

УДК 517.98

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА
В ВЕКТОРНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПРОГРАММАХ

Е. К. Басаева

*Памяти Юрия Александровича
Абрамовича посвящается*

Получены необходимые условия идеального и обобщенного экстремума для векторных квазидифференцируемых задач с ограничениями.

В цикле работ В. Ф. Демьянова, Л. Н. Поляковой и А. М. Рубинова [4–8, 11–14] введены квазидифференцируемые функции и построено исчисление квазидифференциалов. Необходимые и достаточные условия экстремума квазидифференцируемой функции исследовались в работах В. Ф. Демьянова и Л. Н. Поляковой [7, 11–13, 15], см. также [3, 6]. В работах [1, 2] квазидифференциальное исчисление распространяется на случай операторов, действующих из векторного пространства в произвольное K -пространство.

Статья посвящена приложениям квазидифференциального исчисления негладких отображений к многоцелевым экстремальным задачам и является продолжением работ [1, 2]. В первом параграфе приведены необходимые условия идеального оптимума для векторных квазидифференцируемых программ. Второй параграф посвящен анализу ограничений типа включения. Третий параграф содержит необходимые условия обобщенного экстремума.

В статье использованы обозначения и терминология из [9, 10].

1. Необходимые условия экстремума

Всюду в этом параграфе X — векторное пространство, а E — произвольное K -пространство. Рассмотрим программу (C, f) , т. е. многоцелевую экстремальную задачу $x \in C, f(x) \rightarrow \inf$, где $C \subset X$ — некоторое множество, а $f : X \rightarrow E^\bullet$ — отображение, предполагаемое в дальнейшем квазидифференцируемым в нужной точке $\text{core}(\text{dom}(f))$. Локальный оптимум в этой задаче будем понимать в следующем смысле: точка $x_0 \in C$ — *идеальный локальный инфимум (супремум)* в программе $x \in C, f(x) \rightarrow \inf$ (или $x \in C, f(x) \rightarrow \sup$), если существует множество $U \subset X$ такое, что $0 \in \text{core}(U)$ и $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}$ (соответственно, $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}$).

1.1. Теорема. Пусть отображение $f : X \rightarrow E^\bullet$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \text{core}(\text{dom}(f))$. Если x_0 — идеальный локальный оптимум в безусловной векторной программе $f(x) \rightarrow \inf$, то $\bar{\partial}f(x_0) \subset \underline{\partial}f(x_0)$ или, что то же самое, $\mathcal{D}f(x_0) \geq 0$.

◁ Так как точка x_0 является идеальным локальным оптимумом программы $f \rightarrow \inf$ и отображение f дифференцируемо по направлениям в этой точке, то для любого $h \in X$ при достаточно малых $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$0 \leq \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = f'(x_0)(h) + \frac{o(\alpha, x_0, h)}{\alpha}.$$

Переходя в этом неравенстве к o -пределу при $\alpha \downarrow 0$, мы видим, что $f'(x_0)h \geq 0$ для всех $h \in X$. Далее, в силу квазидифференцируемости f будет $f'(x_0)h = p(h) - q(h) \geq 0$ ($h \in X$), где $p, q \in \text{Sbl}(X, E)$ таковы, что $\partial p = \underline{\partial}f(x_0)$ и $\partial q = \overline{\partial}f(x_0)$. Тем самым $p \geq q$, что равносильно включению $\partial q \subset \partial p$, совпадающему с точностью до обозначений с требуемым. ▷

Заметим, что необходимые условия оптимальности в теореме допускают следующую эквивалентную форму записи:

$$\overline{\partial}f(x_0) \subset \underline{\partial}f(x_0) \leftrightarrow 0 \in \bigcap_{v \in \overline{\partial}f(x_0)} (\underline{\partial}f(x_0) - v).$$

1.2. Рассмотрим векторную программу вида (C, f) , где $C := \{x \in X : g(x) \leq 0\}$, причем отображения f и g квазидифференцируемы в нужной точке. Эту программу мы будем обозначать символом (g, f) . Введем необходимое для дальнейшего условие квазирегулярности. Пусть X — векторное пространство, а E и F — некоторые K -пространства.

(1) Рассмотрим отображения $f : X \rightarrow E^\bullet$ и $g : X \rightarrow F^\bullet$. Векторную программу (g, f) называют *квазирегулярной в точке* $x_0 \in \text{core}(\text{dom}(g))$, если выполнены условия:

(а) существуют сублинейный оператор Магарам $r : F \rightarrow E$ и поглощающее множество $U \subset X$ такие, что для любого $x \in x_0 + U$ выполняется $\pi_x f(x_0) \leq \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(б) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T \circ \overline{\partial}g(x_0) \cap \pi T \circ \underline{\partial}g(x_0) = \emptyset$.

Условие (а) выполняется, если, например, существует такой сублинейный оператор Магарам $r : F \rightarrow E$, что для любого $x \in X$ из $g(x) \not\leq 0$ следует $r \circ g(x) \geq 0$.

(2) Рассмотрим векторную программу (K, L, l) , где L и l те же, что и выше, а $K \subset X$ — конус (вообще говоря, невыпуклый), допускающий представление $K = \bigcup_{\xi \in \Xi} K_\xi$, где $(K_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство выпуклых конусов. В этом случае программу (K, L, l) мы будем называть *квазилинейной*.

Скажем, что квазилинейная программа (K, L, l) *квазирегулярна*, если выполнены условия:

(а') существует сублинейный оператор Магарам $R : F \rightarrow E$ такой, что для любого $h \in K$ будет $\pi l(h) \geq 0$, где $\pi := [(R \circ L(h))^-]$;

(б') для любых оператора $T \in \partial R$, индекса $\xi \in \Xi$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место соотношение $\pi T \circ \overline{\partial}L \cap (\pi T \underline{\partial}L + \pi N_E(K_\xi)) = \emptyset$.

