Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 1, С. 105–111

УДК 517.518.8
DOI 10.46698/m0485-4484-9134-k

О МНОГОЧЛЕНАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СЕГМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Ю. Трынин[1,2]

[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83;
[2] Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

E-mail: tayu@rambler.ru

Аннотация. Предложен алгоритм поиска многочлена наилучшего приближения для непрерывной многозначной сегментной функции, заданной на совокупности не пересекающихся отрезков $X = \left(\bigcup_{j_1=0}^{n_1}[a_{j_1}, b_{j_1}]\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} x_k\right)$ таких, что $\left(\bigcup_{j_1=0}^{n_1}[a_{j_1}, b_{j_1}]\right) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} x_k\right) = \varnothing$, где не пересекающиеся отрезки $[a_{j_1}, b_{j_1}]$ и точки x_k принадлежат ограниченному отрезку $[A, B] \subset \mathbb{R}$. Считаем, что функции f_1 и f_2 непрерывны на множестве X, и всюду на X значение функции $f_1(x)$ не превосходит значение функции $f_2(x)$. Оператор, ставящий в соответствие каждому $x \in X$ отрезок $[(x, f_1(x)), (x, f_2(x))]$, будем называть сегментной функцией $\mathscr{F}(x)$, заданной на X. В силу непрерывности функций f_1 и f_2 сегментная функция $\mathscr{F}$ является h-полунепрерывным отображением сверху. Многочлен $P_m = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ наилучшего приближения в метрике Хаусдорфа на множестве X сегментной функции $\mathscr{F}$ с вектором коэффициентов $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ есть решение экстремальной задачи $\min_{\vec{a} \in \mathbb{R}^{m+1}} \max_{x \in X} \max(P_m(x) - f_1(x), f_2(x) - P_m(x))$. Методами конструктивной теории функций показано, что для любых непрерывных на X функций $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ существует многочлен наилучшего приближения в хаусдорфовой метрике h-полунепрерывной сверху на множестве X сегментной функции $\mathscr{F}(x)$. Предложен алгоритм описания множества коэффициентов $\vec{a}$ многочленов наилучшего приближения сегментной функции. Получены необходимые и достаточные условия единственности многочлена наилучшего приближения сегментной функции. Приведены результаты численных экспериментов, реализованных с помощью предложенного алгоритма.

Ключевые слова: наилучшее приближение функции, аппроксимация многочленами, сегментная функция.

AMS Subject Classification: 65D15, 26E25.

Образец цитирования: *Трынин А. Ю.* О многочленах наилучшего приближения сегментных функций // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 1.—С. 105–111. DOI: 10.46698/m0485-4484-9134-k.

1. Введение

В [1] подробно изложены основы теории многозначных отображений, имеющих широкий спектр прикладных возможностей, так как использование многозначных отображений позволяет в процессе реализации алгоритма сразу оценивать погрешность приближения решения. При этом подход, разработанный автором монографии [1], не предполагает использования интервальной арифметики, что снимает вопрос о построении поля интервалов или его аналогов. Вместе с тем, теория, разработанная в [1], в значительной степени справляется с многими основными задачами интервальной математики.

Пусть

$$X = \left(\bigcup_{j_1=0}^{n_1}[a_{j_1}, b_{j_1}]\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} x_k\right), \quad \left(\bigcup_{j_1=0}^{n_1}[a_{j_1}, b_{j_1}]\right) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} x_k\right) = \varnothing, \tag{1}$$

где не пересекающиеся отрезки $[a_{j_1}, b_{j_1}]$ и точки x_k принадлежат ограниченному отрезку $[A, B] \subset \mathbb{R}$. Считаем, что функции f_1 и f_2 непрерывны на множестве X, и всюду на X выполняется соотношение $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Оператор, ставящий в соответствие каждому $x \in X$ отрезок $[(x, f_1(x)), (x, f_2(x))]$, вслед за авторами работ [2–5] будем называть на X сегментной функцией $\mathscr{F}(x)$. В силу непрерывности функций f_1 и f_2 сегментная функция $\mathscr{F}$ является h-полунепрерывным отображением сверху (см. [1, § 6]). Многочлен P_m наилучшего приближения в метрике Хаусдорфа на множестве X сегментной функции $\mathscr{F}$ с вектором коэффициентов $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ есть решение экстремальной задачи

$$\begin{gathered} \min_{\vec{a}\in\mathbb{R}^{m+1}} \max_{x\in X} \max\big(P_m(x) - f_1(x), f_2(x) - P_m(x)\big), \\ P_m(x) = \big(\vec{a}, \big(1, x, \dots, x^m\big)\big) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i. \end{gathered} \tag{2}$$

В случае $f_1 \equiv f_2$ задача (2) сводится к классической теореме П. Л. Чебышева для множества X.

