Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 3, С. 59–75

УДК 517.5
DOI 10.46698/z5526-4462-9472-g

ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ, АССОЦИИРОВАННОГО СО СФЕРИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

Н. П. Волчкова[1], **Вит. В. Волчков**[2]

[1] Донецкий национальный технический университет,
Россия, 283000, Донецк, ул. Артёма, 58;
[2] Донецкий государственный университет,
Россия, 283001, Донецк, ул. Университетская, 24
E-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com, v.volchkov@donnu.ru

Памяти Лоуренса Зальцмана
(*09.06.1943–31.05.2022*) *посвящается*

Аннотация. Очевидным свойством произвольной ненулевой гладкой антипериодической функции является отсутствие соответствующего периода у ее производной. Другими словами, если r — фиксированное положительное число и на вещественной оси $f(x+r)+f(x-r)=0$ и $f'(x+r)-f'(x-r)=0$, то $f=0$. Этот факт допускает нетривиальные обобщения на многомерные пространства. Одним из общих методов для таких обобщений является следующая теорема Брауна — Шрейбера — Тейлора о спектральном анализе: любое ненулевое подпространство $\mathscr{U}$ в $C(\mathbb{R}^n)$, инвариантное относительно всех движений $\mathbb{R}^n$, содержит радиальную функцию вида $(\lambda|x|)^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)$, где λ — некоторое комплексное число, J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν. В частности, если функция $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ и ее нормальная производная имеют нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса r в $\mathbb{R}^n$, то $f=0$. В терминах сверток это означает инъективность оператора $\mathscr{P}f=(f*\Delta\chi_r, f*\sigma_r)$, $f\in C(\mathbb{R}^n)$, где Δ — оператор Лапласа, χ_r — индикатор шара $B_r=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<r\}$, σ_r — поверхностная дельта-функция, сосредоточенная на сфере $S_r=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=r\}$. В данной работе изучается задача об обращении оператора $\mathscr{P}$ на классе распределений. Получена новая формула восстановления распределения $f\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ по известным сверткам $f*\Delta\chi_r$ и $f*\sigma_r$. В работе используются методы гармонического анализа, а также теории целых и специальных функций. Ключевым шагом в доказательстве основного результата является разложение дельта-функции Дирака по системе радиальных распределений с носителями в $\overline{B}_r$, биортогональной к некоторой системе сферических функций. Подобный подход можно использовать для обращения других операторов свертки с радиальными распределениями из $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Ключевые слова: радиальные распределения, периодичность в среднем, преобразование Помпейю, формулы обращения.

AMS Subject Classification: 44A35, 42A85.

Образец цитирования: *Волчкова Н. П., Волчков Вит. В.* Обращение оператора свертки, ассоциированного со сферическими средними // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 3.—С. 59–75. DOI: 10.46698/z5526-4462-9472-g.

1. Введение

Задача о восстановлении функции по ее сферическим средним восходит к Г. Минковскому [1], П. Функу [2] и И. Радону [3]. В последнем разделе указанной статьи И. Радона содержится, в частности, следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $r > 0$ фиксировано, λ — произвольный положительный нуль функции Бесселя J_0. Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}$ функция*

$$J_k\left(\frac{\lambda\sqrt{x^2+y^2}}{r}\right)\left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^k$$

имеет нулевые интегралы по всем окружностям радиуса r в $\mathbb{R}^2$.

Аналогичные примеры, связанные с нулями функции Бесселя $J_{\frac{n}{2}-1}$, можно построить и для сферических средних в $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$. Отсюда видно, что знание средних функции $f \in C(\mathbb{R}^n)$ по всем сферам одного радиуса недостаточно для однозначного восстановления f. В дальнейшем изучением класса функций $f \in C(\mathbb{R}^n)$, имеющих нулевые интегралы по всем сферам фиксированного радиуса в $\mathbb{R}^n$, занимались многие авторы (см. [4–9] и библиографию к этим работам). Весьма общий метод для его исследования был разработан Л. Брауном, Б. М. Шрейбером и Б. А. Тейлором [10]. Они доказали, что любое ненулевое подпространство $\mathscr{U}$ в $C(\mathbb{R}^n)$, инвариантное относительно всех движений $\mathbb{R}^n$, содержит радиальную функцию $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)$, где λ — некоторое комплексное число, $|x|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)}{z^\nu}, \quad \nu, z \in \mathbb{C}.$$

