Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 1, С. 64–80

УДК 517.957
DOI 10.46698/o3604-7902-1000-g

МНОГОМЕРНОЕ НЕАВТОНОМНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА МОНЖА — АМПЕРА

И. В. Рахмелевич[1]

[1] Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет имени Н. И. Лобачевского,
Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Исследовано многомерное неавтономное эволюционное уравнение типа Монжа — Ампера. Левая часть уравнения содержит первую производную по времени с коэффициентом, зависящим от времени, пространственных переменных и искомой функции, а правая часть — определитель матрицы Гессе. Получены решения данного уравнения с аддитивным и мультипликативным разделением переменных, и показано, что достаточным условием существования таких решений является возможность представления коэффициента при производной по времени в виде произведения функций от времени и от пространственных переменных. Также найдены решения в виде квадратичных полиномов по пространственным координатам в случае, когда коэффициент при производной по времени имеет вид функции, обратной линейной комбинации пространственных переменных с коэффициентами, зависящими от времени. Получено множество решений в виде разложения по функциям, зависящим от подмножеств пространственных переменных с коэффициентами, зависящими от времени, и найдены достаточные условия существования таких решений. Рассмотрены некоторые редукции исходного уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) в случаях, когда искомая функция зависит от суммы функций пространственных координат (в частности, суммы их квадратов) и функции времени; при этом используется функциональное разделение переменных. Также найдены редукции исходного уравнения к уравнениям в частных производных меньшей размерности. В частности, получены решения в виде функции времени и суммы квадратов пространственных координат, а также в виде суммы нескольких таких функций и найдены достаточные условия их существования.

Ключевые слова: эволюционное уравнение, уравнение Монжа — Ампера, разделение переменных, редукция, обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение в частных производных.

AMS Subject Classification: 35G20.

Образец цитирования: *Рахмелевич И. В.* Многомерное неавтономное эволюционное уравнение типа Монжа — Ампера // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 1.—С. 64–80. DOI: 10.46698/o3604-7902-1000-g.

Введение

Уравнение Монжа — Ампера является одним из наиболее интенсивно изучаемых уравнений в современной математической физике [1–9]. Интерес к этому уравнению и его различным обобщениям связан с его применениями в задачах дифференциальной геометрии, газовой динамики и метеорологии [1–4]. В ряде работ изучалось многомерное уравнение Монжа — Ампера [5–7] относительно неизвестной функции, зависящей от любого числа переменных. Также существенный интерес представляют эволюционные уравнения с правой частью, содержащей оператор Монжа — Ампера. Такие уравнения также встречаются в задачах дифференциальной геометрии (задачи Вейля, Минковского и др.) В современных руководствах и справочниках по нелинейным уравнениям математической физики [10–12] представлены некоторые результаты, относящиеся к двумерным автономным эволюционным уравнениям типа Монжа — Ампера. Целью данной работы является изучение неавтономного многомерного эволюционного уравнения типа Монжа — Ампера, которое содержит явную зависимость от времени и любого числа пространственных переменных. Для решения поставленной задачи применяется метод разделения переменных [1, 13].

1. Постановка задачи. Простейшие решения

Рассмотрим многомерное неавтономное эволюционное уравнение, правая часть которого содержит оператор Монжа — Ампера:

$$F(X,t,u)u'_t = \det H(u). \tag{1.1}$$

Здесь $u(X,t)$ — неизвестная функция, $F(X,t,u)$ — заданная функция, $H(u) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j\in I}$ — матрица Гессе, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ — множество независимых переменных, $I = \{1, 2, \dots, N\}$ — множество значений индекса, нумерующего независимые переменные.

Теорема 1.1. *Если*

$$F(X,t,u) = a(X)b(t), \tag{1.2}$$

то уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X,t) = v(X) + \lambda \int \frac{dt}{b(t)}, \tag{1.3}$$

где λ — произвольная вещественная постоянная, $v(X)$ — любое решение уравнения Монжа — Ампера:

$$\det H(v(X)) = \lambda a(X). \tag{1.4}$$

$\lhd$ Используя аддитивное разделение переменных [1, 13], ищем решение уравнения (1.1) в виде

$$u(X,t) = v(X) + w(t). \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.1) и учитывая (1.2), получаем

$$a(X)b(t)w'(t) = \det H(v(X)). \tag{1.6}$$

В результате разделения переменных из (1.6) находим

$$b(t)w'(t) = \frac{\det H(v(X))}{a(X)} = \lambda, \tag{1.7}$$

где λ — постоянная разделения. Находя из (1.7) выражение для $w(t)$, получаем решение в виде (1.3), а уравнение (1.4) также следует из (1.7). $\rhd$

Теорема 1.2. *Пусть $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$, $X_1 \cap X_2 = 0$, $X_1 \cup X_2 = X$. Если*

$$F(X,t,u) = a_1(X_1)a_2(X_2)b(t), \tag{1.8}$$

то уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X,t)=v_1(X_1)w(t)+v_2(X_2). \tag{1.9}$$

Функции $v_1(X_1)$, $v_2(X_2)$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\det H(v_1(X_1))=\lambda_1 a_1(X_1)v_1(X_1), \tag{1.10 а}$$

$$\det H(v_2(X_2))=\lambda_2 a_2(X_2). \tag{1.10 б}$$

Функция $w(t)$ *определяется выражениями:*

$$w(t)=w_0\exp\left(\lambda_1\lambda_2\int\frac{dt}{b(t)}\right)\quad (N_1=1), \tag{1.11 а}$$

$$w(t)=\left(\lambda_1\lambda_2(1-N_1)\int\frac{dt}{b(t)}+w_0\right)^{\frac{1}{1-N_1}}\quad (N_1>1). \tag{1.11 б}$$

Здесь w_0, λ_1, λ_2 — *произвольные постоянные,* N_1 — *число элементов в множестве* X_1.

