

УДК 517.984.46

DOI 10.46698/y9559-5148-4454-e

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ

Д. Ж. Култураев¹, Ю. Х. Эшкабилов¹

¹ Каршинский государственный университет,
Узбекистан, 180100, Карши, ул. Кучабар, 17

E-mail: davron_2189@mail.ru, yusup62@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматриваются линейные ограниченные самосопряженные интегральные операторы T_1 и T_2 в гильбертовом пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$, так называемые частично интегральные операторы. Частично интегральный оператор T_1 действует на функцию $f(x, y)$ по первому аргументу и выполняет определенное интегрирование по аргументу x , а частично интегральный оператор T_2 действует на функцию $f(x, y)$ по второму аргументу и выполняет определенное интегрирование по аргументу y . Оба оператора являются ограниченными, однако оба не являются компактными операторами. Однако оператор $T_1 T_2$ является компактным и $T_1 T_2 = T_2 T_1$. Частично интегральные операторы возникают в различных областях механики, теории интегродифференциальных уравнений и теории операторов Шредингера. В работе исследованы спектральные свойства линейных ограниченных самосопряженных частично интегральных операторов T_1 , T_2 и $T_1 + T_2$ с невырожденными ядрами. Получена формула для описания существенных спектров частично интегральных операторов T_1 и T_2 . Показано, что дискретный спектр у операторов T_1 и T_2 отсутствует. Доказана теорема о структуре существенного спектра частично интегрального оператора $T_1 + T_2$. Изучена задача о существовании счетного числа собственных значений в дискретном спектре частично интегрального оператора $T_1 + T_2$.

Ключевые слова: частично интегральный оператор, спектр, существенный спектр, дискретный спектр, невырожденное ядро.

AMS Subject Classification: 47A10, 47A11, 47B38, 47G10.

Образец цитирования: Култураев Д. Ж., Эшкабилов Ю. Х. О спектральных свойствах самосопряженных частично интегральных операторов с невырожденными ядрами // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 91–104. DOI: 10.46698/y9559-5148-4454-e.

1. Введение

Линейные уравнения и операторы с частными интегралами возникают в различных областях механики [1–4], теории интегродифференциальных уравнений [5, 6], теории операторов Шредингера [7–9] и в ряде других прикладных задач [10–12]. Частично интегральные операторы T_1 и T_2 действуют в пространстве функций с двумя переменными $x \in \Omega_1$ и $y \in \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 являются замкнутыми линейно связанными ограниченными множествами в \mathbb{R}^{n_1} и \mathbb{R}^{n_2} , соответственно. Оператор T_1 интегрирует функцию $f(x, y)$ по аргументу $x \in \Omega_1$ на множестве Ω_1 , а оператор T_2 интегрирует функцию $f(x, y)$ по аргументу $y \in \Omega_2$ на множестве Ω_2 . Обычно операторы T_1 и T_2 являются ограниченными, но не являются компактными операторами. Последнее обстоятельство вызывает интерес

специалистов к исследованию спектров операторов T_1 , T_2 и $T_1 + T_2$. Легко проверяется равенство $T_1T_2 = T_2T_1$, и T_1T_2 является компактным интегральным оператором.

В [13] изучен спектр ЧИО (частично интегрального оператора) $T_1 + T_2$ в L_2 с положительными ядрами. Затем в 1991 г. А. С. Калитвин и П. П. Забрейко [14] исследовали спектральные свойства частично интегральных операторов вида $T_1 + T_2$ в пространстве L_p , $p \geq 1$. Линейные операторы и уравнения с частными интегралами в разных функциональных пространствах исследовались в монографиях [11, 12], см. также [15].

В работе [16] исследованы существенный и дискретный спектры суммы тензорных произведений самосопряженного компактного оператора и тождественного оператора в гильбертовом пространстве L_2 . В статье [17] изучаются спектральные свойства ЧИО T_1 с ограниченным ядром. Затем в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ изучены спектральные свойства самосопряженных ЧИО T_1 , T_2 и $T_1 + T_2$ с непрерывным ядром трех переменных и доказана теорема, описывающая свойства существенного и дискретного спектра ЧИО $T_1 + T_2$ [18]. Доказана теорема о дискретном спектре для самосопряженного ЧИО $H_0 - (T_1 + T_2)$ с непрерывным ядром в [19], где H_0 — оператор умножения на непрерывную функцию.

В работе [20] получено явное выражение для существенного спектра и доказано существование собственного значения ЧИО $H_0 - (T_1 + T_2)$ с ядром трех переменных (в частном случае, сокр. ЧИО). Исследованы существенный и дискретный спектры самосопряженных ЧИО T_1 , T_2 и $T_1 + T_2$ типа Фредгольма в пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$ с вырожденным ядром в [21].

Несмотря на ряд публикаций о спектрах ЧИО, отсутствуют теоремы о точном описании существенных спектров самосопряженных ЧИО, возникающих в прикладных задачах. В данной статье, в гильбертовом пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$ изучаются спектральные свойства самосопряженных ЧИО типа Фредгольма T_1 , T_2 и $T_1 + T_2$ с невырожденными ядрами. Дано точное описание существенных спектров операторов T_1 и T_2 (§ 3). Получено явное описание существенного спектра ЧИО $T_1 + T_2$ и изучено существование счетного числа собственных значений в дискретном спектре ЧИО $T_1 + T_2$ с невырожденным ядром (§ 4).