В публикациях [2–5] приводятся необходимые и достаточные условия существования и единственности многочлена наилучшего приближения (2) для случая, когда X представляет собой либо отрезок, либо конечный набор точек. Эти работы используют методики доказательства теоремы П. Л. Чебышева и выпуклого анализа. В этом случае, даже когда X представляет собой конечный набор из n точек, количество систем, которые необходимо решить для поиска многочлена степени m, растет как C_n^{m+2}. Кроме того, многочлен, наилучшим образом приближающий сегментную функцию, одновременно представляет собой многочлен наилучшего приближения некоторой классической функции. А из результатов исследований в работах [6, 7] следует, что независимо от метода решения задачи (2) его численная реализация возможна только для небольших степеней и хороших функций, так как модули коэффициентов многочленов наилучшего приближения непрерывных функций с ростом степени многочленов могут расти быстрее геометрической прогрессии. Тем не менее в данной работе предложен другой подход к изучению этой проблемы на основе классического анализа и теории функций. Здесь приведен также ряд примеров численных экспериментов, позволяющих убедиться в конструктивности предложенного метода исследований.

2. Основной результат

Определим функцию ограниченной вариации на $[A, B]$:

$$\mu(x) = \int_A^x \chi(\xi)\, d\xi + \sum_{x_k \leqslant x} 1, \qquad \text{где} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in X, \\ 0, & \text{при } x \in [A, B] \setminus X, \end{cases} \tag{3}$$

где X определено в (1), и будем рассматривать ее как меру в интеграле Стилтьеса. Сделав обозначение

$$\mathscr{R}(a, x, m, f) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i - \frac{f_1(x) + f_2(x)}{2},$$

для каждого $p \in \mathbb{N}$ определим систему уравнений

$$\begin{gathered}\int\limits_A^B x^i \left\{ \mathscr{R}(a,x,m,f) \operatorname{arctg}(p\mathscr{R}(a,x,m,f)) + \frac{\pi(f_2(x) - f_1(x))}{4} \right\}^{2p-1} \\ \times \left(\operatorname{arctg}(p\mathscr{R}(a,x,m,f)) + \frac{p\mathscr{R}(a,x,m,f)}{p^2\mathscr{R}(a,x,m,f)^2 + 1} \right) d\mu(x) = 0, \quad i = 0, \dots, m,\end{gathered} \tag{4}$$

относительно неизвестных $\vec{a} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Обозначим через E_p замыкание множества решений системы (4) при каждом $p \in \mathbb{N}$ и

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{p=k}^{\infty} E_p}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для любых непрерывных на X функций $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ существует многочлен наилучшего приближения (2) в хаусдорфовой метрике h-полунепрерывной сверху на множестве (1) сегментной функции $\mathscr{F}(x)$. Он единственен тогда и только тогда, когда множество (5) одноточечное в $\mathbb{R}^{m+1}$. Любой вектор $\vec{a} \in E$ имеет координаты, являющиеся коэффициентами многочлена наилучшего приближения.*

$\lhd$ Ввиду того, что для произвольной функции $g \in C[Y]$ справедливо соотношение

$$\lim_{p\to\infty} g(x)\,\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(pg(x)) = |g(x)|,$$

из которого следует (см., например, [8, гл. 1, § 3]) равенство

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int\limits_A^B \left\{ g(x) \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(pg(x)) \right\}^{2p} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2p}} = \operatorname*{vrai\,max}_{x\in Y} |g(x)| = \|g\|_{C[Y]},$$

величина уклонения многочлена P_m от сегментной функции $\mathscr{F}$ в метрике Хаусдорфа на множестве X может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(\mathscr{F}, P_m) = \lim_{p\to\infty} \Biggl(\int\limits_A^B \Biggl\{ &\mathscr{R}(a,x,m,f)\,\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(p\mathscr{R}(a,x,m,f)) \\ &+ \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \Biggr\}^{2p} d\mu(x) \Biggr)^{\frac{1}{2p}}.\end{aligned} \tag{6}$$