$\lhd$ Решение уравнения (1.1) ищем в виде (1.9). Подставляем (1.9) в (1.1), тогда это уравнение принимает вид:

$$a_1(X_1)a_2(X_2)b(t)w'(t)v_1(X_1)=[w(t)]^{N_1}\det H(v_1(X_1))\det H(v_2(X_2)). \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) можно переписать в виде:

$$\frac{b(t)w'(t)}{[w(t)]^{N_1}}=\frac{\det H(v_1(X_1))}{a_1(X_1)v_1(X_1)}\cdot\frac{\det H(v_2(X_2))}{a_2(X_2)}. \tag{1.13}$$

Разделяя переменные в (1.13), находим, что функции $v_1(X_1)$, $v_2(X_2)$ должны удовлетворять уравнениям (1.10 а, б), а функция $w(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$b(t)w'(t)=\lambda_1\lambda_2[w(t)]^{N_1}. \tag{1.14}$$

Решая уравнение (1.14), находим выражения (1.11 а, б) для функции $w(t)$. $\rhd$

Теорема 1.3. *Если*

$$F(X,t,u)=a(X)b(t)u^\gamma, \tag{1.15}$$

то уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X,t)=v(X)w(t), \tag{1.16}$$

где $v(X)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\det H(v(X))=\lambda a(X)[v(X)]^{1+\gamma}, \tag{1.17}$$

а $w(t)$ *определяется выражениями:*

$$w(t)=w_0\exp\left(\lambda\int\frac{dt}{b(t)}\right)\quad (\gamma=N-1), \tag{1.18 а}$$

$$w(t)=\left(\lambda(\gamma-N+1)\int\frac{dt}{b(t)}+w_0\right)^{\frac{1}{\gamma-N+1}}\quad (\gamma\neq N-1). \tag{1.18 б}$$

Здесь λ, w_0 — *произвольные постоянные.*

◁ Подставляя (1.16) в (1.1) с учетом (1.15) и разделяя переменные, получаем

$$b(t)[w(t)]^{\gamma-N}w'(t) = \frac{\det H(v(X))}{a(X)[v(X)]^{1+\gamma}} = \lambda. \tag{1.19}$$

Из (1.19) следует, что функция $v(X)$ должна удовлетворять уравнению (1.17). Также решая первое из уравнений (1.19) относительно $w(t)$, получаем выражения (1.18 а, б). ▷

Теорема 1.4. *Пусть функция* $F(X,t,u)$ *определяется выражением*

$$F(X,t,u) = c_0\left(\sum_{i=1}^{N} x_i b_i(t)\right)^{-1}. \tag{1.20}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет решение вида*

$$u(X,t) = \sum_{i=1}^{N} x_i\psi_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}x_ix_j. \tag{1.21}$$

Здесь функции $\psi_i(t)$ $(i = 1,\ldots,N)$ *определяются выражением*

$$\psi_i(t) = q\int b_i(t)\,dt + b_{0i}, \quad q = D/c_0. \tag{1.22}$$

В формулах (1.21), (1.22) b_{0i} *— произвольные постоянные,* $D = \det(c_{ij})$.

◁ Подставив функцию (1.21) в уравнение (1.1) и учитывая (1.20), получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i b_i(t)\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N} x_i\psi_i'(t) = D/c_0. \tag{1.23}$$

Очевидно, уравнение (1.23) может быть разрешено, если выполнены условия

$$\psi_i'(t) = qb_i(t) \quad (i = 1,\ldots,N), \tag{1.24}$$

где q — некоторая постоянная. Из (1.23), (1.24) находим выражения (1.22) для функций $\psi_i(t)$ и постоянной q. ▷

Теорема 1.5. *Пусть функция* $F(X,t,u)$ *определяется выражением*

$$F(X,t,u) = \left\{b_0(t) + \sum_{i=1}^{N}\left(x_ib_{1i}(t) + \frac{x_i^2}{2}b_{2i}(t)\right)\right\}^{-1}. \tag{1.25}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет решение вида*

$$u(X,t) = \psi_0(t) + \sum_{i=1}^{N}\left(x_i\psi_{1i}(t) + \frac{x_i^2}{2}\psi_{2i}(t)\right). \tag{1.26}$$

Здесь функции $\psi_{1i}(t)$, $\psi_{2i}(t)$ *удовлетворяют системе уравнений:*

$$\psi_{1i}'(t) = P(t)b_{1i}(t), \quad \psi_{2i}'(t) = P(t)b_{2i}(t), \quad \psi_0'(t) = P(t)b_0(t), \quad P(t) = \prod_{n=1}^{N}\psi_{2n}(t). \tag{1.27}$$

◁ Подставляя (1.26) в уравнение (1.1) и учитывая (1.25), получаем

$$\left\{b_0(t)+\sum_{i=1}^{N}\left(x_i b_{1i}(t)+\frac{x_i^2}{2}b_{2i}(t)\right)\right\}^{-1} \times\left\{\psi_0'(t)+\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\psi_{1i}'(t)+\frac{x_i^2}{2}\psi_{2i}'(t)\right)\right\}=\prod_{n=1}^{N}\psi_{2n}(t). \quad (1.28)$$

Уравнение (1.28) нетрудно преобразовать к виду

$$\psi_0'(t)-P(t)b_0(t)+\sum_{i=1}^{N}\left\{x_i\big(\psi_{1i}'(t)-P(t)b_{1i}(t)\big)+\frac{x_i^2}{2}\big(\psi_{2i}'(t)-P(t)b_{2i}(t)\big)\right\}=0, \quad (1.29)$$

где $P(t)$ определяется выражением (1.27). Уравнение (1.29) можно удовлетворить только в том случае, если функции $\psi_{1i}(t)$, $\psi_{2i}(t)$, $\psi_0(t)$ являются решениями системы (1.27). ▷

Далее будем предполагать, что $I=\bigcup_{k=1}^{K}I_k$, причем все подмножества I_k являются непересекающимися. Тогда множество X можно представить в виде объединения соответствующих непересекающихся подмножеств: $X=\bigcup_{k=1}^{K}X_k$, $X_k=\{x_n\}_{n\in I_k}$; N_k — число элементов в подмножестве X_k. Также будет использоваться обозначение $\Xi=\{1,\dots,K\}$ — множество значений индекса k, нумерующего подмножества независимых переменных.