Условие (а') выполнено, если существует сублинейный оператор Магарам $R : F \rightarrow E$ такой, что если $h \in K$ и $L(h) \not\leq 0$, то $R \circ L(h) \geq 0$.

Если $L = P - Q$ для некоторых $P, Q \in \text{QL}(X, F)$, то условие (б') можно переписать в следующем эквивалентном виде: для любых операторов $S \in \overline{\partial}L$ и $T \in \partial R$, индекса $\xi \in \Xi$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ существуют проектор $0 \neq \pi' \leq \pi$ и элемент $\bar{x} \in K_\xi$ такие, что $\pi' T S \bar{x} > \pi' T P \bar{x}$.

Как видно, при $K = K_\xi = X$ программа (K, L, l) совпадает с программой (L, l) , а условия (а') и (б') превращаются в условие квазирегулярности (2).

1.3. Теорема. Пусть для квазилинейной программы (K, L, l) выполнено условие квазирегулярности 1.2 (2). Тогда равносильны следующие утверждения:

(1) нуль является решением программы (K, L, l) ;

(2) для любых $s \in \bar{\partial}l$, $S \in \bar{\partial}L$ и $\xi \in \Xi$ существуют ортоморфизм $\alpha \in \text{Orth}(E)$, оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ и линейный оператор $\lambda \in L(X, E)$ такие, что

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha \leq I_E, \quad \ker \alpha = \{0\}, \quad \lambda \in N_E(K_\xi), \\ -\lambda \in \alpha \circ (\underline{\partial}l - s) + \gamma \circ (\underline{\partial}L - S). \end{aligned}$$

\triangleleft (1) \rightarrow (2): В силу квазилинейности l нуль будет идеальным решением квазилинейной векторной программы (K, L, l) в том и только в том случае, если для любого $h \in K$ из $L(h) \leq 0$ следует $l(h) \geq 0$. Отсюда видно, что нуль является идеальным оптимумом в векторной программе (K, L, l) тогда и только тогда, когда для любого $\xi \in \Xi$ он является оптимальным в задаче $h \in K_\xi, \varphi(h) \rightarrow \inf$, где $\varphi : h \mapsto l(h) \vee r \circ L(h)$. Таким образом, если нуль — решение задачи (K, L, l) , то для любого $\xi \in \Xi$ будет

$$l(h) \vee R \circ L(h) \geq 0 \quad (h \in K_\xi).$$

Пусть сублинейные операторы $p, q \in \text{QL}(X, E)$ и $P, Q \in \text{QL}(X, F)$ таковы, что $l = p - q$ и $L = P - Q$. Тогда ввиду [9; 1.4.14 (2)] будет

$$\inf_{\substack{s \in \partial q \\ S \in \partial Q}} (p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) \geq 0 \quad (h \in K),$$

следовательно, для любых $s \in \partial q$, $S \in \partial Q$ и $\xi \in \Xi$ справедливо неравенство

$$(p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) \geq 0 \quad (h \in K_\xi).$$

Пусть $\delta(K)$ обозначает E -значный индикаторный оператор множества K . Тогда последнее можно переписать в эквивалентной форме:

$$(p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) + \delta(K_\xi)(h) \geq 0 \quad (h \in X).$$

Привлекая формулы субдифференцирования 2.1.7 (1), 3.2.8 из [9] и 4.5.2 из [10], выводим

$$\begin{aligned} 0 \in \partial \left((p - s) \vee r \circ (P - S) \right) + \partial \delta(K_\xi) \\ = \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \text{Orth}^+(E) \\ \alpha + \beta = I_E}} \left(\alpha(\partial p - s) + \beta \left(\bigcup_{T \in \partial r} T \circ (\partial P - S) \right) \right) + N_E(K_\xi). \end{aligned}$$

Здесь $N_E(K_\xi) := \pi_E(K_\xi) := \partial \delta(K_\xi) = \{T' : T'h \leq 0, h \in K_\xi\}$ — нормальный конус к выпуклому конусу K_ξ (см. [9; 3.2.3]). Таким образом, для любых $s \in \partial q$, $S \in \partial Q$ и $\xi \in \Xi$ существуют ортоморфизмы $\alpha, \beta \in \text{Orth}^+(E)$, $\alpha + \beta = I_E$, линейный оператор Магарам $T \in \partial r$ и линейный оператор $\lambda \in N_E(K_\xi)$ такие, что

$$-\lambda \in \alpha \circ (\partial p - s) + \beta \circ T \circ (\partial P - S)$$

или, что то же самое в силу двойственности Минковского,

$$\alpha(p(h) - s(h)) + \beta \circ T \circ (P(h) - S(h)) + \lambda(h) \geq 0 \quad (h \in X).$$

Обозначим через π проектор на компоненту $\ker(\alpha) \subset E$ и заметим, что $\pi\alpha = 0$ и $\pi\beta = \pi(I_E - \alpha) = \pi$. Применив проектор π к последнему неравенству, получим

$$\pi T \circ (P(h) - S(h)) + \pi\lambda(h) \geq 0 \quad (h \in X)$$

или эквивалентно

$$\pi T \circ S \in \pi T \circ \partial P + \pi\lambda.$$

Если теперь предположить, что $\pi \neq 0$, то в силу квазирегулярности рассматриваемой программы $\pi T S \notin \pi T \partial P + \pi N_E(K_\xi)$. Полученное противоречие означает, что $\pi = 0$ или $\ker(\alpha) = \{0\}$. Обозначив $\gamma := \beta \circ T$, получаем требуемые необходимые условия.

