0625-3.
8. Lemita S., Guebbai H., Sedka I., Aissaoui M. Z. New Method for the Numerical Solution of the Fredholm Linear Integral Equation on a Large Interval // *Вестн. российских ун-тов. Математика.*—2020.—Т. 25, № 132.—С. 387–400. DOI: 10.20310/2686-9667-2020-25-132-387-400.
9. Guebbai H. Regularization and Fourier Series for Fredholm Integral Equations of the Second Kind with a Weakly Singular Kernel // *Numer. Funct. Anal. Optim.*—2017.—Vol. 39, № 1.—P. 1–10. DOI: 10.1080/01630563.2017.1364753.
10. Ahues A., Largillier A., Titaud O. The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds // *Numer. Funct. Anal. Optim.*—2001.—Vol. 22, № 7–8.—P. 789–814. DOI: 10.1081/NFA-100108309.
11. Amosov A., Ahues M., Largillier A. Superconvergence of some projection approximations for weakly singular integral equations using general grids // *SIAM J. Numer. Anal.*—2009.—Vol. 47, № 1.—С. 646–674. DOI: 10.1137/070685464.
12. Dung V. T., Ha Q. T. Approximate solution for integral equations involving linear Toeplitz plus Hankel parts // *Comp. Appl. Math.*—2021.—Vol. 40.—Article № 172. DOI: 10.1007/s40314-021-01558-8.
13. Assari P., Dehghan M. On the numerical solution of nonlinear integral equations on non-rectangular domains utilizing thin plate spline collocation method // *Proc. Math. Sci.*—2019.—Vol. 129.—Article № 83. DOI: 10.1007/s12044-019-0511-y.
14. Jain S., Jain S. Fuzzy generalized weak contraction and its application to Fredholm non-linear integral equation in fuzzy metric space // *J. Anal.*—2021.—Vol. 29.—P. 619–632. DOI: 10.1007/s41478-020-00270-w.
15. Chapko R., Mindrinos L. On the non-linear integral equation approach for an inverse boundary value problem for the heat equation // *J. Eng. Math.*—2019.—Vol. 119.—P. 255–268. DOI: 10.1007/s10665-019-10028-4.
16. Lalli F., Campana E., Bulgarelli U. A Numerical Solution of II Kind Fredholm Equations: A Naval Hydrodynamics Application // *Boundary Integral Methods / Eds. Morino, L., Piva, R.*—Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.—P. 320–327. DOI: 10.1007/978-3-642-85463-7\_31.
17. Evans L. C. *Partial Differential Equations.*—American Mathematical Society, 1998.—(Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19.)
18. Linz P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations.*—Philadelphia: SIAM, 1985. DOI: 10.1137/1.9781611970852.
19. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.*—М.: Наука, 1984.—750 с.
20. Boumaya M. C., Lemita S., Ghiat M., Aissaoui M. Z. On a nonlinear integro-differential equation of Fredholm type // *International Journal of Computing Science and Mathematics.*—2021.—Vol. 13, № 2.—P. 194–205. DOI: 10.1504/IJCSM.2021.114188.
21. Ahues M. Newton methods with Hölder derivative // *Numer. Funct. Anal. Optim.*—2004.—Vol. 25, № 5–6.—P. 379–395. DOI: 10.1081/NFA-200042171.
22. Altürk A. Numerical solution of linear and nonlinear Fredholm integral equations by using weighted mean-value theorem // *SpringerPlus.*—2016.—Vol. 5.—Article № 1962. DOI: 10.1186/s40064-016-3645-8.
23. Hammad D. A., Semyar Mourad S., Khattab Ahmed G. Ten non-polynomial cubic splines for some classes of Fredholm integral equations // *Ain Shams Eng. J.*—2022.—Vol. 13, № 4.—Article № 101666. DOI: 10.1016/j.asej.2021.101666.
24. Maleknejad K., Karami M. Numerical solution of non-linear Fredholm integral equations by using multiwavelets in the Petrov-Galerkin method // *Appl. Math. Comp.*—2005.—Vol. 168, № 1.—P. 102–110. DOI: 10.1016/j.amc.2004.08.047.
25. Ghiat M., Guebbai H., Kurulay M., Segni S. On the weakly singular integro-differential nonlinear Volterra equation depending in acceleration term // *Comp. Appl. Math.*—2020.—Vol. 39.—Article № 206. DOI: 10.1007/s40314-020-01235-2.
26. Ghiat M., Guebbai H. Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation with weakly singular kernel // *Comp. Appl. Math.*—2018.—Vol. 37.—P. 4661–4674. DOI: 10.1007/s40314-018-0597-3.
27. Гиат М., Камуш С., Хеллаф А., Мерчела В. Об одной системе интегральных уравнений Вольтерра со слабо сингулярным ядром // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*—2021.—Т. 193.—С. 33–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-33-44.
28. Ahues A., Largillier A., Limaye B. V. *Spectral Computations for Bounded Operators.*—Chapman and Hall/CRC: Boca Raton, 2001.