Теорема 1.6. *Пусть функция $F(X,t,u)$ определяется выражением*

$$F(X,t,u)=\prod_{k=1}^{K}a_{1k}(X_k)\left(\sum_{k=1}^{K}a_{2k}(X_k)b_k(t)\right)^{-1}, \quad (1.30)$$

где $a_{1k}(X_k)$, $a_{2k}(X_k)$, $b_k(t)$ — заданные функции, причем $a_{1k}(X_k)$, $a_{2k}(X_k)$ при любом $k\in\Xi$ связаны соотношением

$$a_{1k}(X_k)=\frac{\nu_k^{N_k}}{\mu_k}\det H_k(a_{2k}(X_k)). \quad (1.31)$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X,t)=\sum_{k=1}^{K}v_k(X_k)\psi_k(t), \quad (1.32)$$

где функции $\psi_k(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\psi_k'(t)=\lambda_k b_k(t)\prod_{l=1}^{K}\psi_l(t), \quad (1.33)$$

а функции $v_k(X_k)$ при любом $k\in\Xi$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$\det H_k(v_k(X_k))=\mu_k a_{1k}(X_k),\quad v_k(X_k)=\nu_k a_{2k}(X_k)+\epsilon_k. \quad (1.34)$$

При этом для любого $k\in\Xi$ постоянные λ_k, μ_k, ν_k связаны соотношениями

$$\lambda_k\nu_k=\prod_{l=1}^{K}\mu_l. \quad (1.35)$$

◁ Подставляя (1.32) в уравнение (1.1) с учетом (1.30), получаем

$$\prod_{k=1}^{K} a_{1k}(X_k)\cdot\sum_{k=1}^{K} v_k(X_k)\psi_k'(t)\left(\sum_{k=1}^{K} a_{2k}(X_k)b_k(t)\right)^{-1} = \Psi(t)\prod_{k=1}^{K}\det H_k(v_k(X_k)), \qquad (1.36)$$

где

$$\Psi(t) = \prod_{l=1}^{K}\psi_l(t). \qquad (1.36\,\text{a})$$

При выводе уравнения (1.36) также учтено, что для функции (1.32) матрица Гессе является блочно-диагональной, определитель которой равен произведению определителей диагональных блоков. Уравнение (1.36) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{K} v_k(X_k)\psi_k'(t)\left(\sum_{k=1}^{K} a_{2k}(X_k)b_k(t)\Psi(t)\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{K}\frac{\det H_k(v_k(X_k))}{a_{1k}(X_k)}. \qquad (1.37)$$

Пусть функции $v_k(X_k)$ таковы, что правая часть уравнения (1.37) равна постоянной:

$$\prod_{k=1}^{K}\frac{\det H_k(v_k(X_k))}{a_{1k}(X_k)} = \mu. \qquad (1.38)$$

Тогда, разделяя переменные в (1.38), получаем, что функции $v_k(X_k)$ должны удовлетворять первому из уравнений (1.34). Учитывая (1.38), уравнение (1.37) преобразуем к виду

$$\sum_{k=1}^{K}\Big\{v_k(X_k)\psi_k'(t) - \mu a_{2k}(X_k)b_k(t)\Psi(t)\Big\} = 0. \qquad (1.39)$$

Так как слагаемые в левой части (1.39) зависят от разных пространственных переменных, то при каждом $k\in\Xi$ должны удовлетворяться уравнения

$$v_k(X_k)\psi_k'(t) - \mu a_{2k}(X_k)b_k(t)\Psi(t) = \chi_k(t), \qquad (1.40)$$

где $\chi_k(t)$ — некоторые функции, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{K}\chi_k(t) = 0. \qquad (1.40\,\text{a})$$

Пусть $i\in I_k$ — некоторое произвольно выбранное значение индекса. Продифференцировав (1.40) по x_i, получаем

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\psi_k'(t) - \mu\frac{\partial a_{2k}}{\partial x_i}b_k(t)\Psi(t) = 0. \qquad (1.41)$$

Разделяя переменные в (1.41), находим, что функции $\psi_k(t)$ должны удовлетворять системе уравнений (1.33). Тогда, с учетом (1.33), из (1.40) следует

$$v_k(X_k) - \frac{\mu}{\lambda_k}a_{2k}(X_k) = \frac{\chi_k(t)}{\lambda_k b_k(t)\Psi(t)}. \qquad (1.42)$$

Так как левая часть (1.42) зависит только от X_k, а правая часть только от t, то обе части этого уравнения равны некоторой постоянной ϵ_k, поэтому

$$v_k(X_k) - \frac{\mu}{\lambda_k} a_{2k}(X_k) = \epsilon_k, \quad \chi_k(t) = \epsilon_k \lambda_k b_k(t) \Psi(t). \tag{1.43}$$