(2) \rightarrow (1): Пусть выполнены необходимые условия (2). Субдифференциальное включение из (2) в силу двойственности Минковского равносильно неравенству

$$\alpha(p(h) - s(h)) + \gamma(P(h) - S(h)) + \lambda(h) \geq 0 \quad (h \in X).$$

Возьмем какую-нибудь допустимую точку $h \in X$, т. е. $h \in K$ и $L(h) \leq 0$. Тогда $\gamma L(h) \leq 0$, так как γ — положительный оператор. Подберем $s \in \bar{\partial}l$, $S \in \bar{\partial}L$ и $\xi \in \Xi$ так, чтобы $h \in K_\xi$, $s(h) = q(h)$ и $S(h) = Q(h)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha(p(h) - s(h)) + \gamma(P(h) - S(h)) + \lambda(h) \leq \\ &\leq \alpha(p(h) - q(h)) + \gamma(P(h) - Q(h)) = \alpha l(h) + \gamma L(h) \leq \alpha l(h). \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha l(h) \geq 0$ и поскольку $\ker(\alpha) = \{0\}$, получаем $l(h) \geq 0$. \triangleright

1.4. Теорема. Предположим, что выполнено условие квазирегулярности 1.2 (1). Если допустимая точка x_0 есть идеальный локальный оптимум квазирегулярной квазидифференцируемой задачи (g, f) , то для любых $s \in \bar{\partial}f(x_0)$ и $S \in \bar{\partial}g(x_0)$ существуют положительный ортоморфизм $\alpha \in \text{Orth}^+(E)$ и оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ такие, что совместна система условий

$$\begin{aligned} \ker \alpha &= \{0\}, \quad \gamma \circ g(x_0) = 0, \\ 0 &\in \alpha(\bar{\partial}f(x_0) - s) + \gamma \circ (\bar{\partial}g(x_0) - S). \end{aligned}$$

\triangleleft Положим $\tilde{f} := f - f(x_0)$ и $\tilde{g} := r \circ g$, где отображение r удовлетворяет 1.2 (1), и введем штраф $\varphi := \tilde{f} \vee \tilde{g}$. Как видно, допустимая точка x_0 будет идеальным локальным оптимумом в векторной программе (g, f) тогда и только тогда, когда она локально оптимальна в безусловной задаче $\varphi(x) \rightarrow \inf$. В силу теорем о производной по направлениям композиции и максимума [2; теоремы 3.1 и 3.3] отображение φ дифференцируемо по направлениям. Поэтому если x_0 — идеальный оптимум задачи (g, f) , то согласно 1.1

$$\varphi'(x_0)h \geq 0 \quad (h \in X).$$

Воспользовавшись формулой вычисления производной максимума из [2; теорема 3.3], получаем

$$\varphi'(x_0)h = \bigvee_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})} \left(\tilde{\alpha} f'(x_0)h + \tilde{\beta} \tilde{g}'(x_0)h \right) \quad (h \in X).$$

Включение $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$ означает по определению, что

$$0 = \varphi(x_0) = \tilde{\alpha} \tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0) = \tilde{\beta} \tilde{g}(x_0),$$

следовательно, имеет место представление

$$\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g}) = \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \text{Orth}^+(E) : \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E, \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = 0\}.$$

Обозначим через ρ проектор на компоненту, порожденную элементом $\tilde{g}(x_0)$. Используя найденное представление для $\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$, находим, что $\Gamma_2(x_0; \rho\tilde{f}, \rho\tilde{g}) = \{(\rho, 0)\}$ и

$$\Gamma_2(x_0; \rho^d\tilde{f}, \rho^d\tilde{g}) = \{(\rho^d\tilde{\alpha}, \rho^d\tilde{\beta}) : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \text{Orth}^+(E), \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E\}.$$

Таким образом, привлекая [9; 2.1.5 (3)] и формулу для вычисления производной по направлениям композиции [2; теорема 3.1], выводим

$$\begin{aligned} \rho^d\varphi'(x_0)h &= \rho^d \bigvee_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=I_E} (\tilde{\alpha}(f'(x_0)h + \tilde{\beta}\tilde{g}'(x_0)h)) = \rho^d(f'(x_0)h \vee \tilde{g}'(x_0)h) \\ &= \rho^d(f'(x_0)h \vee r'(g(x_0))(g'(x_0)h)), \\ \rho\varphi'(x_0)h &= \rho f'(x_0)h \quad (h \in X). \end{aligned}$$

Положим $l := \rho^d f'(x_0)$, $L := \rho^d g'(x_0)$ и $R := \rho^d r'(g(x_0))$ и заметим, что по условию $l \in \text{QL}(X, \rho^d E)$, $L \in \text{QL}(X, F)$ и $R \in \text{Sbl}(F, \rho^d E)$. Так как $\partial R \subset \partial r$, то согласно [10; теорема 4.4.7] R — сублинейный оператор Магарам. Как видно, $\phi(h) := l(h) \vee R \circ L(h) \geq 0$ для всех $h \in X$, а условие квазирегулярности 1.2 (1) влечет квазирегулярность векторной программы (L, l) . Согласно 1.3 соотношение $0 \leq \phi(h)$ ($h \in X$) справедливо в том и только в том случае, когда для любых $s \in \bar{\partial}f(x_0)$ и $S \in \bar{\partial}g(x_0)$ существуют ортоморфизмы $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \text{Orth}^+(E)$ и оператор $T \in \underline{\partial}r(g(x_0))$ такие, что $\ker\{\tilde{\alpha}\} = 0$ и

$$0 \in \rho^d\tilde{\alpha}(\underline{\partial}f(x_0) - s) + \rho^d\tilde{\beta} \circ T \circ (\underline{\partial}g(x_0) - S).$$

Далее, для проектора ρ при любом $s \in \bar{\partial}f(x_0)$ будет

$$0 \in \rho(\underline{\partial}f(x_0) - s).$$

Сложив последние два включения, содержащие ρ и ρ^d , получим

$$0 \in (\rho + \rho^d\tilde{\alpha})(\underline{\partial}f(x_0) - s) + \rho^d\tilde{\beta}T \circ (\underline{\partial}g(x_0) - S).$$