Эта теорема о спектральном анализе влечет, в частности, следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $r > 0$ фиксировано, $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| = r\}$ — сфера радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, $d\sigma$ — элемент площади на $S_r(x)$ и $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ означает дифференцирование по внешней нормали к $S_r(x)$. Тогда оператор*

$$\mathscr{P}f(x) = \left(\int\limits_{S_r(x)} f\,d\sigma, \int\limits_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,d\sigma\right), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

является инъективным.

Оператор $\mathscr{P}$ можно интерпретировать как преобразование Помпейю, ассоциированное с распределениями $\Delta\chi_r$ и σ_r, где Δ — оператор Лапласа, χ_r — индикатор шара $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, σ_r — поверхностная дельта-функция, сосредоточенная на сфере $S_r = S_r(0)$, т. е.

$$\langle\sigma_r, \varphi\rangle = \int\limits_{S_r} \varphi\,d\sigma, \quad \varphi \in C(\mathbb{R}^n)$$

(см. [4, § 3], а также равенства (22) ниже). В работе [11] анонсирован следующий результат, дающий формулу обращения для оператора $\mathscr{P}$.

Теорема 2 [11]. *Пусть $n \geqslant 2$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$,*

$$g_0(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int\limits_{S_1(x)} f\,d\sigma, \quad g_1(x) = \frac{n-1}{\omega_{n-1}}\int\limits_{S_1(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\,d\sigma, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n).$$

1) *Если $n = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, то справедливо разложение f в виде суммы сверток*

$$f = A_1 * g_1 + A_0 * g_0,$$

в котором A_0, A_1 — распределения с носителями в шаре $|x| \leqslant 1$, определяемые как обратные преобразования Фурье

$$A_0(x) = \overset{\vee}{\alpha}_0(|\xi|), \quad A_1(x) = \overset{\vee}{\alpha}_1(|\xi|),$$

где

$$\alpha_0(s) = \frac{1}{\pi^2(2q-3)!!}\left(s^q J_q(s)\ln s - \frac{\pi}{2}s^q N_q(s)\right),$$
$$\alpha_1(s) = \frac{1}{\pi^2(2q-1)!!}\left(s^{q-1} J_{q-1}(s)\ln s - \frac{\pi}{2}s^{q-1} N_{q-1}(s)\right),$$

N_q — функция Неймана порядка q.

2) *Если $n = 2q+1$, $q \in \mathbb{N}$, то имеет место представление f в виде*

$$f = B_1 * g_1 + B_0 * g_0,$$

в котором распределения B_0, B_1 определяются равенствами

$$B_0(x) = P\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\delta(\rho-1), \quad B_1(x) = Q\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\delta(\rho-1),$$

где P и Q — некоторые дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка не выше n, $\delta(\rho-1)$ — функционал, соответствующий массе, равномерно распределенной по сфере S_1 с плотностью единица.

Другие подходы к обращению операторов типа (1) развиты в [12, 13]. Целью данной работы является нахождение новой формулы восстановления функции f по сферическим средним из (1). В отличие от [11–13], наши конструкции основаны на идеях, предложенных в [8, 14]. Формулировка основного результата приводится в § 2 (см. теорему 3 ниже). В § 3 содержатся необходимые вспомогательные утверждения. Доказательство теоремы 3 получено в § 4.

2. Формулировка основного результата

Далее, как обычно, $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство с эрмитовым скалярным произведением

$$(\zeta, \varsigma) = \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \overline{\varsigma}_j, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n),\ \varsigma = (\varsigma_1, \dots, \varsigma_n),$$

$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ — пространства распределений и распределений с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$ соответственно.

Преобразованием Фурье — Лапласа распределения $T \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ является целая функция

$$\widehat{T}(\zeta) = \left\langle T(x), e^{-i(\zeta,x)}\right\rangle, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

При этом $\widehat{T}$ растет на $\mathbb{R}^n$ не быстрее полинома и

$$\langle \widehat{T}, \psi\rangle = \langle T, \widehat{\psi}\,\rangle, \quad \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (см. [15, гл. 7]).