Статья поступила 9 января 2022 г.

ГЕББАЙ ХАМЗА

Университет Гельмы — 8 мая 1945 г.,

директор лаборатории прикладной математики и моделирования

АЛЖИР, 24000, Гельма, ВР 401

E-mail: guebaihamza@yahoo.fr, guebbai.hamza@univ-guelma.dz

ГИАТ МОРАД

Университет Гельмы — 8 мая 1945 г.,

АЛЖИР, 24000, Гельма, ВР 401

E-mail: ghiat.mourad@univ-guelma.dz, mourad.ghi24@gmail.com

МЕРЧЕЛА ВАССИМ

Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина,  
РОССИЯ, 392000, Тамбов, ул. Интернациональная, 33;

Университет Мюстафа Стамбули,

АЛЖИР, 29000, Маскара, ВР 305

E-mail: merchela.wassim@gmail.com

СЕГНИ САМИ

Университет Гельмы — 8 мая 1945 г.,

АЛЖИР, 24000, Гельма, ВР 401

E-mail: segnianis@gmail.com, segni.sami@univ-guelma.dz

СТЕПАНЕНКО ЕЛЕНА ВИКТОРОВНА

Тамбовский государственный технический университет,

РОССИЯ, 392000, Тамбов, ул. Советская, 106

E-mail: Stepanenko.ei@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal  
2023, Volume 25, Issue 1, P. 33–47

## APPROXIMATE SOLUTION OF THE NONLINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATION OF THE SECOND KIND

Gebbai, H.<sup>1</sup>, Ghiat, M.<sup>1</sup>, Merchela, W.<sup>2,3</sup>, Segni, S.<sup>1</sup> and Stepanenko, E. V.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation,  
University 8 Mai 1945, BP. 401, Guelma 24000, Algeria;

<sup>2</sup>Derzhavin Tambov State University,  
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russia;

<sup>3</sup>Université Mustapha Stambouli Mascara, BP 305, Mascara 29000, Algeria;

<sup>4</sup>Tambov State Technical University,  
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russia

E-mail: guebaihamza@yahoo.fr, guebbai.hamza@univ-guelma.dz;  
mourad.ghi24@gmail.com, ghiat.mourad@univ-guelma.dz;  
merchela.wassim@gmail.com; segnianis@gmail.com,  
segni.sami@univ-guelma.dz; Stepanenko.ei@yandex.ru

**Abstract.** This article deals with the numerical treatment of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind. The equation treated in this paper has particular kernel, in sense that it is composed of the product between two parts: a weakly singular part not depending on the solution and a nonlinear Fréchet differentiable part depending on our solution. The approximate solution proposed in this work is defined as an iterative sequence of Newton–Kantorovich type. To construct this solution, we use three numerical methods: the Newton–Kantorovich method to linearize our problem, the method of regularization with convolution and Fourier series expansion. It needs to obtain a finite rank sequence and “Hat functions projection” to deal with nonlinear term in the Newton–Kantorovich construction. We prove that this particular Newton-like sequence converges perfectly to the exact solution. In addition, we construct some numerical example to demonstrate its effectiveness in practice. The obtained numerical results confirm the accuracy of the theoretical results.