Обозначив $\alpha := \rho + \rho^d\tilde{\alpha}$ и $\gamma := \rho^d\tilde{\beta} \circ T$, перепишем последнее соотношение в виде

$$0 \in \alpha(\underline{\partial}f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial}g(x_0) - S).$$

Легко видеть, что $\alpha \in \text{Orth}^+(E)$ и $\gamma \in L^+(F, E)$ — оператор Магарам. Заметим, далее, что $T \in \partial R$ тогда и только тогда, когда $T \in \partial r$ и $T \circ g(x_0) = r \circ g(x_0) = \tilde{g}(x_0)$. Кроме того, $\rho^d\tilde{g}(x_0) = 0$ и, следовательно, выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\gamma \circ g(x_0) = \rho^d\tilde{\beta} \circ T \circ g(x_0) = \tilde{\beta}\rho^d \circ \tilde{g}(x_0) = 0.$$

Пусть теперь π — проектор на компоненту $\ker(\alpha)$. Тогда $\pi\alpha = 0$ и, поскольку $\ker(\alpha) = \ker(\tilde{\alpha})$ и $\pi\tilde{\beta} = \pi(I_E - \tilde{\alpha}) = \pi$, приходим к соотношению

$$0 \in \pi\alpha(\underline{\partial}f(x_0) - s) + \pi(I_E - \alpha) \circ T \circ (\underline{\partial}g(x_0) - S) = \pi T \circ (\underline{\partial}g(x_0) - S).$$

Последнее означает, что $\pi T \circ S \in \pi T \circ \underline{\partial}g(x_0)$. Тем самым предположение $\pi \neq 0$ противоречит допущению (b) из условия квазирегулярности 1.2 (1). Следовательно, $\pi = 0$ или, что то же, $\ker(\alpha) = \{0\}$. \triangleright

2. Учет ограничений типа включения

В этом параграфе мы выведем необходимые условия экстремума в случае, когда в изучаемой задаче имеется ограничение в виде вхождения переменной в фиксированное множество. При этом условие регулярности последнего удобно формулировать, привлекая топологию в рассматриваемом векторном пространстве. В этой связи возникает необходимость определения топологического квазидифференциала. Для этого достаточно изменить определение квазилинейного отображения, понимая теперь под этим термином оператор, представимый в виде разности *непрерывных* сублинейных операторов.

2.1. Пусть X — топологическое векторное пространство, E — топологическое K -пространство и A^c — алгебра непрерывных ортоморфизмов на E . Конус положительных элементов топологического K -пространства считается нормальным. Поэтому двойственность Минковского ∂ определяет биекцию между множествами непрерывных (всюду определенных) сублинейных операторов и эквинепрерывных опорных множеств (см. [9; 3.2.2 (1)]).

Символом $QL^c(X, E)$ обозначим часть $QL(X, E)$, состоящую из квазилинейных операторов, представимых в виде разности непрерывных сублинейных операторов. Очевидно, что $QL^c(X, E)$ — решеточно упорядоченный A^c -модуль. Модульные и решеточные операции, а также отношение порядка наследуются из $QL(X, E)$. Элементы $QL^c(X, E)$ мы будем называть *непрерывными квазилинейными операторами*.

Аналогично, совокупность эквинепрерывных опорных множеств $CS_c^c(X, E)$ определяется как часть $CS_c(X, E)$, состоящая из опорных множеств непрерывных сублинейных операторов, см. [9; 3.2.2 (1)]. Тожественное вложение $\text{id} : CS_c^c(X, E) \rightarrow CS_c(X, E)$ в силу [9; теорема 1.3.2] продолжается до изоморфного вложения $[\text{id}]$ A^c -модуля $[CS_c^c(X, E)]$ в A^c -модуль $[CS_c(X, E)]$. Ввиду этого в дальнейшем мы будем считать, что $[CS_c^c(X, E)]$ содержится в $[CS_c(X, E)]$. Ограничение изоморфизма \mathcal{D} , определенного в [2; 1.3] (см. также [10; 6.1.3]), мы обозначим символом \mathcal{D}^c . Ясно, что \mathcal{D}^c осуществляет изоморфизм A^c -модулей $[CS_c^c(X, E)]$ и $QL^c(X, E)$.

2.2. Как видно из 2.1, для сохранения формул исчисления квазидифференциалов из [1, 2] в топологическом случае достаточно потребовать, чтобы в определении квазидифференцируемости производную по направлениям можно было представить в виде разности непрерывных сублинейных операторов.

Пусть X — топологическое векторное пространство и E — топологическое K -пространство. Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow E^\bullet$ и точку $x_0 \in \text{core}(\text{dom}(f))$. Будем говорить, что f *топологически квазидифференцируемо* в точке x_0 , если в этой точке существует производная Дини $f'(x_0)h$ по любому направлению $h \in X$ в смысле [1; п. 2.1] и отображение $f'(x_0) : h \rightarrow f'(x_0)h$ ($h \in X$) представляет собой непрерывный квазилинейный оператор.

Итак, если отображение f топологически квазидифференцируемо в точке x_0 , то квазилинейному оператору $f'(x_0) \in QL^c(X, E)$ в силу двойственности Минковского отвечает элемент $\mathcal{D}(f'(x_0)) \in [CS_c^c(X, E)]$, который называют *топологическим квазидифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\mathcal{D}^c f(x_0)$.

Если $f'(x_0)$ допускает представление в виде разности непрерывных сублинейных операторов p и q , то $\mathcal{D}^c f(x_0) = [\partial p, \partial q]$. При этом опорные множества ∂p и ∂q называют соответственно *топологическим субдифференциалом* и *топологическим супердифференциалом* отображения f в точке x_0 и обозначают символами $\underline{\partial}^c f(x_0)$ и $\overline{\partial}^c f(x_0)$ соответственно. Итак, $\mathcal{D}^c f(x_0) := [\underline{\partial}^c f(x_0), \overline{\partial}^c f(x_0)]$.

