

УДК 517.982

DOI 10.46698/o1968-1156-5382-e

ВЛОЖЕНИЯ В \mathbb{B} -ЦИКЛИЧЕСКИЕ БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА[#]

Б. Б. Тасоев^{1,2}

¹ Северо-Кавказский центр математических исследований ВЦ РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;

² Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: tasoebatradz@yandex.ru

Аннотация. Для полной булевой алгебры \mathbb{B} и ненулевого $\pi \in \mathbb{B}$ введено понятие \mathbb{B}_π -вложения банаховых пространств в \mathbb{B} -циклические банаховы пространства. Также введено понятие решеточного \mathbb{B}_π -вложения банаховых решеток в \mathbb{B} -циклические банаховы решетки. Установлен критерий \mathbb{B}_π -вложения пространства непрерывных вектор-функций со значениями в произвольном банаховом пространстве в \mathbb{B} -циклическое банахово пространство, а также критерий решеточного \mathbb{B}_π -вложения пространства непрерывных вектор-функций со значениями в произвольной банаховой решетке в \mathbb{B} -циклическую банахову решетку. Полученные результаты позволяют наметить подход для изометрической и изоморфной классификации \mathbb{B} -циклических банаховых пространств. В ходе установления результатов широко использовался аппарат решеточно-нормированных пространств.

Ключевые слова: банахова решетка, \mathbb{B} -циклическое банахово пространство, изоморфная классификация.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

Образец цитирования: Тасоев Б. Б. Вложения в \mathbb{B} -циклические банаховы пространства // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 127–132. DOI: 10.46698/o1968-1156-5382-e.

Вложение классических банаховых пространств играет важную роль в изометрической и изоморфной классификации общих банаховых пространств. В настоящей заметке предпринимается попытка наметить аналогичный подход для \mathbb{B} -циклических банаховых пространств. Напомним необходимые для дальнейшего изложения определения. Более подробное изложение можно найти в монографиях [1, 2, 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X и Y — банаховы пространства. Говорят, что Y *вложимо* в X , если существует линейный оператор $T : Y \rightarrow X$ и константы $K, M > 0$, удовлетворяющие условию $K\|y\| \leq \|Ty\| \leq M\|y\|$ для всех $y \in Y$. При этом оператор T называется *вложением*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть X и Y — банаховы решетки и $T : Y \rightarrow X$ — вложение. Говорят, что Y *решеточно вложимо* в X , если вложение T является решеточным гомоморфизмом. При этом T называют *решеточным вложением*.

Пусть X — нормированное пространство, $U_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Под *булевой алгеброй проекторов* в векторном пространстве X понимается множество \mathbb{B} коммутирующих линейных идемпотентных операторов, действующих в X , в котором роль нуля и

[#] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2022-896.

© 2022 Тасоев Б. Б.

единицы играют соответственно нулевое и тождественное отображения, а булевы операции имеют вид:

$$\pi \wedge \rho := \pi \circ \rho = \rho \circ \pi, \quad \pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi^\perp := I_X - \pi \quad (\pi, \rho \in \mathbb{B}).$$

Предположим, что в $L(X)$ имеется полная булева алгебра проекторов единичной нормы \mathbb{B} . Нормированное пространство X называется \mathbb{B} -циклическим, если для произвольного разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathbb{B}$ и любого семейства $(x_\xi) \subset U_X$ существует и при том единственный $x \in U_X$, для которого выполняется $\pi_\xi x_\xi = \pi_\xi x$ при всех ξ , см. [2, § 7.3.3].

Пусть Q — экстремальный компакт, Y — банахово пространство. Обозначим символом $C_\infty(Q, Y)$ множество классов эквивалентности непрерывных вектор-функций, действующих из котощих множеств $\text{dom}(u) \subset Q$ в Y . Напомним, что множество в топологическом пространстве называют *котощим*, если его дополнение является тощим. Множество $C_\infty(Q, Y)$ можно естественным образом снабдить структурой модуля над кольцом $C_\infty(Q)$. Более того, непрерывное продолжение поточечной нормы $t \mapsto \|f(t)\|$ ($t \in \text{dom}(f)$, $f \in C_\infty(Q, Y)$) определяет разложимую норму $|\cdot|$ на $C_\infty(Q, Y)$ со значениями в $C_\infty(Q)$ (подробности см. [2, § 2.3.3]). Введем пространство $C_\#(Q, Y) := \{f \in C_\infty(Q, Y) : |f| \in C(Q)\}$ и ному в нем $\|f\| := \||f|\|_\infty$. Обозначим через \mathbb{B} булеву алгебру всех характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств множества Q . Тогда $C_\#(Q, Y)$ будет \mathbb{B} -циклическим банаховым пространством.