Вводя новые постоянные $\nu_k = \mu/\lambda_k$ в первом из уравнений (1.43), получаем, что функции $v_k(X_k)$ должны удовлетворять второму из уравнений (1.34). Наконец, для того чтобы получить соотношение (1.31), достаточно подставить $v_k(X_k)$ из второго уравнения системы (1.34) в первое уравнение этой системы и выразить из него $a_{1k}(X_k)$. $\triangleright$

2. Редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Данный параграф посвящен возможным способам редукции уравнения (1.1) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) или к системе таких уравнений. Рассмотрим возможные редукции уравнения (1.1) к ОДУ с помощью функционального разделения переменных. В доказательствах теорем, приводимых ниже, будем использовать известное выражение [14, с. 43, 197] для определителя специального вида

$$\det h = \prod_{i=1}^{N} (d_i - a_i b_i) \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i b_i}{d_i - a_i b_i} \right), \tag{2.1}$$

где элементы матрицы h выражаются так:

$$h_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{при } i = j; \\ a_i b_j & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть функция $F(X, t, u)$ имеет вид*

$$F(X, t, u) = g(u) b(t), \tag{2.3}$$

где $g(u)$, $b(t)$ — заданные функции. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(x, y, t) = U(z), \quad z = \frac{\psi(t)}{2} \sum_{n=1}^{N} c_n x_n^2. \tag{2.4}$$

Здесь функция $\psi(t)$ определяется выражением

$$\psi(t) = \left(\psi_0 - N\lambda \int \frac{dt}{b(t)} \right)^{-1/N}, \tag{2.5}$$

а функция $U(z)$ является решением ОДУ:

$$C\big[U'(z)\big]^{N-2} (U'(z) + 2zU''(z)) - \lambda z g(U) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь λ, ψ_0 — произвольные постоянные, C определяется выражением

$$C = \prod_{n=1}^{N} c_n. \tag{2.6 a}$$

◁ Подставив функцию (2.4) в правую часть уравнения (1.1) и используя (2.1), (2.2), после преобразований получаем:

$$\det H(u) = C[U'(z)]^N[\psi(t)]^N \left(1 + \frac{2zU''(z)}{U'(z)}\right), \tag{2.7}$$

где C определяется выражением (2.6 а). Тогда с учетом (2.3), (2.4) и (2.7), уравнение (1.1) приводится к виду

$$zg(U)b(t)\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = C\big[U'(z)\big]^N\big[\psi(t)\big]^N\left(1 + \frac{2zU''(z)}{U'(z)}\right). \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) можно удовлетворить, если функции $\psi(t)$, $U(z)$ удовлетворяют уравнениям:

$$b(t)\frac{\psi'(t)}{[\psi(t)]^{N+1}} = \lambda, \quad C\frac{[U'(z)]^{N-1}}{zg(U)}\left(1 + \frac{2zU''(z)}{U'(z)}\right) = \lambda, \tag{2.9}$$

где λ — некоторая постоянная. Общее решение первого из уравнений (2.9) определяется формулой (2.5), второе из уравнений (2.9) сводится к (2.6). ▷

Следующая теорема определяет возможность редукции уравнения (1.1) к ОДУ для функции $F(x, y, t, u)$ более общего вида.

Теорема 2.2. *Пусть функция $F(X, t, u)$ имеет вид*

$$F(X, t, u) = g(u)b(t)\prod_{\substack{n=1,\\ n\neq j}}^{N} a_n(x_n), \tag{2.10}$$

где $g(u)$, $b(t)$, $a_n(x_n)$ — заданные функции, причем $j \in I$ — некоторое фиксированное значение индекса. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(X, t) = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x_n) + \psi(t). \tag{2.11}$$

Здесь функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению

$$c_j^2\big[U'(z)\big]^{N-2}U''(z) - Bg(U)\exp(\mu z) = 0. \tag{2.12}$$

Функция $\psi(t)$ определяется выражениями

$$\psi(t) = B_0\int\frac{dt}{b(t)} + \psi_0 \quad (\mu = 0), \tag{2.13 а}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu}\ln\left(\mu B_0\int\frac{dt}{b(t)} + \psi_0\right) \quad (\mu \neq 0). \tag{2.13 б}$$

Функция $\varphi_j(x_j) = c_jx_j + c_{j0}$ является линейной; при $i \neq j$, $\mu = 0$ функции $\varphi_i(x_i)$ определяются выражением

$$\varphi_i(x_i) = \frac{1}{B_i}\int dx_i\int a_i(x_i)\,dx_i + c_ix_i + c_{i0}. \tag{2.14}$$

При $i \neq j$, $\mu \neq 0$ функции $\varphi_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению

$$\varphi_i''(x_i) - \frac{a_i(x_i)}{B_i}\exp\big(\mu\varphi_i(x_i)\big) = 0. \tag{2.15}$$

Постоянные B, B_i связаны соотношением

$$\prod_{\substack{i=0,\\ i\neq j}}^{N} B_i = B. \tag{2.16}$$

$\triangleleft$ Подставив функцию (2.12) в правую часть уравнения (1.1), получаем

$$\det H(u) = \left[U''(z)\right]^N \det h, \tag{2.17}$$

где элементы матрицы h имеют вид (2.2), причем

$$a_i = b_i = \varphi_i'(x_i), \quad d_i = \left[\varphi_i'(x_i)\right]^2 + \varphi_i''(x_i)\frac{U'(z)}{U''(z)}. \tag{2.18}$$

Используя соотношение (2.1), находим

$$\det H(u) = \left[U'(z)\right]^N \prod_{i=1}^{N} \varphi_i''(x_i)\left(1 + \frac{U''(z)}{U'(z)}\sum_{i=1}^{N}\frac{[\varphi_i'(x_i)]^2}{\varphi_i''(x_i)}\right). \tag{2.19}$$