Формулы, составляющие исчисление топологических квазидифференциалов, совпадают со своими алгебраическими аналогами, приведенными в [1, 2], если заменить \mathcal{D} на \mathcal{D}^c , см. также [10; § 6.6].

2.3. Пусть X — топологическое векторное пространство $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Конус допустимых направлений $\text{Fd}(C, x_0)$ множества C в точке x_0 вводится формулой:

$$\text{Fd}(C, x_0) := \{h \in X : (\exists \varepsilon > 0) x_0 + [0, \varepsilon]h \subset C\}.$$

Множество C называют K -регулярным в точке x_0 , если K — выпуклый конус и $K \subset \text{cl}(\text{Fd}(C, x_0))$. Для K -регулярного в точке x_0 множества C вводится нормальный конус $N_E(C, x_0) := \pi_E(K) := \{T : Tk \leq 0, k \in K\}$ (см. [9; 3.2.3]). Как видно, нормальный конус к множеству в точке определяется неоднозначно.

Пусть множество $C \subset X$ K -регулярно в точке $x_0 \in C$, а отображение $f : X \rightarrow E^\bullet$ квазидифференцируемо в той же точке $x_0 \in \text{core}(\text{dom}(f))$. Для того чтобы x_0 была идеальным локальным оптимумом программы (C, f) , необходимо, чтобы выполнялось включение

$$\bar{\partial}^c f(x_0) \subset \underline{\partial}^c f(x_0) + N_E(C, x_0).$$

◁ Пусть $x_0 \in C$ является идеальным оптимумом векторной программы (C, f) . Так же, как и в 1.1 выводится, что $f'(x_0)(h) \geq 0$ для всех $h \in \text{Fd}(C, x_0)$. Но в рассматриваемой ситуации оператор $f'(x_0)(\cdot)$ непрерывен, следовательно, неравенство $f'(x_0)(h) \geq 0$ выполняется для всех $h \in \text{cl}(\text{Fd}(C, x_0))$. Если теперь $f'(x_0)(\cdot) = p(\cdot) - q(\cdot)$ для некоторых непрерывных сублинейных операторов $p, q \in \text{Sbl}(X, E)$, то в силу K -регулярности множества будет

$$0 \leq f'(x_0)(h) = p(h) - q(h) \quad (h \in K).$$

Последнее означает справедливость неравенства $q \leq p + \delta_E(K)$, которое, в свою очередь, равносильно соотношению

$$\partial^c q \subset \partial^c p + \partial^c \delta_E(K) = \partial^c p + N_E(C, x_0).$$

что и требовалось. ▷

В предложении (1) необходимые условия оптимальности могут быть записаны в следующей эквивалентной форме: для любого $s \in \bar{\partial}^c f(x_0)$ выполняется соотношение

$$0 \in (\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + N_E(C, x_0)$$

или, что то же самое,

$$(-N_E(C, x_0)) \cap (\underline{\partial}^c f(x_0) - s) \neq \emptyset.$$

2.4. Рассмотрим теперь векторную программу (C, g, f) . Пусть $x_0 \in C \cap \text{core}(\text{dom}(f)) \cap \text{core}(\text{dom}(g))$, и предположим, что отображения $f : X \rightarrow E^\bullet$, $g : X \rightarrow F^\bullet$ топологически квазидифференцируемы в точке x_0 . Скажем, что векторная программа (C, g, f) квазирегулярна в точке x_0 , если выполнены условия:

(а) существуют непрерывный сублинейный оператор Магарам $r : F \rightarrow E$ и окрестность U точки x_0 такие, что для любого $x \in C \cap U$ будет $\pi_x f(x_0) \leq \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(б) множество C является K -регулярным в точке x_0 ;

(с) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место соотношение $\pi T \circ \bar{\partial}^c g(x_0) \cap (\pi T \underline{\partial}^c g(x_0) + \pi N_E(C, x_0)) = \emptyset$.

2.5. Теорема. Пусть отображения f и g квазидифференцируемы в точке $x_0 \in C \cap \text{core}(\text{dom}(f)) \cap \text{core}(\text{dom}(g))$. Пусть векторная программа (C, g, f) квазирегулярна в точке x_0 . Если x_0 — идеальный локальный оптимум программы (C, g, f) , то для любых $s \in \bar{\partial}^c f(x_0)$ и $S \in \bar{\partial}^c g(x_0)$ существуют непрерывный ортоморфизм $\alpha \in \text{Orth}(E)$, непрерывный оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ и линейный непрерывный оператор $\lambda \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий:

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha \leq I_E, \quad \ker \alpha = \{0\}, \quad \lambda \in N_E(C, x_0), \quad \gamma \circ g(x_0) = 0, \\ -\lambda \in \alpha(\bar{\partial}^c f(x_0) - s) + \gamma \circ (\bar{\partial}^c g(x_0) - S). \end{aligned}$$

◁ Обозначим $\tilde{f} := f - f(x_0)$ и $\tilde{g} := r \circ g$, где отображение r удовлетворяет 2.4, и введем штраф $\varphi := \tilde{f} \vee \tilde{g}$. Как видно, допустимая точка x_0 будет идеальным локальным оптимумом в векторной программе (C, g, f) тогда и только тогда, когда она локально оптимальна в задаче (C, φ) . В силу теорем о производной по направлениям композиции и максимума [2; теоремы 3.1 и 3.3] отображение φ дифференцируемо по направлениям. Поэтому если x_0 — идеальный оптимум задачи (C, φ) , то

$$\varphi'(x_0)h \geq 0 \quad (h \in K).$$

Вновь воспользовавшись формулой вычисления производной максимума, получаем

$$\varphi'(x_0)h = \bigvee_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})} (\tilde{\alpha}f'(x_0)h + \tilde{\beta}g'(x_0)h) \quad (h \in X).$$