Введем определение вложимости банахова пространства в \mathbb{B} -циклическое банахово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть Y — банахово пространство, X — \mathbb{B} -циклическое банахово пространство, \mathbb{B}_π — главный идеал в \mathbb{B} , порожденный некоторым ненулевым элементом $\pi \in \mathbb{B}$. Будем говорить, что Y \mathbb{B}_π -вложимо в X , если:

- 1) $T : Y \rightarrow X$ — вложение;
- 2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\|\rho T y\|_X \geq \varepsilon \|T y\|_X$ для всех $y \in Y$ и $0 \neq \rho \in \mathbb{B}_\pi$.

В данном случае будем говорить, что T — \mathbb{B}_π -вложение.

Пусть G — стоуновский компакт некоторой булевой алгебры \mathbb{B}_0 . Как известно, булеву алгебру \mathbb{B}_0 можно отождествить с пространством характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств множества G . При таком отождествлении для произвольных $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathbb{B}_0$ и $y_1, \dots, y_n \in Y$ символом $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i$ будем обозначать непрерывную функцию из G в Y , действующую по правилу $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i(q) := \sum_{i=1}^n \pi_i(q) y_i$ для всех $q \in G$.

Теорема 1. Пусть X — \mathbb{B} -циклическое банахово пространство, Q — стоуновский компакт \mathbb{B} , \mathbb{B}_π — главный идеал в \mathbb{B} , порожденный ненулевым элементом $\pi \in \mathbb{B}$ и Y — банахово пространство. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Y — \mathbb{B}_π -вложимо в X ;
- (2) для стоуновского компакта $G \in \text{Clop}(Q)$ булевой алгебры \mathbb{B}_π существует вложение $\tilde{T} : C_\#(G, Y) \rightarrow X$ такое, что $\tilde{T}(\rho \otimes y) = \rho \tilde{T}(\pi \otimes y)$ для всех $y \in Y$, $\rho \in \mathbb{B}_\pi$.

\triangleleft (1) \Rightarrow (2). По условию существуют вложение $T : Y \rightarrow X$, ненулевой элемент $\pi \in \mathbb{B}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\|\rho T y\| \geq \varepsilon \|T y\|$ для всех $y \in Y$ и $0 \neq \rho \in \mathbb{B}_\pi$. Так как T — вложение, найдутся константы $K, M > 0$ такие, что $K\|y\| \leq \|T y\| \leq M\|y\|$ для всех $y \in Y$.

Пусть $\text{St}(G, Y)$ обозначает множество классов эквивалентности функций из $C_\#(G, Y)$ вида $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i$, действующих по правилу

$$\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i(q) := \sum_{i=1}^n \pi_i(q) y_i \quad (q \in G),$$

где $y_1, \dots, y_n \in Y$, π_1, \dots, π_n — разбиение единицы в \mathbb{B}_π , $n \in \mathbb{N}$.

Определим оператор $\tilde{T} : \text{St}(G, Y) \rightarrow X$ по формуле

$$\tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right) := \sum_{i=1}^n \pi_i T(y_i) \quad (1)$$

для всех $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \in \text{St}(G, Y)$. Покажем корректность определения \tilde{T} . Отметим, что если $\rho \otimes y = 0$ для некоторых $\rho \in \mathbb{B}_\pi$ и $y \in Y$, то либо $\rho = 0$, либо $y = 0$. Поэтому $\rho T y = 0$ для всех $\rho \in \mathbb{B}_\pi$ и $y \in Y$ таких, что $\rho \otimes y = 0$. Пусть $0 = \sum_{i=1}^n \rho_i \otimes y_i \in \text{St}(G, Y)$. Тогда $\rho_i \otimes y_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и в силу выше сказанного $\tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n \rho_i T(y_i) = 0$. Следовательно,

$$\tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \otimes y_i \right) = 0 \quad (2)$$