Подынтегральная функция, как сумма (возможно нестрого) выпуклых функций с неотрицательной второй производной, в (6), как функция переменных a_i, является выпуклой (возможно нестрого) на $\mathbb{R}^{m+1}$. Поэтому при каждом $p \in \mathbb{N}$ множество векторов коэффициентов экстремальных многочленов таких, что подынтегральная функция наименее уклоняется от нуля по норме пространства $L^{2p}[X]$, является, в силу необходимого условия экстремума, множеством решений систем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_i} \Biggl(\int\limits_A^B \Biggl\{ &\mathscr{R}(a,x,m,f)\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(p\mathscr{R}(a,x,m,f)) \\ &+ \frac{f_2(x) - f_1(x)}{2} \Biggr\}^{2p} d\mu(x) \Biggr)^{\frac{1}{2p}} = 0, \quad i = 0, \dots, m,\end{aligned} \tag{7}$$

или эквивалентных системам (7) систем (4). Непустота множества решений этих систем следует из необходимого условия экстремума, непрерывной дифференцируемости неотрицательной подынтегральной функции по всем переменным и ее неограниченного возрастания по любому направлению пространства $\mathbb{R}^{m+2}$ при стремлении аргумента к бесконечности.

Так как функции f_1 и f_2 непрерывны на множестве (1), то предельный переход в интеграле Стилтьеса обосновывается с помощью теоремы 2 из [9, гл. 8, § 7].

Коэффициенты экстремальных многочленов, наименее уклоняющихся от сегментной функции $\mathscr{F}(x)$ в метрике Хаусдорфа, в силу замкнутости множества нулей непрерывной функции составляют множество (5) точек прикосновения всевозможных пределов подпоследовательностей решений систем (4).

По теореме Кантора [8, гл. 5, § 1] множество (5) не пусто. ▷

3. Результаты некоторых численных экспериментов

В этом параграфе приведем результаты численных экспериментов, организованных с помощью утверждения теоремы 1. Решение систем (4) осуществлялось с помощью некоторой адаптации стандартных методов наискорейшего спуска или покоординатного спуска к решению изучаемой экстремальной задачи. На рисунке 1 изображена реализация примера, демонстрирующего, что рассматриваемый многочлен первой степени наилучшего приближения отличается от Чебышевского наилучшего приближения середин отрезков сегментной функции. На рисунке 2 график одного из многочленов двенадцатой степени наилучшим образом аппроксимирущих в метрике Хаусдорфа ту же сегментную функцию, что и на рисунке 1.

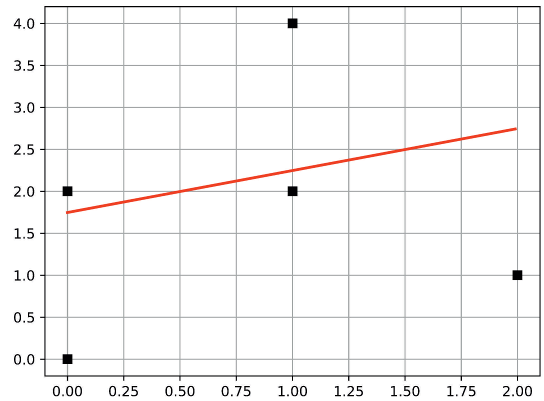

Рис. 1. $n = 2$, $m = 1$.

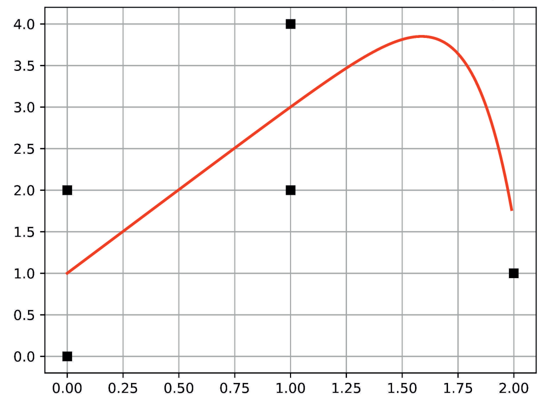

Рис. 2. $n = 2$, $m = 12$.

Рис. 3 демонстрирует возможность предлагаемого метода обрабатывать большие массивы данных. В качестве модели сегментной функции рассматривается пара $f_1(x_k) = \sin 7x_k - 1$, $f_2(x_k) = \sin 7x_k + 0.1x_k + 1$, где $0 \leqslant k \leqslant 1000$. В качестве многочлена наилучшего приближения взята линейная функция.

Еще один очевидный пример наилучшего Хаусдорфова приближения сегментной функции $f_1(x_k) = \sin x_k - 1$, $f_2(x_k) = \sin x_k + 1$, где $0 \leqslant k \leqslant 3$, многочленом первой степени, который вычислен с помощью теоремы 1, приведен на рис. 4.