Если $T_1, T_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и хотя бы одно из этих распределений имеет компактный носитель, то их свертка $T_1 * T_2$ является распределением в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующим по правилу

$$\langle T_1 * T_2, \varphi\rangle = \big\langle T_2(y), \langle T_1(x), \varphi(x+y)\rangle\big\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

где $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$. Для $T_1, T_2 \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ справедлива формула Бореля

$$\widehat{T_1 * T_2} = \widehat{T_1}\,\widehat{T_2}. \tag{4}$$

Пусть $\mathscr{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ — пространство радиальных (инвариантных относительно вращений пространства $\mathbb{R}^n$) распределений из $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$. Простейшим примером распределения из класса $\mathscr{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ является дельта-функция Дирака δ с носителем в нуле. Сферическое преобразование распределения $T \in \mathscr{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$\widetilde{T}(z) = \langle T, \varphi_z\rangle, \quad z \in \mathbb{C},$$

где φ_z — сферическая функция в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\varphi_z(x) = 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(см. [16, гл. 4]). Функция φ_z однозначно определяется следующими условиями:

1) φ_z радиальная и $\varphi_z(0) = 1$;

2) φ_z удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta(\varphi_z) + z^2\varphi_z = 0. \tag{5}$$

Отметим, что $\widetilde{T}$ — четная целая функция экспоненциального типа и преобразование Фурье $\widehat{T}$ выражается через $\widetilde{T}$ по формуле

$$\widehat{T}(\zeta) = \widetilde{T}\Big(\sqrt{\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2}\Big), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{6}$$

Кроме того,

$$\widetilde{p(\Delta)T}(z) = p(-z^2)\widetilde{T}(z) \quad (p \text{ — алгебраический многочлен}). \tag{7}$$

Множество всех нулей функции $\widetilde{T}$, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и не принадлежащих отрицательной части мнимой оси, обозначим $\mathscr{Z}_+(\widetilde{T})$.

Пусть

$$\varkappa_r = \Delta\chi_r.$$

Для $T = \chi_r$, $T = \varkappa_r$ или $T = \sigma_r$ имеем (см. [9, ч. 2, гл. 3, ф. (3.90)] и (7))

$$\widetilde{\chi}_r(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz), \quad \widetilde{\varkappa}_r(z) = -z^2\widetilde{\chi}_r(z), \quad \widetilde{\sigma}_r(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n-1}\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(rz). \tag{8}$$

Отсюда и из формулы

$$\mathbf{I}'_\nu(z) = -z\mathbf{I}_{\nu+1}(z) \tag{9}$$

(см. [17, гл. 7, п. 7.2.8, ф. (51)]) находим

$$\widetilde{\chi}'_r(z) = -(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+2} z\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(rz), \quad \widetilde{\sigma}'_r(z) = -(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n+1} z\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz). \tag{10}$$

Используя хорошо известные свойства нулей функций Бесселя (см., например, [17, гл. 7, п. 7.9]), можно получить соответствующую информацию о множествах $\mathscr{Z}_+(\widetilde{\chi}_r)$, $\mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r)$ и $\mathscr{Z}_+(\widetilde{\sigma}_r)$. В частности, все нули $\widetilde{\chi}_r$ и $\widetilde{\sigma}_r$ являются простыми, принадлежат $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и

$$\mathscr{Z}_+(\widetilde{\chi}_r) = \left\{\frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \dots\right\}, \quad \mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r) = \left\{0, \frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \dots\right\}, \quad \mathscr{Z}_+(\widetilde{\sigma}_r) = \left\{\frac{\mu_1}{r}, \frac{\mu_2}{r}, \dots\right\}, \qquad (11)$$