Выделив слагаемые и сомножители, содержащие $\varphi_j(x_j)$, (2.19) можно переписать так:

$$\det H(u) = \left[U'(z)\right]^N \varphi_j''(x_j)\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \varphi_i''(x_i) \times\left(1 + \frac{U''(z)}{U'(z)}\left(\frac{\left[\varphi_j'(x_j)\right]^2}{\varphi_j''(x_j)} + \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N}\frac{\left[\varphi_i'(x_i)\right]^2}{\varphi_i''(x_i)}\right)\right). \tag{2.20}$$

Из (2.20) следует, что если $\varphi_j(x_j) = c_j x_j + c_{j0}$, то правая часть уравнения (1.1) принимает вид

$$\det H(u) = c_j^2\left[U'(z)\right]^{N-1}U''(z)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\varphi_i''(x_i). \tag{2.21}$$

Тогда, учитывая (2.10), (2.11), (2.21), приводим уравнение (1.1) к виду

$$b(t)\psi'(t)\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N}\frac{a_i(x_i)}{\varphi_i''(x_i)} = c_j^2\frac{\left[U'(z)\right]^{N-2}U''(z)}{g(U)}. \tag{2.22}$$

Правая часть уравнения (2.22) является функцией только переменной z, поэтому и левая часть должна зависеть только от этой переменной. Нетрудно видеть, что это возможно лишь в том случае, если функции $\varphi_i(x_i)$, $\psi(t)$ удовлетворяют условию

$$b(t)\psi'(t)\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N}\frac{a_i(x_i)}{\varphi_i''(x_i)} = B\exp(-\mu z), \tag{2.23}$$

где B, μ — некоторые постоянные. Из (2.22) и (2.23) непосредственно следует уравнение (2.12) для $U(z)$. Разделяя переменные в (2.23), получаем, что функции $\varphi_i(x_i)$ должны удовлетворять уравнению (2.15), а функция $\psi(t)$ — следующему уравнению:

$$b(t)\psi'(t) = B_0 \exp(-\mu\psi(t)). \tag{2.24}$$

Решая уравнение (2.24), получаем выражения (2.13 а, б) для $\psi(t)$ в случаях $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ соответственно. Также решая уравнение (2.15) при $\mu = 0$, находим выражение (2.14). Из (2.15), (2.23) и (2.24) следует соотношение (2.16) для произвольных постоянных. $\rhd$

Теорема 2.3. *Пусть функция $F(X, t, u)$ имеет вид*

$$F(X, t, u) = g(u)b(t). \tag{2.25}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет решение вида*

$$u(X, t) = U(z) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} d_n x_n^2, \quad z = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n + \psi(t). \tag{2.26}$$

Функция $\psi(t)$ определяется выражением

$$\psi(t) = \lambda \int \frac{dt}{b(t)} + \psi_0, \tag{2.27}$$

c_n, d_n — произвольные постоянные, а функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению

$$C_1 U''(z) - \lambda g(U)U'(z) + D = 0, \tag{2.28}$$

где

$$C_1 = CD, \quad C = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^2}{d_i}, \quad D = \prod_{i=1}^{N} d_i. \tag{2.28 а}$$

$\lhd$ Подставив функцию (2.26) в правую часть уравнения (1.1), и используя (2.1), после преобразований получаем

$$\det H(u) = \prod_{i=1}^{N} d_i \left(1 + U''(z)\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^2}{d_i}\right). \tag{2.29}$$

Далее, учитывая (2.25), уравнение (1.1) приводим к виду

$$b(t)\psi'(t)g(U)U'(z) = D(1 + CU''(z)), \tag{2.30}$$

где C, D определяются выражениями (2.28 а). Редукция уравнения (2.30) к ОДУ возможна только в том случае, если $b(t)\psi'(t) = \lambda$, откуда следует выражение (2.27) для функции $\psi(t)$ и уравнение (2.28) для функции $U(z)$. $\rhd$

Теорема 2.4. *Пусть функция $F(X, t, u)$ имеет вид*

$$F(X, t, u) = 2g(u)b_0(t)\left(\sum_{n=1}^{N} x_n^2 b_n(t)\right)^{-1}. \tag{2.31}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет решение вида*

$$u(X,t) = U(z), \quad z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \psi_n(t). \tag{2.32}$$

Здесь функции $\psi_n(t)$ *определяются выражением*

$$\psi_n(t) = \lambda \int b_n(t)dt + c_n, \tag{2.33}$$

а функция $U(z)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\left[U'(z)\right]^{N-1}\left(1 + \frac{2zU''(z)}{U'(z)}\right) - Ag(U) = 0. \tag{2.34}$$

При этом функции $b_n(t)$ *должны удовлетворять условию*

$$\prod_{n=1}^{N}\left(\lambda \int b_n(t)dt + c_n\right) = \frac{\lambda}{A} b_0(t). \tag{2.35}$$

Здесь λ, A, c_n *— произвольные постоянные.*

$\triangleleft$ Подставив функцию (2.32) в правую часть уравнения (1.1) и используя (2.1), после преобразований получаем

$$\det H(u) = [U'(z)]^N \left(1 + \frac{2zU''(z)}{U'(z)}\right)\prod_{n=1}^{N}\psi_n(t). \tag{2.36}$$

Далее, учитывая (2.31), уравнение (1.1) приводим к виду

$$g(U)b_0(t)\left(\prod_{n=1}^{N}\psi_n(t)\right)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{N} x_n^2 b_n(t)\right)^{-1}\sum_{n=1}^{N} x_n^2 \psi_n'(t) = \left[U'(z)\right]^{N-1}\left(1 + \frac{2zU''(z)}{U'(z)}\right). \tag{2.37}$$