2. Необходимые сведения и предложения

Пусть T_1 — линейный интегральный оператор в пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$, заданный по формуле

$$(T_1 f)(x, y) = \int_a^b k(x, s, y) f(s, y) ds. \quad (1)$$

Здесь $k(x, s, y)$ измеримая функция в смысле Лебега на $[a, b]^2 \times [c, d]$ и интеграл в (1) понимается в смысле меры Лебега на $[a, b]$.

Ядро $k(x, s, y)$ интегрального оператора T_1 обычно удовлетворяет условию

$$\int_a^b k(x, s, y) f(s, y) ds \in L_2([a, b] \times [c, d]), \quad \forall f \in L_2([a, b] \times [c, d]).$$

Следовательно, оператор T_1 является линейным ограниченным оператором на $L_2([a, b] \times [c, d])$. Если, кроме того, ядро $k(x, s, y)$ удовлетворяет условию

$$k(x, s, y) = \overline{k(s, x, y)} \quad \text{для почти всех } x, s \in [a, b] \text{ и } y \in [c, d],$$

тогда оператор T_1 является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$.

Пусть \mathcal{H} — сепарабельное гильбертово пространство, $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — линейный ограниченный самосопряженный оператор. Через $\sigma(A)$, $\sigma_{\text{ess}}(A)$ и $\sigma_{\text{disc}}(A)$ обозначим, соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженного оператора A (см. [22, 23]).

Введем также следующие обозначения:

$$E_{\min}(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)\}, \quad E_{\max}(A) = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)\}.$$

Число $E_{\min}(A) \in \sigma(A)$ ($E_{\max}(A) \in \sigma(A)$) будем называть нижним краем (верхним краем) существенного спектра оператора A .

Для существенно ограниченной измеримой функции $\varphi \geq 0$ на измеримом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$ мы определим [24]

$$\text{esssup}_\Omega(\varphi) = \inf\{C : \mu(\{\xi \in \Omega : \varphi(\xi) > C\}) = 0\},$$

где $\mu(\cdot)$ мера Лебега на \mathbb{R} . Для измеримой функции φ на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$, число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется [24] существенным значением функции φ , если

$$\mu(\{\xi \in \Omega : \lambda - \varepsilon < \varphi(\xi) < \lambda + \varepsilon\}) > 0,$$

для всех $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\text{essran}(\varphi)$ множество всех существенных значений функции φ .

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — полная ортонормированная система функций из $L_2[a, b]$ и пусть $\{h_k(y)\}_{k=1}^\infty$ — система существенно ограниченных измеримых вещественных функций на $[c, d]$. Определим измеримую функцию $k_1(x, s, y)$ на $[a, b]^2 \times [c, d]$ с помощью следующего правила:

$$k_1(x, s, y) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} h_k(y), \quad (2)$$

где $|h_k(y)| \leq M_k$, $k \in \mathbb{N}$ и $\sum_{k=1}^\infty M_k = M < \infty$.

Предложение 1. Частично интегральный оператор T_1 с ядром $k_1(x, s, y)$ (2) является самосопряженным ограниченным линейным оператором на $L_2([a, b] \times [c, d])$.

◁ Линейность и самосопряженность интегрального оператора T_1 с ядром (2) проверяется легко. Мы докажем ограниченность оператора T_1 . Имеем

$$T_1 f(x, y) = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^\infty \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} h_k(y) \right] f(s, y) ds = \sum_{k=1}^\infty \widehat{T}_k^{(1)} f(x, y),$$

где

$$\widehat{T}_k^{(1)} f(x, y) = \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} h_k(y) f(s, y) ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $f \in L_2([a, b] \times [c, d])$. Тогда для каждого интегрального оператора $\widehat{T}_k^{(1)}$, $k \in \mathbb{N}$, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|\widehat{T}_k^{(1)} f(x, y)| \leq |h_k(y)| |\varphi_k(x)| \sqrt{\int_a^b |f(s, y)|^2 ds}.$$

Следовательно,

$$\left\| \widehat{T}_k^{(1)} f \right\|^2 \leq \int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx \int_c^d |h_k(y)|^2 dy \int_a^b |f(s, y)|^2 ds dy \leq M_k^2 \|f\|^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\|T_1 f\| \leq M \|f\|$. Таким образом, оператор T_1 является ограниченным оператором в $L_2([a, b] \times [c, d])$. Предложение 1 доказано. \triangleright

Рассмотрим следующие ортогональные проекторы P_k , $k \in \mathbb{N}$, в пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$:

$$P_k f(x, y) = \int_a^b \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} f(s, y) d\mu_1(s), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предложение 2. Пусть E — тождественный оператор в пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$. Тогда $P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots = E$.

\triangleleft По предположению $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система в $L_2[a, b]$. Для каждого $f(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d])$ имеем $f(x, \omega) \in L_2[a, b]$ при п. в. $\omega \in [c, d]$ и, пользуясь свойством ряда Фурье в гильбертовом пространстве $L_2[a, b]$, получим

$$f(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\omega) \varphi_n(x) \quad \text{при п. в. } \omega \in [c, d], \quad (3)$$

где

$$c_n(\omega) = \int_a^b f(x, \omega) \overline{\varphi_n(x)} dx, \quad \omega \in [c, d].$$

Из (3) получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n c_j(\omega) \varphi_j - f_\omega \right\|_{L_2[a, b]} = 0 \quad \text{при п. в. } \omega \in [c, d],$$

где $f_\omega(x) = f(x, \omega)$.