где

$$\lambda_j = \gamma_{\frac{n}{2},j}, \quad \mu_j = \gamma_{\frac{n}{2}-1,j},$$

$\{\gamma_{\nu,j}\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность всех положительных нулей функции $\mathbf{I}_\nu$ $(\nu > -1)$, занумерованных в порядке возрастания. Поскольку функции $J_{\frac{n}{2}-1}$ и $J_{\frac{n}{2}}$ не имеют общих нулей на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, то корректно определены функции

$$\varkappa_r^\lambda(x) = -\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}\chi_r(x), \quad \lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r),$$

$$\sigma_r^\mu(x) = -\frac{1}{r\mu^2}\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)}\chi_r(x), \quad \mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\sigma}_r).$$

Пусть

$$p_r(z) = \prod_{j=1}^{m}\left(z - \left(\frac{\lambda_j}{r}\right)^2\right), \quad P_r(z) = \prod_{j=1}^{m}\left(z - \left(\frac{\mu_j}{r}\right)^2\right), \quad m = \left[\frac{n+5}{4}\right], \qquad (12)$$

$$\mathscr{H}_r = p_r(\Delta)\varkappa_r, \quad \Omega_r = P_r(\Delta)\sigma_r. \qquad (13)$$

Тогда в силу формулы (7) имеем

$$\widetilde{\mathscr{H}_r}(z) = p_r(-z^2)\widetilde{\varkappa}_r(z), \quad \widetilde{\Omega}_r(z) = P_r(-z^2)\widetilde{\sigma}_r(z), \qquad (14)$$

$$\mathscr{Z}_+\big(\widetilde{\mathscr{H}_r}\big) = \left\{0, \frac{\lambda_1}{r}, \frac{\lambda_2}{r}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{i\lambda_1}{r}, \frac{i\lambda_2}{r}, \dots, \frac{i\lambda_m}{r}\right\}, \qquad (15)$$

$$\mathscr{Z}_+\big(\widetilde{\Omega}_r\big) = \left\{\frac{\mu_1}{r}, \frac{\mu_2}{r}, \dots\right\} \cup \left\{\frac{i\mu_1}{r}, \frac{i\mu_2}{r}, \dots, \frac{i\mu_m}{r}\right\}, \qquad (16)$$

причем все нули $\widetilde{\mathscr{H}_r}$ и $\widetilde{\Omega}_r$ на $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ являются простыми. Кроме того,

$$\mathscr{Z}_+\big(\widetilde{\mathscr{H}_r}\big) \cap \mathscr{Z}_+\big(\widetilde{\Omega}_r\big) = \varnothing. \qquad (17)$$

Для $\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})$ (соответственно, $\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)$) положим

$$\mathscr{H}_r^\lambda = p_r(\Delta)\varkappa_r^\lambda \quad \big(\Omega_r^\mu = P_r(\Delta)\sigma_r^\mu\big), \qquad (18)$$

если $\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r)$ $(\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\sigma}_r))$, и

$$\mathscr{H}_r^\lambda = q_{r,\lambda}(\Delta)\varkappa_r \quad \big(\Omega_r^\mu = Q_{r,\mu}(\Delta)\sigma_r\big), \qquad (19)$$

если $p_r(-\lambda^2) = 0$ $(P_r(-\mu^2) = 0)$, где

$$q_{r,\lambda}(z) = -\frac{p_r(z)}{z+\lambda^2} \quad \left(Q_{r,\mu}(z) = -\frac{P_r(z)}{z+\mu^2}\right). \qquad (20)$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 2$. *Тогда*

$$
\begin{aligned}
f = \sum_{\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)} & \frac{4}{\mu \widetilde{\mathscr{H}_r}''(0)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)} \Big(p_r(\Delta) P_r(\Delta)\big((f * \sigma_r) * \chi_r\big) p_r(\Delta)\big((f * \varkappa_r) * \Omega_r^{\mu}\big)\Big) \\
& + \sum_{\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r}) \setminus \{0\}} \sum_{\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 - \mu^2)\widetilde{\mathscr{H}_r}{}'(\lambda)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)} \\
& \times \Big(P_r(\Delta)\left((f * \sigma_r) * \mathscr{H}_r^{\lambda}\right) - p_r(\Delta)\left((f * \varkappa_r) * \Omega_r^{\mu}\right)\Big),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где ряд (21) *сходится безусловно в пространстве* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Используя формулу Грина и определение свертки, нетрудно получить равенства

$$
(f * \varkappa_r)(x) = \int\limits_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\, d\sigma, \quad (f * \sigma_r)(x) = \int\limits_{S_r(x)} f\, d\sigma, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n). \tag{22}
$$

Таким образом, теорема 3 дает новую формулу восстановления функции f по указанным сферическим средним (см. (12), (14)–(16), (18)–(20)). Относительно других результатов, связанных с обращением оператора сферического среднего, см. [18–27].