для всех $0 = \sum_{i=1}^n \rho_i \otimes y_i \in \text{St}(G, Y)$. Пусть $z \in \text{St}(G, Y)$ имеет два представления $z = \sum_{i=1}^n \pi_i \otimes x_i = \sum_{j=1}^m \rho_j \otimes y_j$. Тогда выполняется равенство $0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\pi_i \wedge \rho_j) \otimes (x_i - y_j)$. Следовательно, в силу (2) справедливы равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\pi_i \wedge \rho_j) \otimes (x_i - y_j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\pi_i \wedge \rho_j) T(x_i - y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\pi_i \wedge \rho_j) T(x_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\pi_i \wedge \rho_j) T(y_j) = \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes x_i \right) - \tilde{T} \left(\sum_{j=1}^m \rho_j \otimes y_j \right). \end{aligned}$$

Тем самым показана корректность определения \tilde{T} . Ясно, что оператор \tilde{T} линеен и $\tilde{T}(\rho \otimes y) = \rho \tilde{T}(\pi \otimes y)$ для всех $y \in Y$, $\rho \in \mathbb{B}_\pi$.

Так как $G \in \text{Clor}(Q)$, то будем отождествлять $C(G)$ с идеалом в $C(Q)$, состоящим из всех функций из $C(Q)$, обращающихся в нуль на дополнении множества G . Для произвольного $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \in \text{St}(G, Y)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \left| \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right) \right|_X &= \sum_{i=1}^n \pi_i |T(y_i)|_X \\ &\leq \sum_{i=1}^n \pi_i \|T(y_i)\|_X \leq M \sum_{i=1}^n \pi_i \|y_i\|_Y = M \left| \sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right|_{C_\#(G, Y)}. \end{aligned}$$

где $|\cdot|_X : X \rightarrow C(Q)$ — векторная норма такая, что $\|x\|_X = \| |x|_X \|_{C(Q)}$ для всех $x \in X$ (см. [2, § 7.3.3]). Следовательно,

$$\left| \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right) \right|_X \leq M \left| \sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right|_{C_\#(G, Y)} \quad (3)$$

для всех $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \in \text{St}(G, Y)$. Для установления обратного неравенства отметим, что $|Ty|_X \geq \varepsilon \pi |Ty|$ для всех $y \in Y$, где неравенство понимается в $C(Q)$. Действительно, если $|Ty|_X(q) < \varepsilon \pi(q) |Ty|$ для некоторого $q \in Q$ и $y \in Y$, то найдется $\rho \leq \pi$ такой, что $\rho |Ty|_X < \varepsilon \pi |Ty|$. Тогда $\|\rho T y\| < \varepsilon \|T y\|$, что противоречит условию (1) данной теоремы.

В силу выше сказанного выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \left| \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right) \right|_X &= \sum_{i=1}^n \pi_i |T(y_i)|_X \\ &\geq \varepsilon \sum_{i=1}^n \pi_i \|T(y_i)\|_X \geq \varepsilon K \sum_{i=1}^n \pi_i \|y_i\|_Y = \varepsilon K \left| \sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right|_{C_{\#}(G,Y)} \end{aligned}$$

для всех $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \in \text{St}(G, Y)$. Таким образом, в виду (3) справедливы оценки

$$\varepsilon K \left| \sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right|_{C_{\#}(G,Y)} \leq \left| \tilde{T} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right) \right|_X \leq M \left| \sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \right|_{C_{\#}(G,Y)}$$

для всех $\sum_{i=1}^n \pi_i \otimes y_i \in \text{St}(G, Y)$. Так как X и $C_{\#}(G, Y)$ являются пространствами Банаха — Канторовича, а пространство $\text{St}(G, Y)$ bo -плотно в $C_{\#}(G, Y)$ (см. [2, 2.3.4(3)]), то в виду полученных оценок распространим \tilde{T} на все пространство $C_{\#}(G, Y)$. Получим

$$\varepsilon K \|f\|_{C_{\#}(G,Y)} \leq |\tilde{T}(f)|_X \leq M \|f\|_{C_{\#}(G,Y)}$$

для всех $f \in C_{\#}(G, Y)$. Следовательно, $\varepsilon K \|f\|_{C_{\#}(G,Y)} \leq \|\tilde{T}(f)\|_X \leq M \|f\|_{C_{\#}(G,Y)}$ для всех $f \in C_{\#}(G, Y)$. Таким образом, \tilde{T} — искомое вложение.