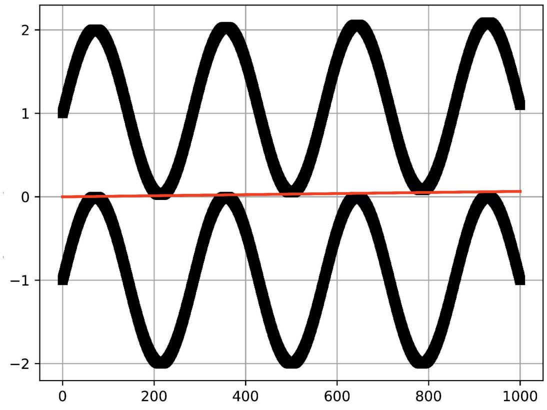

Рис. 3. $n = 1000$, $m = 1$.

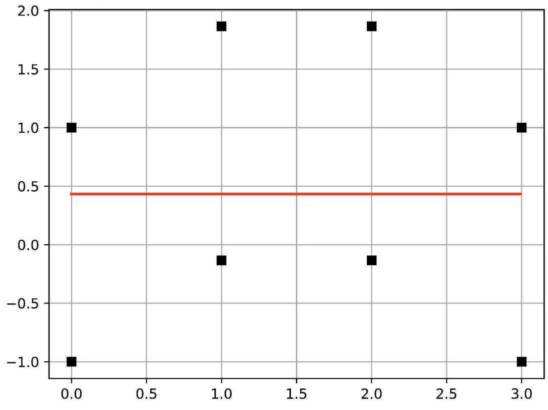

Рис. 4. $n = 3$, $m = 1$.

Рис. 5 содержит график реализации приближения сегментной функции $\mathscr{F}(0) = [(0,1),(0,1)]$, $\mathscr{F}(1) = [(1,0),(1,2)]$ многочленами наилучшего Хаусдорфова приближения первого порядка, которые вычислены с помощью теоремы 1 два раза. Это та ситуация, когда многочлен наилучшего приближения не единственен. В этом случае множество E представляет собой отрезок $[(2,-1),(0,1)]$. Адаптация метода наискорейшего спуска, о которой шла речь в начале этого параграфа, позволяет приближенно вычислять коэффициенты многочленов наилучшего приближения с границы множества E, выбирая различные начальные итерации. Графики двух таких многочленов и получены в результате описанного численного эксперимента.

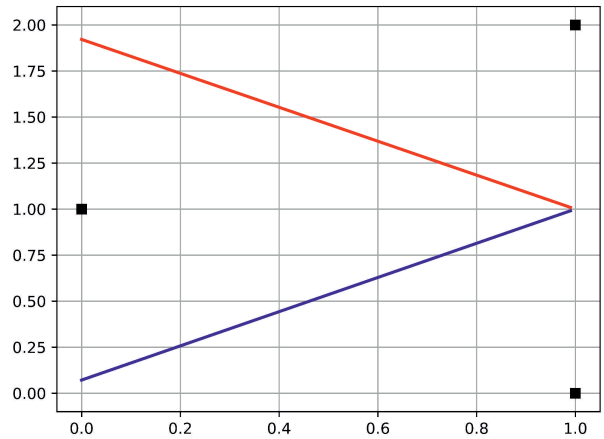

Рис. 5. Многочлены с коэффициентами с границы множества E, $n = 1$, $m = 1$.

Литература

1. *Половинкин Е. С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения.—М.: Физматлит, 2014.—524 с.
2. *Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Журн. вычисл. матем. и мат. физ.—2009.—Т. 49, № 7.—С. 1175–1183.
3. *Выгодчикова И. Ю.* О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2006.—Т. 6, № 1–2.—С. 11–19. DOI: 10.18500/1816-9791-2006-6-1-2-11-19.
4. *Выгодчикова И. Ю.* Об аппроксимации многозначного отображения алгебраическим полиномом с ограничениями // Изв. вузов. Мат.—2015.—№ 2.—С. 30–34.

5. *Выгодчикова И. Ю.* О приближении двузначной функции алгебраическим полиномом // Изв. вузов. Мат.—2016.—№ 4.—С. 8–13.
6. *Stafney J. D.* A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0,1]$ // Duke Math. J.—1967.—Vol. 34, № 3.—P. 393–396. DOI: 10.1215/S0012-7094-67-03443-6.
7. *Хавинсон С. Я.* Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций // Мат. заметки.—1969.—Т. 6, № 5.—С. 619–625.
8. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.—М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1965.—520 с.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.—М.: Наука, 1974.—480 с.