Отсюда имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j - f_\omega \right\|_{L_2([a, b] \times [c, d])} = 0.$$

Таким образом, для каждого $f(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d])$ верно равенство $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \varphi_n(x)$. Отсюда

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f(s, y) \overline{\varphi_n(s)} ds \right) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_k f(x, y),$$

т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} P_k = E$. Предложение 2 доказано. \triangleright

Предложение 3. Для спектра $\sigma(T_1)$ ЧИО T_1 с невырожденным ядром $k_1(x, s, y)$ (2), справедливо включение

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{essran}(h_k) \subset \sigma(T_1).$$

Предложение 4. Число $\lambda_0 \neq 0$ является собственным значением оператора T_1 тогда и только тогда, когда существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $\mu_2(h_{j_0}^{-1}(\{\lambda_0\})) > 0$.

Предложение 5. Любое собственное значение $\lambda \neq 0$ ЧИО T_1 является бесконечно кратным.

Доказательства предложений 3, 4 и 5 аналогичны доказательствам теоремы 2.3, предложений 2.1 и 2.4 из [21], соответственно.

3. Спектр частично интегрального оператора T_1

В этом параграфе будем исследовать спектр ЧИО T_1 с невырожденным ядром (2).

Предложение 6. Имеет место свойство $0 \in \sigma(T_1)$.

◁ Пусть $\lambda_k \in \text{essran}(h_k) \neq \emptyset$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_k \in \sigma(T_1)$, $k \in \mathbb{N}$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ сходящийся, то $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$. В силу $|h_k(y)| \leq M_k$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(y) = 0$ при почти всех $y \in [c, d]$. Следовательно, для последовательности чисел $\lambda_k \in \sigma(T_1)$, $k \in \mathbb{N}$, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$. Из предложение 3 и в силу замкнутости спектра $\sigma(T_1)$ вытекает, что $0 \in \sigma(T_1)$. Предложение 6 доказано. ▷

Предложение 7. Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{essran}(h_k))$, то оператор $T_1 - \lambda E$ обратим в $L_2([a, b] \times [c, d])$, а оператор $(T_1 - \lambda E)^{-1}$ ограничен в $L_2([a, b] \times [c, d])$, более того,

$$(T_1 - \lambda E)^{-1} f(x, y) = -\frac{1}{\lambda} \left(f(x, y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y)}{h_k(y) - \lambda} P_k f(x, y) \right).$$

◁ Сначала докажем ограниченность оператора $(T_1 - \lambda E)^{-1}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{essran}(h_k))$. Рассмотрим линейный оператор B :

$$\begin{aligned} Bf(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h_k(y) - \lambda} P_k f(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y) + \lambda - h_k(y)}{h_k(y) - \lambda} P_k f(x, y) \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[-\sum_{k=1}^{\infty} P_k f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y)}{h_k(y) - \lambda} P_k f(x, y) \right] = -\frac{1}{\lambda} \left[f(x, y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k(y)}{h_k(y) - \lambda} P_k f(x, y) \right]. \end{aligned}$$

Определим в $L_2([a, b] \times [c, d])$ линейный оператор A :

$$Af(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{T}_k^{(2)} f(x, y),$$

где

$$\widehat{T}_k^{(2)} f(x, y) = \int_a^b \frac{h_k(y)}{h_k(y) - \lambda} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} f(s, y) ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $f \in L_2([a, b] \times [c, d])$ — произвольная функция. Тогда для интегральных операторов $\widehat{T}_k^{(2)}$, $k \in \mathbb{N}$, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|\widehat{T}_k^{(2)} f(x, y)|^2 \leq \left| \frac{h_k(y)}{h_k(y) - \lambda} \right|^2 |\varphi_k(x)|^2 \int_a^b |f(s, y)|^2 ds.$$

Так как $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{essran}(h_k))$, то существует число $c > 0$ такое, что $|h_k(y) - \lambda| \geq c$ при почти всех $y \in [c, d]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}_k^{(2)}\|^2 &= \int_a^b \int_c^d |\widehat{T}_k^{(2)} f(x, y)|^2 dx dy \\ &\leq \int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx \int_a^b \int_c^d \left| \frac{h_k(y)}{h_k(y) - \lambda} \right|^2 |f(s, y)|^2 ds dy \leq \frac{M_k^2}{c^2} \|f\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|Af\| \leq \frac{M}{c} \|f\|$. Последнее означает, что оператор A ограничен. Таким образом, оператор B является линейным ограниченным оператором в пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$.

Проверим равенство $(T_1 - \lambda E)B = E$. Имеем

$$Bf(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h_k(y) - \lambda} P_k f(x, y).$$

Положим $g(x, y) = Bf(x, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} (T_1 - \lambda E)Bf(x, y) &= (T_1 - \lambda E)g(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (h_k(y) - \lambda) P_k g(x, y) \\ &= (h_1(y) - \lambda) P_1 \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_j f(x, y)}{h_j(y) - \lambda} \right] + \dots + (h_n(y) - \lambda) P_n \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_j f(x, y)}{h_j(y) - \lambda} \right] + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k^2 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k f(x, y) = f(x, y). \end{aligned}$$

Следовательно, $(T_1 - \lambda E)B = E$.

Аналогично легко показать, что $B(T_1 - \lambda E) = E$. Таким образом, оператор B является обратным оператором для оператора $T_1 - \lambda E$, т. е. $(T_1 - \lambda E)^{-1} = B$. Предложение 7 доказано. \triangleright

В силу предложений 3, 5, 6 и 7 справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для спектра $\sigma(T_1)$ ЧИО T_1 с невырожденным ядром k_1 (2) справедлива формула

$$\sigma(T_1) = \sigma_{\text{ess}}(T_1) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{essran}(h_k) \right).$$

Для ЧИО T_1 с вырожденными ядрами аналогии теоремы 1 доказаны в работе [21]. Пусть T_2 — линейный интегральный оператор в пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$, заданный по формуле

$$(T_2 f)(x, y) = \int_c^d q(x, t, y) f(x, t) dt. \quad (4)$$

Здесь $q(x, t, y)$ — измеримая функция в смысле Лебега на $[a, b] \times [c, d]^2$ и интеграл понимается в смысле Лебега на $[c, d]$.