Включение $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$ означает по определению, что

$$0 = \varphi(x_0) = \tilde{\alpha}\tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0),$$

следовательно, имеет место представление

$$\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g}) = \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \text{Orth}^+(E) : \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E, \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = 0\}.$$

Обозначим через ρ проектор на компоненту, порожденную элементом $\tilde{g}(x_0)$. Используя найденное выше представление для множества $\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$, находим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x_0; \rho\tilde{f}, \rho\tilde{g}) &= \{(\rho, 0)\}, \\ \Gamma_2(x_0; \rho^d\tilde{f}, \rho^d\tilde{g}) &= \{(\rho^d\tilde{\alpha}, \rho^d\tilde{\beta}) : (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \text{Orth}^+(E), \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E\}. \end{aligned}$$

Таким образом, привлекая [9; 2.1.5 (3)] и формулу для вычисления производной по направлениям композиции из [2; теорема 3.1], выводим

$$\begin{aligned} \rho^d\varphi'(x_0)h &= \rho^d \bigvee_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E} (\tilde{\alpha}f'(x_0)h + \tilde{\beta}g'(x_0)h) \\ &= \rho^d(f'(x_0)h \vee g'(x_0)h) = \rho^d(f'(x_0)h \vee r'(g(x_0))(g'(x_0)h)); \\ \rho\varphi'(x_0)h &= \rho f'(x_0)h \quad (h \in X). \end{aligned}$$

Положим $l := \rho^d f'(x_0)$, $L := g'(x_0)$ и $R := \rho^d r'(g(x_0))$ и заметим, что по условию $l \in \text{QL}(X, \rho^d E)$, $L \in \text{QL}(X, F)$ и $R \in \text{Sbl}(F, \rho^d E)$. Так как $\partial R \subset \partial r$, то согласно [10; теорема 4.4.7] R — сублинейный оператор Магарам. Как видно, $\phi(h) := l(h) \vee R \circ L(h) \geq 0$ для всех $h \in K$, а условие квазирегулярности 2.4 влечет квазирегулярность векторной программы

(K, L, l) . Согласно 1.3 соотношение $0 \leq \phi(h)$ ($h \in K_\xi$) справедливо в том и только в том случае, когда для любых $s \in \bar{\partial}^c f(x_0)$ и $S \in \bar{\partial}^c g(x_0)$ существуют ортоморфизмы $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \text{Orth}^+(E)$, оператор $T \in \underline{\partial}^c r(g(x_0))$ и $\lambda \in N_E(K)$ такие, что $\ker \tilde{\alpha} = 0$ и

$$-\rho^d \lambda \in \rho^d \tilde{\alpha}(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \rho^d \tilde{\beta} \circ T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Далее, для проектора ρ (см. 2.1) при любом $s \in \bar{\partial}^c f(x_0)$ существует линейный оператор $\lambda \in N_E(K_\xi)$ такой, что

$$-\rho \lambda \in \rho(\underline{\partial}^c f(x_0) - s).$$

Сложив последние два включения, содержащие ρ и ρ^d , получим

$$-\lambda \in (\rho + \rho^d \tilde{\alpha})(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \rho^d \tilde{\beta} T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Обозначив $\alpha := \rho + \rho^d \tilde{\alpha}$ и $\gamma := \rho^d \tilde{\beta} \circ T$, перепишем последнее соотношение в виде

$$-\lambda \in \alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Легко видеть, что $\alpha \in \text{Orth}^+(E)$ и $\gamma \in L^+(F, E)$ — оператор Магарам. Заметим, далее, что $T \in \partial R$ тогда и только тогда, когда $T \in \partial r$ и $T \circ g(x_0) = r \circ g(x_0) = \tilde{g}(x_0)$. Кроме того, $\rho^d \tilde{g}(x_0) = 0$ и, следовательно, выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\gamma \circ g(x_0) = \rho^d \tilde{\beta} \circ T \circ g(x_0) = \tilde{\beta} \rho^d \circ \tilde{g}(x_0) = 0.$$

Пусть теперь π — проектор на компоненту $\ker(\alpha)$. Тогда $\pi \alpha = 0$ и поскольку $\ker(\alpha) = \ker(\tilde{\alpha})$ и $\pi \tilde{\beta} = \pi(I_E - \tilde{\alpha}) = \pi$, приходим к соотношению

$$-\pi \lambda \in \pi \alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \pi(I_E - \alpha) \circ T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S) = \pi T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Последнее означает, что $\pi T \circ S \in (\pi T \circ \underline{\partial}^c g(x_0) + \pi \lambda)$. Тем самым предположение $\pi \neq 0$ противоречит допущению (с) из условия квазирегулярности 2.4. Следовательно, $\pi = 0$ или, что то же, $\ker(\alpha) = \{0\}$. \triangleright

3. Необходимые условия обобщенного экстремума

Здесь рассмотрим необходимые условия обобщенного локального оптимума для векторных программ с квазидифференцируемыми данными. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

3.1. Пусть множество $C \subset X$ K -регулярно в точке $x_0 \in C$, а отображения $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow E^\bullet$ квазидифференцируемы в той же точке $x_0 \in \text{core}(\text{dom}(f_k))$ ($k := 1, \dots, n$). Если x_0 является идеальным (локальным) оптимумом программы $x \in C, f_1 \wedge \dots \wedge f_n(x) \rightarrow \inf$, то для любых $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$ выполняется включение

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{\partial}^c f_k(x_0) \subset \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{\partial}^c f_k(x_0) + N_E(C, x_0).$$

\triangleleft Положим $f := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Возьмем $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$ и введем отображение $\varphi : X \rightarrow E^\bullet$ формулой

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x).$$

Допустим, что x_0 — идеальный (локальный) оптимум программы (C, f) . Тогда x_0 будет идеальным (локальным) оптимумом программы (C, φ) . В самом деле, если $x \in C$, то $\varphi(x_0) = f(x_0) \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Отображение φ квазидифференцируемо в точке x_0 (см. [1]). Согласно 2.3 имеет место включение $\bar{\partial}^c f(x_0) \subset \underline{\partial}^c f(x_0) + N_E(C, x_0)$. Доказательство завершается ссылкой на [1; теоремы 2.2 и 2.3]. \triangleright

3.2. Множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\} \subset C$ называют *обобщенным локальным оптимумом* программы (C, f) , если существует такая окрестность нуля U , что $f(x_1^0) \wedge \dots \wedge f(x_n^0) \leq f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_n)$ для всех $x_i \in (x_i^0 + U) \cap C$ и $i := 1, \dots, n$.