Уравнение (2.37) может быть сведено к ОДУ относительно функции $U(z)$ только в том случае, если выполняются условия:

$$\left(\sum_{n=1}^{N} x_n^2 b_n(t)\right)^{-1}\sum_{n=1}^{N} x_n^2\psi_n'(t) = \lambda, \quad b_0(t)\left(\prod_{n=1}^{N}\psi_n(t)\right)^{-1} = B, \tag{2.38}$$

где λ, B — некоторые постоянные. Для выполнения первого условия (2.38) функции $\psi_n(t)$ должны удовлетворять уравнению $\psi_n'(t) = b_n(t)$, решая которое, находим выражение (2.33). Подставляя (2.33) во второе условие (2.38) и вводя новую постоянную $A = \lambda B$, получаем условие (2.35). Тогда из уравнения (2.37) с учетом условий (2.38) следует уравнение (2.34). $\triangleright$

3. Редукции к уравнениям в частных производных

В данном параграфе рассматриваются некоторые способы редукции уравнения (1.1) к уравнениям в частных производных меньшей размерности.

Теорема 3.1. *Пусть функция $F(X,t,u)$ имеет вид*

$$F(X,t,u) = b(t). \tag{3.1}$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(X,t) = \chi(t)U(\xi_1,\dots,\xi_N), \quad \xi_n = x_n\psi_n(t) \quad (n \in I). \tag{3.2}$$

Здесь функция $U(\xi_1,\dots,\xi_N)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu U(\xi_1,\dots,\xi_N) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \xi_i U'_{\xi_i} = \det\left|U''_{\xi_i\xi_j}\right|, \tag{3.3}$$

функции $\chi(t)$, $\psi_n(t)$ определяются выражениями:

$$\psi_n(t) = C_n[\psi_1(t)]^{\rho_n}, \quad \chi(t) = C_0[\psi_1(t)]^{\sigma}, \quad \rho_n = \lambda_n/\lambda_1, \quad \sigma = \mu/\lambda_1, \tag{3.4}$$

$$\psi_1(t) = A\exp\left(\tilde{\lambda}_1 \int \frac{dt}{b(t)}\right) \quad (\theta = 1), \tag{3.5 а}$$

$$\psi_1(t) = \left\{(1-\theta)\left(\tilde{\lambda}_1 \int \frac{dt}{b(t)} + B\right)\right\}^{\frac{1}{1-\theta}} \quad (\theta \neq 1), \tag{3.5 б}$$

где

$$\theta = (N-1)\sigma + 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \rho_n, \quad \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 C_0^{N-1} \prod_{n=1}^{N} C_n^2, \tag{3.5 в}$$

A, B, C_0, C_n, λ_1, λ_2, μ — произвольные постоянные.

$\triangleleft$ Подставляя (3.2) в уравнение (1.1) и используя (3.1), получаем

$$p_0(t)U(\xi_1,\dots,\xi_N) + \sum_{n=1}^{N} x_n p_n(t) U'_{\xi_n} = \det\left|U''_{\xi_i\xi_j}\right|, \tag{3.6}$$

где

$$p_0(t) = \frac{b(t)\chi'(t)}{\Psi(t)}, \quad p_n(t) = \frac{b(t)\chi(t)\psi'_n(t)}{\Psi(t)} \quad (\forall\, n \in I), \quad \Psi(t) = \left[\chi(t)\right]^N \prod_{i=1}^{N} \left[\psi_i(t)\right]^2. \tag{3.6 а}$$

Для того чтобы уравнение (3.6) можно было редуцировать к уравнению относительно $U(\xi_1,\dots,\xi_N)$, функции $\chi(t), \psi_1(t),\dots,\psi_N(t)$ должны удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{b(t)\chi'(t)}{\Psi(t)} = \mu, \quad \frac{b(t)\chi(t)\psi'_n(t)}{\Psi(t)} = \lambda_n\psi_n(t) \quad (\forall\, n \in I), \tag{3.7}$$

где λ_n, μ — произвольные постоянные. Пусть $n \neq 1$, $n \in I$, — некоторое произвольно выбранное значение индекса. Тогда, разделив почленно второе уравнение (3.7) для $\psi_n(t)$ на соответствующее уравнение для $\psi_1(t)$, получаем

$$\frac{\psi'_n(t)}{\psi'_1(t)} = \frac{\lambda_n\psi_n(t)}{\lambda_1\psi_1(t)}. \tag{3.8}$$

Проинтегрировав уравнение (3.8), получаем выражение (3.4) для $\psi_n(t)$. Аналогично, разделив почленно первое уравнение (3.7) для $\chi(t)$ на второе уравнение (3.7) для $\psi_1(t)$, имеем

$$\frac{\chi'(t)}{\psi_1'(t)} = \frac{\mu\chi(t)}{\lambda_1\psi_1(t)}. \tag{3.9}$$

Проинтегрировав уравнение (3.9), получаем выражение (3.4) для $\chi(t)$. Подставляя найденные выражения во второе уравнение системы (3.7), получаем уравнение для $\psi_1(t)$:

$$\psi_1'(t) = \frac{\tilde{\lambda}_1}{b(t)}\big[\psi_1(t)\big]^{\theta}, \tag{3.10}$$

где θ, λ_1 определяются выражениями (3.5 в). Решая уравнение (3.10), находим выражения (3.5 а, б) для $\psi_1(t)$. Далее, из (3.6), (3.6 а), (3.7) следует уравнение (3.3). $\triangleright$

Теорема 3.2. *Пусть функция $F(x, y, t, u)$ определяется выражением*

$$F(x, y, t, u) = a(z)b(t)g(u), \quad z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} c_n x_n^2. \tag{3.11}$$

Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u = U(z, t). \tag{3.12}$$

Здесь функция $U(z, t)$ удовлетворяет двумерному уравнению

$$a(z)b(t)g(U)U_t' = C(U_z')^N\left(1 + \frac{2zU''(z)}{U'(z)}\right), \tag{3.13}$$

где

$$C = \prod_{n=1}^{N} c_n. \tag{3.13 а}$$

$\triangleleft$ Аналогично доказательству теоремы 2.4, для функции (3.12), где z определяется выражением (3.11), нетрудно получить следующее:

$$\det H(u) = C(U_z')^N\left(1 + \frac{2zU_{zz}''}{U_z'}\right), \tag{3.14}$$

где C определяется выражением (3.13 а). Тогда с учетом (3.11) и (3.14) из уравнения (1.1) следует уравнение (3.13). $\triangleright$

Теорема 3.3. *Пусть функция $F(x, y, t, u)$ определяется выражением*

$$F(x, y, t, u) = b(t)\prod_{k=1}^{K} a_k(z_k), \quad z_k = \frac{1}{2}\sum_{n\in I_k} c_n x_n^2. \tag{3.15}$$

Тогда уравнение (1.1) имеет множество решений вида

$$u = U_l(z_l, t) + \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq l}}^{K} U_k(z_k). \tag{3.16}$$

Здесь функции $U_k(z_k)$, $U_l(z_l,t)$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\big[U_k'(z_k)\big]^{N_k}\left(1+\frac{2z_kU_k''(z_k)}{U_k'(z_k)}\right)=D_ka_k(z_k), \tag{3.17}$$

$$\left(\frac{\partial U_l}{\partial z_l}\right)^{N_l}\left(1+\frac{2z_l\partial^2U_l/\partial z_l^2}{\partial U_l/\partial z_l}\right)=D_la_l(z_l)b(t)\frac{\partial U_l}{\partial t}. \tag{3.18}$$

Постоянные D_k *удовлетворяют соотношению*

$$C\prod_{k=1}^{K}D_k=1, \tag{3.19}$$

где C *определяется выражением* (3.13 а).

$\triangleleft$ Нетрудно видеть, что для функции (3.16) матрица Гессе является блочно-диагональной, определитель которой равен произведению определителей диагональных блоков:

$$\det H(u)=\det H\big(U_l(z_l,t)\big)\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq l}}^{K}\det H(U_k(z_k)). \tag{3.20}$$

Аналогично доказательствам теорем 2.4, 3.2, сомножители в правой части (3.20) определяются выражениями:

$$\det H(U_l(z_l,t))=C_l\left(\frac{\partial U_l}{\partial z_l}\right)^{N_l}\left(1+\frac{2z_l\partial^2U_l/\partial z_l^2}{\partial U_l/\partial z_l}\right), \tag{3.21}$$

$$\det H(U_k(z_k))=C_k\big[U_k'(z_k)\big]^{N_k}\left(1+\frac{2z_kU_k''(z_k)}{U_k'(z_k)}\right). \tag{3.22}$$

Тогда, учитывая (3.15), (3.16), (3.20), (3.21), (3.22), уравнение (1.1) приводится к виду

$$\frac{C(\partial U_l/\partial z_l)^{N_l}}{b(t)a_l(z_l)\partial U_l/\partial t}\left(1+\frac{2z_l\partial^2U_l/\partial z_l^2}{\partial U_l/\partial z_l}\right)\prod_{\substack{k=1,\\ k\neq l}}^{K}\left\{\frac{\big[U_k'(z_k)\big]^{N_k}}{a_k(z_k)}\left(1+\frac{2z_kU_k''(z_k)}{U_k'(z_k)}\right)\right\}=1. \tag{3.23}$$

Разделяя переменные в (3.23), получаем

$$\frac{(\partial U_l/\partial z_l)^{N_l}}{b(t)a_l(z_l)\partial U_l/\partial t}\left(1+\frac{2z_l\partial^2U_l/\partial z_l^2}{\partial U_l/\partial z_l}\right)=D_l, \tag{3.24 а}$$

$$\frac{\big[U_k'(z_k)\big]^{N_k}}{a_k(z_k)}\left(1+\frac{2z_kU_k''(z_k)}{U_k'(z_k)}\right)=D_k. \tag{3.24 б}$$

Из (3.24 а, б) следуют уравнения (3.17), (3.18) и соотношение (3.19) для постоянных. $\triangleright$

Заключение

Таким образом, в данной работе исследованы точные решения многомерного неавтономного эволюционного уравнения, содержащего оператор Монжа — Ампера. С помощью методов аддитивного и мультипликативного разделения переменных найдены простейшие решения данного уравнения. Также исследованы редукции рассматриваемого уравнения к ОДУ и редукции к уравнениям в частных производных. В частности, найдены решения в виде квадратичных полиномов по пространственным координатам для некоторых случаев одномерной редукции. Для всех найденных решений получены зависимости коэффициентов уравнения от времени и пространственных переменных, при которых эти решения существуют.