Ядро $q(x, t, y)$ интегрального оператора T_2 обычно удовлетворяет условию

$$\int_c^d q(x, t, y) f(x, t) dt \in L_2([a, b] \times [c, d]), \quad \forall f \in L_2([a, b] \times [c, d]).$$

Следовательно, оператор T_2 является линейным ограниченным оператором на $L_2([a, b] \times [c, d])$. Если, кроме того, ядро $q(x, s, y)$ удовлетворяет условию

$$q(x, t, y) = \overline{q(x, y, t)} \quad \text{для почти всех } x \in [a, b] \text{ и } y, t \in [c, d],$$

тогда оператор T_2 является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$.

Пусть $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^\infty$ — полная ортонормированная система функций из $L_2[c, d]$ и пусть $\{p_j(x)\}_{j=1}^\infty$ — система существенно ограниченных измеримых вещественных функций на $[a, b]$. Определим измеримую функцию $k_2(x, t, y)$ на $[a, b] \times [c, d]^2$ с помощью следующего правила:

$$k_2(x, t, y) = \sum_{j=1}^\infty p_j(x) \psi_j(y) \overline{\psi_j(t)}, \quad (5)$$

где $|p_j(x)| \leq N_j$, $j \in \mathbb{N}$ и $\sum_{j=1}^\infty N_j = N < \infty$. Тогда ЧИО T_2 с невырожденным ядром $k_2(x, t, y)$:

$$(T_2 f)(x, y) = \int_c^d k_2(x, t, y) f(x, t) d\mu_2(t), \quad (6)$$

есть линейный ограниченный самосопряженный оператор в $L_2([a, b] \times [c, d])$.

Аналогичным образом теорема 1 формулируется для ЧИО T_2 .

Теорема 2. Для спектра $\sigma(T_2)$ ЧИО T_2 (6) с невырожденным ядром $k_2(x, t, y)$ (5) справедлива формула

$$\sigma(T_2) = \sigma_{\text{ess}}(T_2) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^\infty \text{essran}(p_j) \right).$$

4. О спектре частично интегрального оператора $T_1 + T_2$

В этом параграфе мы коротко изложим доказательство теоремы о существенном спектре ЧИО $T_1 + T_2$. Надо подчеркнуть, что спектры оператора $T_1 + T_2$ с непрерывным ядром исследованы в работе [18], а с вырожденным ядром исследованы в [21].

Предложение 8. Ноль принадлежит существенному спектру оператора $T_1 + T_2$.

◁ Пусть $x_0 \in [a, b]$ и $y_0 \in [c, d]$ — фиксированные точки. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим подмножества $\mathfrak{J}_n^{(1)} \subset [a, b]$ и $\mathfrak{J}_n^{(2)} \subset [c, d]$:

$$\mathfrak{J}_n^{(1)} = \left\{ x \in [a, b] : \frac{1}{n+1} < |x - x_0| < \frac{1}{n} \right\},$$

$$\mathfrak{J}_n^{(2)} = \left\{ y \in [c, d] : \frac{1}{n+1} < |y - y_0| < \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mu_1(\mathfrak{J}_n^{(1)}) > 0$ и $\mu_2(\mathfrak{J}_n^{(2)}) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(\mathfrak{J}_n^{(1)}) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(\mathfrak{J}_n^{(2)}) = 0$. Мы определим следующую последовательность ортонормированных функций $\chi_n^{(1)}(x) \in L_2[a, b]$ и $\chi_n^{(2)}(y) \in L_2[c, d]$:

$$\chi_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu_1(\mathfrak{J}_n^{(1)})}}, & x \in \mathfrak{J}_n^{(1)}, \\ 0, & x \notin \mathfrak{J}_n^{(1)}, \end{cases} \quad \chi_n^{(2)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu_2(\mathfrak{J}_n^{(2)})}}, & y \in \mathfrak{J}_n^{(2)}, \\ 0, & y \notin \mathfrak{J}_n^{(2)}. \end{cases}$$

Определим через $f_n(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d])$, $n \in \mathbb{N}$, ортонормированную систему функций $f_n(x, y) = \chi_n^{(1)}(x)\chi_n^{(2)}(y)$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\|(T_1 + T_2)f_n\| \leq \|T_1 f_n\| + \|T_2 f_n\|$.

Сначала покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_1 f_n\| = 0$.