Статья поступила 13 января 2022 г.

Трынин Александр Юрьевич
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского,
профессор кафедры диф. уравнений и мат. экономики
РОССИЯ, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83;

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
РОССИЯ, 119991, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: `tayu@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0002-6304-4962

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 1, P. 105–111

ON THE BEST POLYNOMIALS APPROXIMATION OF SEGMENT FUNCTIONS

Trynin, A. Yu.[1,2]

[1] Saratov State University,
83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia;
[2] Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics,
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

E-mail: `tayu@rambler.ru`

Abstract. An algorithm for finding the best approximation polynomial for a continuous multivalued segment function defined on a set of segments X is proposed, where $X = \left(\bigcup_{j_1=0}^{n_1}[a_{j_1}, b_{j_1}]\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} x_k\right)$ with $\left(\bigcup_{j_1=0}^{n_1}[a_{j_1}, b_{j_1}]\right) \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} x_k\right) = \varnothing$. The disjoint segments $[a_{j_1}, b_{j_1}]$ and points x_k belong to a bounded segment $[A, B] \subset \mathbb{R}$. We assume that the functions f_1 and f_2 are continuous on the set X, and everywhere on X the value of the function $f_1(x)$ does not exceed the value of the function $f_2(x)$. The operator assigning to each $x \in X$ the segment $[(x, f_1(x)), (x, f_2(x))]$ will be called the segments function $\mathscr{F}(x)$ defined on X. Since the functions f_1 and f_2 are continuous, the segments function $\mathscr{F}$ is an upper h-semicontinuous mapping. The polynomial $P_m = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ of the best approximation in the Hausdorff metric on the set X of a segment function $\mathscr{F}$ with a vector of coefficients $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ is a solution to the extremal problem $\min_{\vec{a}\in\mathbb{R}^{m+1}} \max_{x\in X} \max(P_m(x) - f_1(x), f_2(x) - P_m(x))$. It is shown by methods of constructive function theory that, for any functions $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ continuous on X, there exists some polynomial of best approximation in the Hausdorff metric as the segment function $\mathscr{F}(x)$ is upper h-semicontinuous on X. An algorithm for describing the set E of coefficients $\vec{a}$ of polynomials of the best approximation of a segment function is proposed. Necessary and sufficient conditions for the uniqueness of the polynomial of best approximation of the segment function are obtained. The results of numerical experiments carried out using the proposed algorithm are presented.

Key words: best approximation of functions, polynomial approximation, segment function.

AMS Subject Classification: 65D15, 26E25.

For citation: *Trynin, A. Yu.* On the Best Polynomials Approximation of Segment Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 1, pp. 105–111 (in Russian). DOI: 10.46698/m0485-4484-9134-k.

References

1. *Polovinkin, E. S. Mnogoznachnyy analiz i differentsial'nye vklyucheniya* [Multivalued Analysis and Differential Inclusions], Moscow, Fizmatlit, 2014, 524 p. (in Russian).
2. *Vygodchikova, I. Yu., Dudov, S. I. and Sorina, E. V.* External Estimation of a Segment Function by a Polynomial Strip, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 7, pp. 1119–1127. DOI: 10.1134/S0965542509070057
3. *Vygodchikova, I. Yu.* About the Only Solution in the Problem of the Best Plural Reflection's Approximation by Algebraic Polynomial, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2006, vol. 6, no. 1–2, pp. 11–19 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2006-6-1-2-11-19.
4. *Vygodchikova, I. Yu.* On Approximation of Multivalued Mapping by Algebraic Polynomial with Constraints, *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 2, pp. 25–28. DOI: 10.3103/S1066369X15020048.
5. *Vygodchikova, I. Yu.* Approximation of Double-Valued Function by an Algebraic Polynomial, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 4, pp. 5–9. DOI: 10.3103/ S1066369X16040022.
6. *Khavinson, S. Ya.* Permissible Values of Coefficients of Polynomials in Uniform Approximation of Continuous Functions, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1969, vol. 6, no. 5, pp. 834–838. DOI: 10.1007/BF01101413.
7. *Lyusternik, L. A. and Sobolev, V. I. Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1965, 520 p. (in Russian).
8. *Natanson, I. P. Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable], Moscow, Nauka, 1974, 480 p. (in Russian).

Received January 13, 2022

Alexander Yu. Trynin
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia,
Professor;
Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics,
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
E-mail: `tayu@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0002-6304-4962