Литература

1. *Polyanin A. D., Zaytsev V. F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Ed.—Boca Raton–London: Chapman and Hall/CRC Press, 2012.—1841 p.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.—М.: Наука, 1978.—688 с.
3. *Хабиров С. В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа — Ампера // Мат. сб.—1990.—Т. 181, № 12.—С. 1607–1622.
4. *Шабловский О. Н.* Параметрические решения уравнения Монжа — Ампера и течения газа с переменной энтропией // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.—2015.—№ 1 (33).—С. 105–118. DOI: 10.17223/19988621/33/11.
5. *Погорелов А. В.* Многомерное уравнение Монжа — Ампера.—М.: Наука, 1988.—96 с.
6. *Губерман И. Я.* О существовании многих решений задачи Дирихле для многомерного уравнения типа Монжа — Ампера // Изв. вузов. Математика.—1965.—№ 4.—С. 54–63.
7. *Рахмелевич И. В.* Многомерное уравнение Монжа — Ампера со степенными нелинейностями по первым производным // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика.—2020.—№ 2.—С. 86–98.
8. *Ibragimov N. H.* CRC Handbook of Lie Groups to Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws.—Boca Raton, CRC Press, 1994.—429 p.
9. *Рахмелевич И. В.* О решениях двумерного уравнения Монжа — Ампера со степенной нелинейностью по первым производным // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.—2016.—№ 4 (42).—С. 33–43. DOI: 10.17223/19988621/42/4.
10. *Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics.—Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2006.
11. *Gutierres C. E.* The Monge–Ampere Equation.—Boston: Birkhauser, 2001.
12. *Taylor M. E.* Partial Differential Equations III. Nonlinear Equations.—N. Y.: Springer-Verlag, 1996.
13. *Полянин А. Д., Журов А. И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики.—М.: Изд-во ИПМех РАН, 2020.—384 с.
14. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.—М.: Наука, 1977.—288 с.

Статья поступила 24 декабря 2021 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 1, P. 64–80

MULTI-DIMENSIONAL NON-AUTONOMOUS EVOLUTIONARY EQUATION OF MONGE–AMPÈRE TYPE

Rakhmelevich, I. V.[1]

[1] Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia
E-mail: `igor-kitpd@yandex.ru`

Abstract. A multi-dimensional non-autonomous evolutionary equation of Monge–Ampère type is investigated. The left side of the equation contains the first time derivative with the coefficient depending on time, spatial variables and unknown function. The right side of the equation contains the determinant of Hessian matrix. The solutions with additive and multiplicative separation of variables are found. It is shown that a sufficient condition for the existence of such solutions is the representability of the coefficient of the time derivative as a product of functions in time and spatial variables. In the case when the time derivative coefficient is a function inverse to linear combination of spatial variables with coefficients depending on time, the solutions in the form of the quadratic polynomials in spatial variables is also found. The set of solutions in the form of the linear combination of functions of spatial variables with coefficients depending on time is obtained. Some reductions of the given equation to ordinary differential equations (ODE) in the cases when unknown function depends on sum of functions of spatial variables (in particular, sum of their squares) and function of the time are considered; in this case the functional separation of variables is used. Some reductions of the given equation to PDE of lower dimension are also found. In particular, the solutions in the form of function of the time and sum of squares of spatial variables as well as the solutions in the form of sum of such functions are obtained.

Key words: evolutionary equation, Monge–Ampère equation, separation of variables, reduction, ordinary differential equation, partial differential equation.

AMS Subject Classification: 35G20.

For citation: *Rakhmelevich, I. V.* Multi-Dimensional Non-Autonomous Evolutionary Equation of Monge–Ampère Type, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 1, pp. 64–80 (in Russian). DOI: 10.46698/o3604-7902-1000-g.

References

1. *Polyanin, A. D. and Zaytsev, V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Ed., Boca Raton, London, Chapman and Hall-CRC Press, 2012.
2. *Rozhdestvenskii, B. L. and Yanenko, N. N. Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ih prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasylinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics], Moscow, Nauka Publ., 1988 (in Russian).
3. *Khabirov, S. V.* Nonisentropic One-Dimensional Gas Motions Constructed with by Means of Contact Group of the Nonhomogeneous Monge–Ampère Equation, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 447–462. DOI: 10.1070/SM1992v071n02ABEH001405.
4. *Shablovskii, O. N.* Parametric Solution for the Monge–Ampere Equation and Gas Flow with Variable Entropy, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2015, no. 1 (33), pp. 105–118 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/33/11.
5. *Pogorelov, A. V. Mnogomernoe uravnenie Monga–Ampera* [Multi-Dimensional Monge–Ampère Equation], Moscow, Nauka Publ., 1988 (in Russian).
6. *Guberman, I. Ya.* On Existence of Many Solutions of Dirichlet Problem for Multi-Dimensional Equation of Monge–Ampère Type, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1965, no. 4, pp. 54–63 (in Russian).
7. *Rakhmelevich, I. V.* Multi-Dimensional Monge–Ampère Equation with Power-Law Non-Linearities on the First Derivatives, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Fizika. Matematika* [Proceedings of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics], 2020, no. 2, pp. 86–98.

8. *Ibragimov, N. H. CRC Handbook of Lie Groups to Differential Equations. Vol.* 1. *Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, Boca Raton, CRC Press, 1994, 429 p.
9. *Rakhmelevich, I. V.* On the Solutions of Two-Dimensional Monge–Ampère Equation with Power-Law Non-Linearity on the First Derivatives, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2016, no. 4 (42), pp. 33–43 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/42/4.
10. *Galaktionov, V. A. and Svirshchevskii, S. R. Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics*, Boca Raton, Chapman and Hall/CRC Press, 2006.
11. *Gutierres, C. E. The Monge–Ampère Equation*, Boston, Birkhauser, 2001.
12. *Taylor, M. E. Partial Differential Equations III. Nonlinear Equations*, New York, Springer-Verlag, 1996.
13. *Polyanin, A. D. and Zhurov, A. I. Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Variables Separation Methods and Exact Solutions of Nonlinear Equations in Mathematical Physics], Moscow, IPMech RAN Publ., 2020 (in Russian).
14. *Faddeev, D. K. and Sominsky, I. S. Sbornik zadach po vyshey algebre* [Collection of Problems on Highest Algebra], Moscow, 1977 (in Russian).

Received December 24, 2021

Igor V. Rakhmelevich
Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia,
Assosiate Professor
E-mail: `igor-kitpd@yandex.ru`