Пусть T_1^0 — ЧИО с ядром $k_1(x, s, y_0)$ (см. (2)), заданный по формуле

$$T_1^0 f(x, y) = \int_a^b k_1(x, s, y_0) f(s, y) ds.$$

Тогда

$$T_1^0 f_n(x, y) = \int_a^b k_1(x, s, y_0) \chi_n^{(1)}(s) \chi_n^{(2)}(y) ds = (K_{y_0}^{(1)} \chi_n^{(1)})(x) \chi_n^{(2)}(y),$$

где $K_{y_0}^{(1)}$ — компактный интегральный оператор, действующий в $L_2[a, b]$ по равенству

$$K_{y_0}^{(1)} \varphi(x) = \int_a^b k_1(x, s, y_0) \varphi(s) ds.$$

Следовательно,

$$\|T_1^0 f_n\|^2 = \int_{\mathfrak{J}_n^{(2)}} \|K_{y_0}^{(1)} \chi_n^{(1)}\|^2 |\chi_n^{(2)}(y)|^2 dy = \|K_{y_0}^{(1)} \chi_n^{(1)}\|_{L_2[a, b]}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, получим

$$\begin{aligned} (T_1 - T_1^0) f_n(x, y) &= \int_a^b (k_1(x, s, y) - k_1(x, s, y_0)) f_n(s, y) ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (h_k(y) - h_k(y_0)) \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} f_n(s, y) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{T}_k^{(3)} f_n(x, y). \end{aligned}$$

где

$$\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x, y) = \int_a^b (h_k(y) - h_k(y_0)) \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} f_n(s, y) ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x, y)| \leq |h_k(y) - h_k(y_0)| |\varphi_k(x)| |\chi_n^{(2)}(y)| \sqrt{\int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds}.$$

Следовательно,

$$|\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x, y)|^2 \leq |h_k(y) - h_k(y_0)|^2 |\varphi_k(x)|^2 |\chi_n^{(2)}(y)|^2 \int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Надо отметить, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $|h_k(y) - h_k(y_0)| \leq 2M_k$, при п. в. $y \in \mathfrak{J}_n^{(2)}$, так как $|h_k(y)| \leq M_k$, $k \in \mathbb{N}$ (см. (2)). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{T}_k^{(3)} f_n\|^2 &= \int_a^b \int_c^d |\widehat{T}_k^{(3)} f_n(x, y)|^2 dx dy \\ &\leq \int_a^b \int_c^d \left[(2M_k)^2 |\varphi_k(x)|^2 |\chi_n^{(2)}(y)|^2 \int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds \right] dx dy = (2M_k)^2 \int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds, \quad n, k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|\widehat{T}_k^{(3)} f_n\| \leq 2M_k \sqrt{\int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds}, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\|(T_1 - T_1^0) f_n\| \leq 2M \sqrt{\int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds}.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, т. е. существует достаточно большое $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\int_{\mathfrak{J}_n^{(1)}} |\overline{\varphi_k(s)}|^2 ds < \frac{\varepsilon^2}{(2M_k n)^2 k^4}$ при каждом $n \geq n_0$, где ε — достаточно малое положительное число. Следовательно,

$$\|(T_1 - T_1^0) f_n\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{k^2 n} = \frac{\varepsilon}{n} C_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $C_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Отсюда имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_1 - T_1^0) f_n\| = 0$.

Таким образом, из $\|T_1 f_n\| \leq \|(T_1 - T_1^0) f_n\| + \|T_1^0 f_n\|$ получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_1 f_n\| = 0$. Аналогично докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_2 f_n\| = 0$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_1 + T_2) f_n\| = 0$. Из определения существенного спектра [22, 23] вытекает $0 \in \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. Предложение 8 доказано. \triangleright

Предложение 9. *Имеет место соотношение*

$$\sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2).$$

\triangleleft Мы покажем, что $\sigma(T_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. Пусть $\lambda_0 \in \text{essran}(h_{j_0})$, $\lambda_0 \neq 0$ и y_0 — произвольная точка из подмножества $h_{j_0}^{-1}(\{\lambda_0\})$. Определим через $g_n(x, y) \in L_2([a, b] \times [c, d])$ ортонормированную систему функций: $g_n(x, y) = \varphi_{j_0}(x) \chi_n^{(2)}(y)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказательство равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_1 - \lambda_0 E) g_n\| = 0 \tag{7}$$

аналогично доказательству теоремы 2.3 из [21].

Для оператора T_2 имеем

$$T_2 g_n(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_c^d p_j(x) \psi_j(y) \overline{\psi_j(t)} g_n(x, t) dt = \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{T}_j^{(4)} g_n(x, y),$$

где

$$\widehat{T}_j^{(4)} g_n(x, y) = \int_c^d p_j(x) \psi_j(y) \overline{\psi_j(t)} g_n(x, t) dt, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|T_2 g_n\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\widehat{T}_j^{(4)} g_n\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sqrt{\int_{\mathfrak{J}_n^{(2)}} |\overline{\psi_j(t)}|^2 dt}. \quad (8)$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, существует достаточно большое $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\int_{\mathfrak{J}_n^{(2)}} |\overline{\psi_j(t)}|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{j^4 n^2 N_j^2}$ при всех $n \geq n_0$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое. Тогда из (8) получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_2 g_n\| = 0$. Отсюда и из (7) вытекает $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T_1 + T_2 - \lambda_0 E)g_n\| = 0$, т. е. по определению существенного спектра $\lambda_0 \in \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$.

Аналогично получим, что $\sigma(T_2) \setminus \{0\} \subset \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. В силу предложения 8 имеем $0 \in \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. Предложение 9 доказано. \triangleright

Пользуясь предложением 4 и применяя универсальную технику, изложенную в доказательствах утверждений из [21] о спектре ЧИО $T_1 + T_2$ с вырожденными ядрами, получим описание существенного спектра самосопряженного ЧИО $T_1 + T_2$ с невырожденными ядрами (см. также теоремы 4.2 и 5.4 из [18]). Не повторяя громоздкой процедуры, изложенной в [21], мы сформулируем следующие теоремы.