(2) \Rightarrow (1). Пусть имеем вложение $\tilde{T} : C_{\#}(G, Y) \rightarrow X$ такое, что $\tilde{T}(\rho \otimes y) = \rho \tilde{T}(\pi \otimes y)$ для всех $y \in Y$, $\rho \in \mathbb{B}_{\pi}$. Напомним, что π мы отождествляем с функцией $\mathbf{1}_G$ равной единице на G . Так как \tilde{T} — вложение, то существуют константы $K, M > 0$ такие, что $K \|f\|_{C_{\#}(G,Y)} \leq \|\tilde{T}(f)\|_X \leq M \|f\|_{C_{\#}(G,Y)}$ для всех $f \in C_{\#}(G, Y)$. Положим по определению

$$T(y) := \tilde{T}(\pi \otimes y) \quad (4)$$

для всех $y \in Y$. Тогда, так как $\|\rho \otimes y\|_{C_{\#}(G,Y)} = \|y\|_Y$ для всех $y \in Y$ и $0 \neq \rho \in \mathbb{B}_{\pi}$, то выполняются соотношения $K \|y\|_Y \leq \|Ty\|_X \leq M \|y\|_Y$. Более того, $\|\rho Ty\|_X = \|\rho \tilde{T}(\pi \otimes y)\|_X = \|\tilde{T}(\rho \otimes y)\|_X \geq K \|\rho \otimes y\|_{C_{\#}(G,Y)} = K \|y\|_Y \geq (K/M) \|Ty\|_X$, т. е. $\|\rho Ty\|_X \geq (K/M) \|Ty\|_X$ для всех $y \in Y$ и $0 \neq \rho \in \mathbb{B}_{\pi}$. Таким образом, $T : Y \rightarrow X$ — искомое \mathbb{B}_{π} -вложение. \triangleright

Введем определение решеточной вложимости банаховых решеток в \mathbb{B} -циклические банаховы решетки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть Y — банахова решетка, X — \mathbb{B} -циклическая банахова решетка, где \mathbb{B} — полная булева подалгебра алгебры порядковых проекторов в X , \mathbb{B}_{π} — главный идеал в \mathbb{B} , порожденный некоторым ненулевым элементом $\pi \in \mathbb{B}$. Будем говорить, что Y *решеточно \mathbb{B}_{π} -вложимо* в X , если:

- 1) $T : Y \rightarrow X$ — решеточное вложение;
- 2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\|\rho Ty\|_X \geq \varepsilon \|Ty\|_X$ для всех $y \in Y$ и $0 \neq \rho \in \mathbb{B}_{\pi}$.

В данном определении будем говорить, что T — *решеточное \mathbb{B}_{π} -вложение*.

Теорема 2. Пусть X — \mathbb{B} -циклическая банахова решетка, Q — стоуновский компакт \mathbb{B} , \mathbb{B}_{π} — главный идеал в \mathbb{B} , порожденный ненулевым элементом $\pi \in \mathbb{B}$, и Y — банахова решетка. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) Y решеточно \mathbb{B}_{π} -вложимо в X ;

(2) для стоуновского компакта $G \in \text{Clop}(Q)$ булевой алгебры \mathbb{B}_π существует решеточное вложение $\tilde{T} : C_\#(G, Y) \rightarrow X$ такое, что $\tilde{T}(\rho \otimes y) = \rho \tilde{T}(\pi \otimes y)$ для всех $y \in Y$, $\rho \in \mathbb{B}_\pi$.