Пусть отображение $f : X \rightarrow E^\bullet$ квазидифференцируемо в каждой из допустимых точек $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \text{core}(\text{dom}(f))$. Если множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ является обобщенным (локальным) оптимумом безусловной программы $f(x) \rightarrow \inf$, то для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Orth}^+(E)$ таких, что

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_E, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i^0) = f(x_1^0) \wedge \dots \wedge f(x_n^0),$$

выполняются включения

$$\alpha_k \bar{\partial}^c f(x_k) \subset \alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k) \quad (k := 1, \dots, n).$$

\triangleleft Это утверждение является частным случаем нижеследующей теоремы 3.3 при $C = X$. \triangleright

3.3. Теорема. Пусть отображение $f : X \rightarrow E^\bullet$ квазидифференцируемо в точках $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \text{core}(\text{dom}(f))$, а множество $C \subset X$ K_l -регулярно в точке $x_l^0 \in C$ при $l := 1, \dots, n$, где K_1, \dots, K_n — выпуклые конусы. Если множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ является обобщенным (локальным) оптимумом программы (C, f) , то для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Orth}^+(E)$ таких, что

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = I_E, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k^0) = f(x_1^0) \wedge \dots \wedge f(x_n^0),$$

выполняются включения

$$\alpha_k \bar{\partial}^c f(x_k^0) \subset \alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k^0) + N_E(C, x_k^0) \quad (k := 1, \dots, n).$$

\triangleleft Определим отображения $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n, \tilde{f} : X^n \rightarrow E$ равенствами

$$\tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n) := f(x_i) \quad (i := 1, \dots, n), \quad \tilde{f} := \tilde{f}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{f}_n.$$

Легко видеть, что точка (x_1^0, \dots, x_n^0) входит в $C^n \cap \text{core}(\text{dom}(\tilde{f}))$ и является идеальным локальным оптимумом в задаче (C^n, \tilde{f}) тогда и только тогда, когда множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ служит локальным обобщенным оптимумом в программе (C, f) . Кроме того, очевидно, что множество C^n будет $K_1 \times \dots \times K_n$ -регулярным в точке (x_1^0, \dots, x_n^0) . Если $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ — обобщенный локальный оптимум программы (C, f) , то в силу предложения 3.1 для любых $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$ выполняется включение

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) \subset \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) + N_E(C^n, (x_1^0, \dots, x_n^0)).$$

Легко подсчитать содержащиеся в этом включении субдифференциалы и супердифференциалы:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) &= \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \bar{\partial}^c f(x_k^0) \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \\ \underline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) &= \{0\} \times \dots \times \{0\} \times \underline{\partial}^c f(x_k^0) \times \{0\} \times \dots \times \{0\}. \end{aligned}$$

Отсюда видна справедливость равенств

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) &= \alpha_1 \bar{\partial}^c f(x_1^0) \times \dots \times \alpha_n \bar{\partial}^c f(x_n^0), \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) &= \alpha_1 \underline{\partial}^c f(x_1^0) \times \dots \times \alpha_n \underline{\partial}^c f(x_n^0).\end{aligned}$$

Ясно также, что $N_E(C^n, (x_1^0, \dots, x_n^0)) = N_E(C, x_1^0) \times \dots \times N_E(C, x_n^0)$. Собрав теперь во едино полученные представления, получим

$$\prod_{k=1}^n \alpha_k \bar{\partial}^c f(x_k^0) \subset \prod_{k=1}^n (\alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k^0) + N_E(C, x_k^0)),$$

что равносильно требуемым n включениям. \triangleright

3.4. Рассмотрим векторную программу (C, g, f) . Пусть $x_i^0 \in C \cap \text{core}(\text{dom}(f)) \cap \text{core}(\text{dom}(g))$, и предположим, что отображения $f : X \rightarrow E^\bullet$, $g : X \rightarrow F^\bullet$ топологически квазидифференцируемы в точках x_i^0 ($i := 1, \dots, n$). Скажем, что векторная программа (C, g, f) квазирегулярна на множестве $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$, если выполнены следующие условия:

(а) существуют непрерывный сублинейный оператор Магарам $r : F \rightarrow E$ и окрестности U_i точек x_i^0 такие, что для любого $x \in C \cap U_i$ будет $\pi_x e \leq \pi_x f(x)$, где $e := f(x_1^0) \wedge \dots \wedge f(x_n^0)$ и $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(б) множество C является K_i -регулярным в точке x_i^0 ;

(с) для каждого $i := 1, \dots, n$ имеет место соотношение $\pi T \circ \bar{\partial}^c g(x_i^0) \cap (\pi T \underline{\partial}^c g(x_i^0) + \pi N_E(C, x_i^0)) = \emptyset$, каковы бы ни были оператор $T \in \partial r(g(x_i^0))$ и ненулевой проектор $\pi \in \mathfrak{P}(E)$.