Теорема 3. Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$ ЧИО $T_1 + T_2$ с невырожденным ядром верна формула

$$\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{essran}(h_k) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \text{essran}(p_j) \right).$$

Теорема 4. Пусть выполняются следующие условия для функций $h_j(y)$, $j \in \mathbb{N}$ и $p_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ в ядрах (2) и (5):

$$h_j(y) \geq h_{j+1}(y) > 0, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad p_k(x) \geq p_{k+1}(x) > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть существуют убывающие последовательности из положительных чисел $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такие, что

- (i) $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$;
- (ii) $\max\{\text{esssup}(h_1), \text{esssup}(p_1)\} = \max\{a_1, b_1\}$;
- (iii) $h_j(y) \geq a_j$ при п. в. $y \in [c, d]$, $j \in \mathbb{N}$ и $p_k(x) \geq b_k$ при п. в. $x \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда ЧИО $T_1 + T_2$ имеет счетное число собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\max}(T_1 + T_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$.

\triangleleft Пусть V_1, V_2 — самосопряженные частично интегральные операторы в пространстве $L_2([a, b] \times [c, d])$ с невырожденным ядром, заданные по формуле

$$V_1 f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_a^b a_j \varphi_j(x) \overline{\varphi_j(s)} f(s, y) ds, \quad V_2 f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_c^d b_k \psi_k(y) \overline{\psi_k(t)} f(x, t) dt.$$

Для существенного и дискретного спектра самосопряженного ЧИО $V_1 + V_2$ верны следующие равенства [12]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}(V_1 + V_2) &= \{0\} \cup \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}} \cup \{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \\ \sigma_{\text{disc}}(V_1 + V_2) &= \{\omega : \omega = a_j + b_k \notin \sigma_{\text{ess}}(V_1 + V_2), j, k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, ЧИО $V_1 + V_2$ имеет счетное число собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\text{max}}(V_1 + V_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(V_1 + V_2)$, т. е. множество $\sigma_{\text{disc}}(V_1 + V_2) \cap (E_{\text{max}}(V_1 + V_2), \infty)$ является счетным множеством.

В силу условий (ii) и (iii) теоремы 4 следует, что $E_{\text{max}}(T_1 + T_2) = E_{\text{max}}(V_1 + V_2)$ и $V_1 \leq T_1, V_2 \leq T_2$. Тогда из неравенства $V_1 + V_2 \leq T_1 + T_2$ и леммы 2.2 из [25] ЧИО $T_1 + T_2$ имеет счетное число собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\text{max}}(T_1 + T_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$. Теорема 4 доказана. \triangleright

ПРИМЕР 1. Пусть $[a, b] = [c, d] = [0, 1]$ и для ядер операторов T_1 и T_2 имеют место следующие равенства:

$$h_1(y) \equiv 2, h_j(y) = \frac{1}{j^2} + e^{-jy}, j \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad \text{и} \quad p_1(x) \equiv 1, p_k(x) = \frac{1 + \sin \frac{\pi x}{2}}{2k^2}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Рассмотрим убывающие последовательности из положительных чисел $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$a_1 = 2, a_j = \frac{1}{j^2} + \frac{1}{e^j}, j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad b_1 = 1, b_k = \frac{1}{2k^2}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Тогда в силу теорем 1, 2 и 3 для существенных спектров операторов T_1, T_2 и $T_1 + T_2$ справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}(T_1) &= \{0, 2\} \cup \left(\bigcup_{j=2}^{\infty} \left[\frac{1}{j^2} + \frac{1}{e^j}; \frac{1}{j^2} + 1 \right] \right) = \left[0, \frac{5}{4} \right] \cup \{2\}, \\ \sigma_{\text{ess}}(T_2) &= \{0, 1\} \cup \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2k^2}; \frac{1}{k^2} \right] \right) = \left[0, \frac{1}{4} \right] \cup \{1\}, \\ \sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2) &= \sigma_{\text{ess}}(T_1) \cup \sigma_{\text{ess}}(T_2) = \left[0, \frac{5}{4} \right] \cup \{2\}. \end{aligned}$$

Из (9) вытекает $\sigma_{\text{ess}}(V_1 + V_2) = \{0, 1, 2\} \cup \left\{ \frac{1}{j^2} + \frac{1}{e^j} \right\}_{j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \cup \left\{ \frac{1}{2k^2} \right\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$. Здесь верно равенство $E_{\text{max}}(T_1 + T_2) = E_{\text{max}}(V_1 + V_2) = 2$.

Таким образом, в данном примере для ЧИО $T_1 + T_2$ выполняются все условия теоремы 4. Следовательно, ЧИО $T_1 + T_2$ имеет счетное число положительных собственных значений, лежащих выше верхнего края $E_{\text{max}}(T_1 + T_2)$ существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(T_1 + T_2)$.

Литература

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений.—М.: Наука, 1948.—296 с.
2. Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. On a class of integral equations in mixed problems of continuum mechanics // Soviet Phys. Dokl.—1980.—Vol. 25, № 2.—P. 354–356.
3. Aleksandrov V. M., Kovalenko E. V. Contact interaction of bodies with coatings in the presense of abrasion // Soviet Phys. Dokl.—1984.—Vol. 29, № 4.—P. 340–342.
4. Manzhirou A. V. On a method for solving two-dimensional integral equation for exially symmetric contact problem for bodies with complex layer rheology // J. Appl. Math. Mech.—1985.—Т. 49, № 6.—P. 777–782. DOI: 10.1016/0021-8928(85)90016-4.

5. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 2.—М.—Л., 1934.—318 с.
6. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т. 1.—Л.—М., 1934.—330 с.
7. Эшкабилов Ю. Х. Об одном дискретном «трехчастичном» операторе Шредингера в модели Хаббарда // Теорет. и мат. физ.—2006.—Т. 149, № 2.—С. 228–243. DOI: 10.4213/tmf4229.
8. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices // Russ. J. Math. Phys.—2007.—Vol. 14, № 4.—P. 377–387. DOI: 10.1134/S1061920807040024.
9. Расулов Т. Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке // Теорет. и мат. физ.—2010.—Т. 163, № 1.—С. 34–44. DOI: 10.4213/tmf6485.
10. Appell J. M., Kalitvin A. S., Nashed M. Z. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids // Z. Angew. Math. Mech.—1999.—Vol. 79, № 10.—P. 703–713.
11. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами.—Воронеж: ЦЧКИ, 2000.—252 с.
12. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.—N. Y., 2000.—578 p. DOI: 10.1201/9781482270402.
13. Калитвин А. С. О спектре линейных операторов с частными интегралами и положительными ядрами // Операторы и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр.—Ленинград, 1988.—С. 43–50.
14. Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. On the theory of partial integral operators // J. Integral Equ. Appl.—1991.—Vol. 3, № 3.—P. 351–382. DOI: 10.1216/jiea/1181075630.
15. Калитвин А. С., Калитвин В. А. Линейные операторы и уравнения с частными интегралами // Современ. матем. фундам. напрвления.—2019.—Т. 65, № 3.—С. 390–433. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
16. Эшкабилов Ю. Х. О спектре тензорной суммы компактных операторов // Узбек. мат. журн.—2005.—№ 3.—С. 104–112.
17. Эшкабилов Ю. Х. Частично интегральный оператор с ограниченным ядром // Мат. тр.—2008.—Т. 11, № 1.—С. 192–207.
18. Эшкабилов Ю. Х. Существенный и дискретный спектры частично интегральных операторов // Мат. тр.—2008.—Т. 11, № 2.—С. 187–203.
19. Эшкабилов Ю. Х. О дискретном спектре частично интегральных операторов // Мат. тр.—2012.—Т. 15, № 2.—С. 194–203.
20. Арзикулов Г. П., Эшкабилов Ю. Х. О существенном и дискретном спектрах одного частично интегрального оператора типа Фредгольма // Мат. тр.—2014.—Т. 17, № 2.—С. 23–40.
21. Arzikulov G. P., Eshkabilov Yu. Kh. On the spectra of partial integral operators // Uzbek Math. J.—2015.—№ 2.—P. 148–159.
22. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ.—М.: Мир, 1977.—412 с.
23. Pankrashkin K. Introduction to the Spectral Theory.—Orsay, 2014.
24. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—750 с.
25. Эшкабилов Ю. Х. О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса // Мат. тр.—2011.—Т. 14, № 1.—С. 195–211.

Статья поступила 19 октября 2021 г.

КУЛТУРАЕВ ДАВРОН ЖУРАЕВИЧ
 Каршинский государственный университет,
 базовый докторант кафедры математического анализа
 и дифференциальных уравнений
 Узбекистан, 180100, Карши, ул. Кучабег, 17
 E-mail: davron_2189@mail.ru

ЭШКАБИЛОВ ЮСУП ХАЛБАЕВИЧ
 Каршинский государственный университет,
 профессор кафедры математического анализа
 и дифференциальных уравнений
 УЗБЕКИСТАН, 180100, Карши, ул. Кучабег, 17,
 E-mail: yusup62@mail.ru

SPECTRAL PROPERTIES OF SELF-ADJOINT PARTIALLY
INTEGRAL OPERATORS WITH NON-DEGENERATE KERNELSKulturayev, D. J.¹ and Eshkabilov, Yu. Kh.¹¹ Karshi State University, 17 Kuchabag St., Karshi 180100, Uzbekistan

E-mail: davron_2189@mail.ru, yusup62@mail.ru

Abstract. In this paper, we consider linear bounded self-adjoint integral operators T_1 and T_2 in the Hilbert space $L_2([a, b] \times [c, d])$, the so-called partially integral operators. The partially integral operator T_1 acts on the functions $f(x, y)$ with respect to the first argument and performs a certain integration with respect to the argument x , and the partially integral operator T_2 acts on the functions $f(x, y)$ with respect to the second argument and performs some integration over the argument y . Both operators are bounded, however both are not compact operators. However, the operator $T_1 T_2$ is compact and $T_1 T_2 = T_2 T_1$. Partially integral operators arise in various areas of mechanics, the theory of integro-differential equations, and the theory of Schrodinger operators. In this paper, the spectral properties of linear bounded self-adjoint partially integral operators T_1 , T_2 and $T_1 + T_2$ with nondegenerate kernels are investigated. A formula is obtained for describing the essential spectra of the partially integral operators T_1 and T_2 . It is shown that the operators T_1 and T_2 have no discrete spectrum. A theorem on the structure of the essential spectrum of the partially integral operator $T_1 + T_2$ is proved. The problem of the existence of a countable number of eigenvalues in the discrete spectrum of the partially integral operator $T_1 + T_2$ is studied.

Key words: partially integral operator, spectra, essential spectrum, discrete spectrum, non-degenerate kernel.

AMS Subject Classification: 47A10, 47A11, 47B38, 47G10.

For citation: Kulturayev, D. J. and Eshkabilov, Yu. Kh. Spectral Properties of Self-Adjoint Partially Integral Operators with Non-Degenerate Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 4, pp. 91–104 (in Russian). DOI: 10.46698/y9559-5148-4454-e.