**Key words:** fredholm integral equation, nonlinear equation, Newton-like methods, Fréchet derivative, weakly singularity.

**AMS Subject Classification:** 45B05, 45E10, 65J10, 65R20, 35P05.

**For citation:** Gebbai, H., Ghiat, M., Merchela, W., Segni, S. and Stepanenko, E. V. Approximate Solution of the Nonlinear Fredholm Integral Equation of the Second Kind, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 1, pp. 33–47 (in Russian). DOI: 10.46698/s7895-5601-5395-f.

## References

1. Chandrasekhar, S. *Radiative Transfer*, New York, Dover Publications, 1960, 393 p.
2. Ahues, M., d'Almeida, F. D. and Fernandes, R. R. Piecewise Constant Galerkin Approximations of Weakly Singular Integral Equations, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2009, vol. 4, no. 4, pp. 569–580.
3. Amosov, A. A. and Youssef, Y. E. Error Estimates of Projection Type Methods for Solving Weakly Singular Integral Equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 216, pp. 182–218. DOI: 10.1007/s10958-016-2895-x.
4. Atkinson, K. and Han, W. *Theoretical Numerical Analysis: a Functional Analysis Framework*, New York, Springer, 2001, vol. 216, pp. 342–404.
5. Debbar, R., Guebbai, H. and Zereg, Z. Improving the Convergence Order of the Regularization Method for Fredholm Integral Equations of the Second Kind, *Applied Mathematics and Computation*, 2016, vol. 289, pp. 204–213. DOI: 10.1016/j.amc.2016.05.018.
6. Guebbai, H. and Grammont, L. A New Degenerate Kernel Method for a Weakly Singular Integral Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 230, pp. 414–427. DOI: 10.1016/j.amc.2013.12.102.
7. Benrabia, N. and Guebbai, H. On the Regularization Method for Fredholm Integral Equations with Odd Weakly Singular Kernel, *Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 37, pp. 5162–5174. DOI: 10.1007/s40314-018-0625-3.
8. Lemita, S., Guebbai, H., Sedka, I. and Aissaoui, M. Z. New Method for the numerical Solution of the Fredholm Linear Integral Equation on a Large Interval, *Russian Universities Reports Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 132, pp. 387–400 (in Russian). DOI: 10.20310/2686-9667-2020-25-132-387-400.
9. Guebbai, H. Regularization and Fourier Series for Fredholm Integral Equations of the Second Kind with a Weakly Singular Kernel, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2017, vol. 39, no. 1, pp. 1–10. DOI: 10.1080/01630563.2017.1364753.
10. Ahues, A., Largillier, A. and Titaud, O. The Roles of a Weak Singularity and the Grid Uniformity in Relative Error Bounds, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2001, vol. 22, no. 7–8, pp. 789–814. DOI: 10.1081/NFA-100108309.
11. Amosov, A., Ahues, M. and Largillier, A. Superconvergence of Some Projection Approximations for Weakly Singular Integral Equations Using General Grids, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009, vol. 47, no. 1, pp. 646–674. DOI: 10.1137/070685464.
12. Dung, V. T. and Ha, Q. T. Approximate Solution for Integral Equations Involving Linear Toeplitz Plus Hankel Parts, *Computational and Applied Mathematics*, 2021, vol. 40, article no. 172172. DOI: 10.1007/s40314-021-01558-8.
13. Assari, P. and Dehghan, M. On the Numerical Solution of Nonlinear Integral Equations on Non-Rectangular Domains Utilizing Thin Plate Spline Collocation Method, *Proceedings – Mathematical Sciences*, 2019, vol. 129, article no. 83. DOI: 10.1007/s12044-019-0511-y.
14. Jain, S. and Jain, S. Fuzzy Generalized Weak Contraction and its Application to Fredholm Non-Linear Integral Equation in Fuzzy Metric Space, *The Journal of Analysis*, 2021, vol. 29, pp. 619–632. DOI: 10.1007/s41478-020-00270-w.
15. Chapko, R. and Mindrinos, L. On the Non-Linear Integral Equation Approach for an Inverse Boundary Value Problem for the Heat Equation, *Journal of Engineering Mathematics*, 2019, vol. 119, pp. 255–268. DOI: 10.1007/s10665-019-10028-4.
16. Lalli F., Campana E., Bulgarelli U. A Numerical Solution of II Kind Fredholm Equations: A Naval Hydrodynamics Application, *Boundary Integral Methods / eds. Morino, L., Piva, R., Berlin, Heidelberg Springer-Verlag*, 1991, pp. 320–327. DOI: 10.1007/978-3-642-85463-7\_31.
17. Evans, L. C. *Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics*, vol. 19, American Mathematical Society, 1998.
18. Linz, P. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, Philadelphia, SIAM, 1985. DOI: 10.1137/1.9781611970852.
19. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. *Funktsional'nyy Analliz [Functional Analysis]*, Moscow, Nauka, 1984, 750 p. (in Russian).