3.5. Теорема. Пусть отображения $g : X \rightarrow F^\bullet$ и $f : X \rightarrow E^\bullet$ квазидифференцируемы в точках $x_1^0, \dots, x_n^0 \in C \cap \text{core}(\text{dom}(f)) \cap \text{core}(\text{dom}(g))$. Предположим, что векторная программа (C, g, f) квазирегулярна в смысле 3.4 на множестве $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$. Если множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ служит обобщенным локальным оптимумом программы (C, g, f) , то для любых $s_i \in \bar{\partial} f(x_i^0)$ и $S_i \in \bar{\partial} g(x_i^0)$ существуют ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Orth}(E)$, непрерывные операторы Магарам $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in L^+(F, E)$ и линейные непрерывные операторы $\lambda_i \in L(X, E)$ такие, что

$$\begin{aligned}0 \leq \alpha_i \leq I_E, \quad \ker(\alpha_1) \cap \dots \cap \ker(\alpha_n) &= \{0\}, \\ \gamma_i \circ g(x_0) = 0, \quad \lambda_i \in N_E(K_{\xi_i}), \\ -\lambda_i \in \alpha_i (\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \gamma_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i) \quad (i := 1, \dots, n).\end{aligned}$$

\triangleleft Пусть выполнены условия квазирегулярности 3.4. Обозначим $e := f(x_1^0) \wedge \dots \wedge f(x_n^0)$. Предположим, что множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ есть обобщенный оптимум программы (C, g, f) . Тогда это множество будет обобщенным оптимумом и в задаче (C, φ) в силу 3.4 (а).

Согласно теореме 3.3, для любых наборов ортоморфизмов $\beta_1, \dots, \beta_n \in \text{Orth}^+(E)$ таких, что

$$\beta_1 + \dots + \beta_n = I_E, \quad \sum_{k=1}^n \beta_k f(x_k^0) = f(x_1^0) \wedge \dots \wedge f(x_n^0),$$

справедливы неравенства

$$0 \leq \beta_i \varphi'(x_i^0) h_i \quad (h_i \in K_i, \quad i := 1, \dots, n).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.5 с заменой $\varphi'(x_0)$ и K на $\beta_i \varphi'(x_i^0)$ и K_i , получим, что для любых $s_i \in \bar{\partial}^c f(x_i^0)$ и $S_i \in \bar{\partial}^c g(x_i^0)$ существуют положительный ортоморфизм $\tilde{\alpha}_i \in \text{Orth}^+(E)$, непрерывный оператор Магарам $\tilde{\gamma}_i \in L^+(F, E)$ и непрерывный линейный оператор $\lambda_i \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{\alpha}_i \leq I_E, \quad \ker \tilde{\alpha}_i = \{0\}, \quad \lambda_i \in N_E(C, x_i^0), \quad \tilde{\gamma}_i \circ g(x_0) = 0, \\ -\lambda_i \in \beta_i \tilde{\alpha}_i (\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \beta_i \tilde{\gamma}_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i). \end{aligned}$$

Обозначим $\alpha_i := \beta_i \tilde{\alpha}_i$ и $\gamma_i := \beta_i \tilde{\gamma}_i$. Если $e \in \ker(\alpha_i)$ для всех $i := 1, \dots, n$, то $\tilde{\alpha}_i(\beta_i |e|) = 0$, а так как $\ker(\tilde{\alpha}_i) = \{0\}$, то $\beta_i(|e|) = 0$. Просуммировав последнее равенство по i , получим $e = 0$.

Таким образом, для любых $s_i \in \bar{\partial} f(x_i^0)$ и $S_i \in \bar{\partial} g(x_i^0)$ существуют ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Orth}(E)$, непрерывные операторы Магарам $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in L^+(F, E)$ и непрерывный линейный оператор $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha_i \leq I_E, \quad \bigcap_{i=1}^n \ker(\alpha_i) = \{0\}, \quad \gamma_i \circ g(x_0) = 0, \quad \lambda_i \in N_E(C, x_i^0), \\ -\lambda_i \in \alpha_i (\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \gamma_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i) \quad (i := 1, \dots, n), \end{aligned}$$

что и требовалось. \triangleright

Литература

1. Басаева Е. К. Квазидифференциалы в K -пространствах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 3.—С. 14–30.
2. Басаева Е. К., Кураев А. Г. О квазидифференциале композиции // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 4.—С. 10–25.
3. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука.—1981.—384 с.
4. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 250, № 1.—С. 21–25.
5. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. О некоторых подходах к задачам негладкой оптимизации // Экономика и мат. методы.—1981.—Т. 17, № 6.—С. 1153–1174.
6. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука.—1990.—432 с.
7. Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н. Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве // Ж. вычисл. матем. и физ.—1980.—Т. 20, № 4.—С. 849–856.
8. Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М. Об одном обобщении понятия субдифференциала // В кн.: Тез. всес. конф. по динамическому управлению.—Свердловск, 1979.—С. 79–84.
9. Кураев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
10. Кураев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. II.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2003.—viii+413 с.
11. Полякова Л. Н. Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестник Ленингр. ун-та.—1980.—№ 13.—С. 57–62.

12. Полякова Л. Н. Необходимые условия экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вестник Ленингр. ун-та.—1982.—№ 7.—С. 75–80.
13. Полякова Л. Н. Достаточные условия локального экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вестник Ленингр. ун-та.—1985.—№ 22.—С. 26–30.
14. Demyanov V. F., Rubinov A. M. On quasidifferentiable mappings // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1983.—V. 14.—P. 3–21.
15. Polyakova L. N. On the minimization of a quasidifferentiable function subject to equality-type quasidifferentiable constraints // In: Mathematical Programming Study. Quasidifferential Calculus / Eds. Demyanov V. F., Dixon L. C. W.—V. 29.—P. 44–55.

Статья поступила 17 ноября 2003 г.

БАСАЕВА ЕЛЕНА КАЗБЕКОВНА
г. Владикавказ, Институт прикладной
математики и информатики ВЦ РАН
E-mail: helen@alanianet.ru