References

1. Vekua, I. N. *Novye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [New Methods for Solving Elliptic Equations], Moscow, Nauka, 1948, 296 p. (in Russian).
2. Aleksandrov, V. M. and Kovalenko, E. V. On a Class of Integral Equations in Mixed Problems of Continuum Mechanics, *Soviet Physics. Doklady*, 1980, vol. 25, no. 2, pp. 354–356.
3. Aleksandrov, V. M. and Kovalenko, E. V. Contact Interaction of Bodies with Coatings in the Presense of Abrasion, *Soviet Physics. Doklady*, 1984, vol. 29, no. 4, pp. 340–342.
4. Manzhirov, A. V. On a Method for Solving Two-Dimensional Integral Equation for Exially Symmetric Contact Problem for Bodies with Complex Layer Rheology, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, vol. 49, no. 6, pp. 777–782. DOI: 10.1016/0021-8928(85)90016-4.
5. Gursa, E. *Kurs matematicheskogo analiza. T. 3, ch. 2* [A Course of Mathematical Analysis. Vol. 3, part 2], Moscow, Leningrad, 1934, 318 p. (in Russian).
6. Muntz, G. *Integral'nye uravneniya. T. 1* [Integral Equations. Vol. 1], Leningrad, Moscow, 1934, 330 p. (in Russian).
7. Eshkabilov, Yu. Kh. A Discrete “Three-Particle” Operator Schrodinger in the Hubbard Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2006, vol. 149, no. 2, pp. 1497–1511. DOI: 10.1007/s11232-006-0133-2.
8. Albeverio, S., Lakaev, S. N. and Muminov, Z. I. On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices, *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2007, vol. 14, no. 4, pp. 377–387. DOI: 10.1134/S1061920807040024.
9. Rasulov, T. Kh. Asymptotics of the Discrete Spectrum of One Model Operator Associated with a System of Three Particles on Lattice, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2010, vol. 163, no. 1, pp. 429–437. DOI: 10.1007/s11232-010-0033-3.

10. Appell, J. M., Kalitvin, A. S. and Nashed, M. Z. On Some Partial Integral Equations Arising in the Mechanics of Solids, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, vol. 79, no. 10, pp. 703–713. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4001(199910)79:10<703::AID-ZAMM703>3.0.CO;2-W.
11. Kalitvin, A. S. *Lineynye operatory s chastnymi integralami* [Linear Operators with Partial Integrals], Voronezh, Central Black Earth Book Publishing House, 2000, 252 p. (in Russian).
12. Appell, J. M., Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York, 2000, 578 p. DOI: 10.1201/9781482270402.
13. Kalitvin, A. S. On the Spectrum of Linear Operators with Partial Integrals and Positive Kernels, *Operatory i ikh prilozheniya: Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov* [Operators and their Applications: Interuniversity Compilation of Scientific Works], Leningrad, 1988, pp. 43–50 (in Russian).
14. Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P. On the Theory of Partial Integral Operators, *Journal of Integral Equations and Applications*, 1991, vol. 3, no. 3, pp. 351–382. DOI: 10.1216/jiea/1181075630.
15. Kalitvin, A. S. and Kalitvin, V. A. Linear Operators and Equations with Partial Integrals, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2019, vol. 65, no. 3, pp. 390–433 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
16. Eshkabilov, Yu. Kh. On the Spectrum of the Tensor Sum of Compact Operators, *Uzbek Mathematical Journal*, 2005, no. 3, pp. 104–112 (in Russian).
17. Eshkabilov, Yu. Kh. Partial Integral Operator with Bounded Kernels, *Siberian Advances in Mathematics*, 2008, vol. 19, no. 3, pp. 151–161. DOI: 10.3103/S1055134409030018.
18. Eshkabilov, Yu. Kh. Essential and Discrete Spectra of Partially Integral Operators, *Siberian Advances in Mathematics*, 2008, vol. 19, no. 4, pp. 233–244. DOI: 10.3103/S1055134409040026.
19. Eshkabilov, Yu. Kh. On the Discrete Spectrum of Partially Integral Operators, *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, vol. 23, no. 4, pp. 227–233. DOI: 10.3103/S1055134413040019.
20. Arzikulov, G. P. and Eshkabilov, Yu. Kh. On the Essential and the Discrete Spectra of a Fredholm Type Partial Integral Operator, *Siberian Advances in Mathematics*, 2014, vol. 25, no. 4, pp. 231–242. DOI: 10.3103/S105513441504001X.
21. Arzikulov, G. P. and Eshkabilov, Yu. Kh. On the Spectra of Partial Integral Operators, *Uzbek Mathematical Journal*, 2015, no. 2, pp. 148–159.
22. Reed, M. and Simon, B. *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 1. Funktsional'nyy analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis], Moscow, Mir, 1977, 412 p. (in Russian).
23. Pankrashkin, K. *Introduction to the Spectral Theory*, Orsay, 2014.
24. Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1984, 750 p. (in Russian).
25. Eshkabilov, Yu. Kh. On Infinity of the Discrete Spectrum Operators in the Friedrichs Model, *Siberian Advances in Mathematics*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 1–12. DOI: 10.3103/S1055134412010014.

Received October 19, 2021

DAVRON ZH. KULTURAYEV
Karshi State University,
17 Kuchabag St., Karshi 180100, Uzbekistan,
Ph. D Student of the Department of Mathematical Analysis
and Differential Equations
E-mail: davron_2189@mail.ru

YUSUP KH. ESHKABILOV
Karshi State University,
17 Kuchabag St., Karshi 180100, Uzbekistan,
Professor of the Department of Mathematical Analysis
and Differential Equations
E-mail: yusup62@mail.ru