20. Bounaya, M. C., Lemita, S., Ghiat, M. and Aissaoui, M. Z. On a nonlinear integro-differential equation of Fredholm type, *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 194–205. DOI: 10.1504/IJCSM.2021.114188.
21. Ahues, M. Newton Methods with Hölder Derivative, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2004, vol. 25, no. 5–6, pp. 379–395. DOI: 10.1081/NFA-200042171.
22. Altürk, A. Numerical Solution of Linear and Nonlinear Fredholm Integral Equations by Using Weighted Mean-Value Theorem, *SpringerPlus*, 2016, vol. 5, article no. 1962. DOI: 10.1186/s40064-016-3645-8.
23. Hammad, D. A., Semary, M. S. and Khattab, A. G. Ten Non-Polynomial Cubic Splines for Some Classes of Fredholm Integral Equations, *Ain Shams Engineering Journal*, 2022, vol. 13, no. 4, article no. 101666. DOI: 10.1016/j.asej.2021.101666.
24. Maleknejad, K. and Karami, M. Numerical Solution of Non-Linear Fredholm Integral Equations by Using Multiwavelets in the Petrov–Galerkin Method, *Applied Mathematics and Computation*, 2005, vol. 168, no. 1, pp. 102–110. DOI: 10.1016/j.amc.2004.08.047.
25. Ghiat, M., Guebbai, H., Kurulay, M. and Segni, S. On the Weakly Singular Integro-Differential Nonlinear Volterra Equation Depending in Acceleration Term, *Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 39, Article no. 206. DOI: 10.1007/s40314-020-01235-2.
26. Ghiat, M. and Guebbai, H. Analytical and Numerical Study for an Integro-Differential Nonlinear Volterra Equation with weakly singular kernel, *Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 37, pp. 4661–4674. DOI: 10.1007/s40314-018-0597-3.
27. Ghiat, M., Kamouche, S., Khellaf, A. and Merchela, W. On a System of Volterra Integral Equations with a Weakly Singular Kernel, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, 2021, vol. 193, pp. 33–44 (in Russian). DOI: 10.36535/0233-6723-2021-193-33-44.
28. Ahues, A., Largillier, A. and Limaye, B. V. *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

Received January 9, 2022

HAMZA GEBBAI

Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation,

University 8 Mai 1945,

BP. 401, Guelma 24000, Algeria,

Director of Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation

E-mail: guebbaihamza@yahoo.fr, guebbai.hamza@univ-guelma.dz

MORAD GHIAT

Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation,

University 8 Mai 1945,

BP. 401, Guelma 24000, Algeria

E-mail: mourad.ghi24@gmail.com, ghiat.mourad@univ-guelma.dz

WASSIM MERCHELA

Derzhavin Tambov State University,

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russia;

Université Mustapha Stambouli Mascara,

BP. 305, Mascara 29000, Algeria

E-mail: merchela.wassim@gmail.com

SAMI SEGNI

Laboratoire des Mathématiques Appliquées et Modélisation,

University 8 Mai 1945,

BP. 401, Guelma 24000, Algeria

E-mail: segnianis@gmail.com, segni.sami@univ-guelma.dz

ELENA V. STEPANENKO

Tambov State Technical University,

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russia

E-mail: Stepanenko.ei@yandex.ru