\Leftarrow (1) \Rightarrow (2). Пусть $T : Y \rightarrow X$ — решеточное \mathbb{B}_π -вложение. Из определения $\tilde{T} : \text{St}(G, Y) \rightarrow X$ по формуле (1) следует, что \tilde{T} будет сохранять модуль при условии, что $T : Y \rightarrow X$ — решеточный гомоморфизм. Далее, повторяя рассуждения доказательства (1) \Rightarrow (2) теоремы 1, получим решеточное вложение $\tilde{T} : C_\#(G, Y) \rightarrow X$ с требуемым свойством.

(2) \Rightarrow (1) Пусть имеем решеточное вложение $\tilde{T} : C_\#(G, Y) \rightarrow X$ такое, что $\tilde{T}(\rho \otimes y) = \rho \tilde{T}(\pi \otimes y)$ для всех $y \in Y$, $\rho \in \mathbb{B}_\pi$. Учитывая равенство $|\pi \otimes y| = \pi \otimes |y|$ для всех $y \in Y$, получим, что оператор $T : Y \rightarrow X$, определяемый по формуле (4), является решеточным гомоморфизмом. Далее, повторяя рассуждения доказательства (2) \Rightarrow (1) теоремы 1, получим требуемое решеточное \mathbb{B}_π -вложение. \triangleright

Пользуясь теоремами 1 и 2, можно получить следующий результат.

Теорема 3. Для \mathbb{B} -циклической банаховой решетки X равносильны утверждения:

- (1) X порядково \mathbb{B} -непрерывна, т. е. если $x_\alpha \downarrow 0$ в X , то для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение единицы (π_α) в \mathbb{B} такое, что $\|\pi_\alpha x_\alpha\| < \varepsilon$ для всех α ;
- (2) не существует ненулевого проектора $\pi \in \mathbb{B}$ такого, чтобы банахова решетка l_∞ была решеточно \mathbb{B}_π -вложима в X .

Литература

1. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—367 p.
2. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—395 p.

Статья поступила 27 июня 2022 г.

ТАСОЕВ БАТРАДЗ БОТАЗОВИЧ
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: tasoebatradz@yandex.ru
<https://orcid.org/0000-0001-8573-4721>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 4, P. 127–132

EMBEDDINGS INTO \mathbb{B} -CYCLIC BANACH SPACES

Tasoev, B. B.^{1,2}

¹ North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,
1 Williams St., village of Mikhailovskoye 363110, Russia;

² Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: tasoebatradz@yandex.ru

Abstract. For a complete Boolean algebra \mathbb{B} and nonzero $\pi \in \mathbb{B}$, the notion of an \mathbb{B}_π -embedding of Banach spaces into \mathbb{B} -cyclic Banach spaces is introduced. The notion of a lattice \mathbb{B}_π -embedding of Banach lattices into \mathbb{B} -cyclic Banach lattices is also introduced. A criterion for the \mathbb{B}_π -embedding of a space of conti-

nuous vector-valued functions with values in an arbitrary Banach space into a \mathbb{B} -cyclic Banach space is established, as well as a criterion for the lattice \mathbb{B}_π -embedding of a space of continuous vector-valued functions with values in an arbitrary Banach lattice into a \mathbb{B} -cyclic Banach lattice. The obtained results allow us to outline an approach for isometric and isomorphic classification of \mathbb{B} -cyclic Banach spaces. In the course of establishing the results, the tool of lattice-valued spaces was widely used.

Key words: Banach lattice, \mathbb{B} -cyclic Banach space, isomorphic classification.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

For citation: *Tasoev, B. B. Embeddings into \mathbb{B} -Cyclic Banach Spaces // Vladikavkaz Math. J., 2022, vol. 24, no. 4, pp. 127–132 (in Russian). DOI: 10.46698/o1968-1156-5382-e.*

References

1. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, Springer, 1985, 376 p.
2. Kusraev, A. G. *Dominated Operators*, Springer, 2000, 446 p.
3. Meyer-Nieberg, P. *Banach Lattices*, Berlin etc., Springer, 1991, 395 p.

Received June 27, 2022

BATRADZ B. TASOEV

North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS,

1 Williams Str., village of Mikhailovskoye 363110, Russia,

Leading Researcher;

Southern Mathematical Institute VSC RAS,

53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,

Senior Researcher

E-mail: tasoevbatradz@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0001-8573-4721>