3. Вспомогательные утверждения

Приведем сначала свойства функций $\mathbf{I}_\nu$, которые потребуются в дальнейшем.

Лемма 1. 1) *При* $\nu > -\frac{1}{2}$, $z \in \mathbb{C}$ *имеет место неравенство*

$$
|\mathbf{I}_\nu(z)| \leqslant \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}. \tag{23}
$$

2) *Если* $\nu \in \mathbb{R}$, *то*

$$
|\mathbf{I}_\nu(z)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|^{\nu + \frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{Im} z \to \infty. \tag{24}
$$

3) *Пусть* $\nu > -1$. *Тогда*

$$
\gamma_{\nu,j} = \pi\left(j + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \to \infty. \tag{25}
$$

Кроме того,

$$
\lim_{j \to \infty} (\gamma_{\nu,j})^{\nu + \frac{3}{2}} \left|\mathbf{I}_{\nu+1}(\gamma_{\nu,j})\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{26}
$$

$\lhd$ 1) Из интегрального представления Пуассона [17, гл. 7, п. 7.12, ф. (8)] имеем

$$
\mathbf{I}_\nu(z) = \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^1 \cos(uz)\left(1 - u^2\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du.
$$

Отсюда получаем

$$|\mathbf{I}_\nu(z)| \leqslant \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\bigl(\nu+\frac{1}{2}\bigr)} \int\limits_0^1 e^{u|\operatorname{Im} z|}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, du$$

$$\leqslant \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\bigl(\nu+\frac{1}{2}\bigr)} \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}\right) e^{|\operatorname{Im} z|} = \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

что и требовалось.

2) Из асимптотического разложения бесселевых функций [17, гл. 7, п. 7.13.1, ф. (3)] следует равенство

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{-\nu-\frac{1}{2}} \left(\cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|}\right)\right), \quad z \to \infty,\ -\pi < \arg z < \pi. \tag{27}$$

Учитывая, что

$$|\cos w| \sim \frac{e^{|\operatorname{Im} w|}}{2}, \quad \operatorname{Im} w \to \infty,$$

из (27) получаем (24).

3) Асимптотика (25) для нулей $\mathbf{I}_\nu$ хорошо известна (см., например, [8, гл. 7, ф. (7.9)]). Тогда

$$\cos\left(\gamma_{\nu,j} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi j - \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right) = O\left(\frac{1}{j}\right), \quad j \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \left|\sin\left(\gamma_{\nu,j} - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1.$$

Используя это соотношение и равенство

$$\mathbf{I}_{\nu+1}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{-\nu-\frac{3}{2}} \left(\sin\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{|z|}\right)\right), \quad z \to \infty,\ -\pi < \arg z < \pi$$

(см. (27)), приходим к (26). $\rhd$

Следствие 1. *Для любого* $r > 0$

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\setminus\{0\}} \frac{1}{|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)|} < +\infty, \qquad \sum_{\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)} \frac{1}{|\widetilde{\Omega}_r\,'(\mu)|} < +\infty. \tag{28}$$

$\lhd$ Используя (14), (8) и (10), находим

$$\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda) = p_r(-\lambda^2)\widetilde{\varkappa}_r'(\lambda) - 2\lambda p_r'(-\lambda^2)\widetilde{\varkappa}_r(\lambda)$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \lambda p_r(-\lambda^2)\Bigl(r^2\lambda^2 \mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(r\lambda) - 2\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r\lambda)\Bigr) - 2\lambda p_r'(-\lambda^2)\widetilde{\varkappa}_r(\lambda).$$

Теперь из (11) и (15) имеем

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\setminus\{0\}} \frac{1}{|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)|} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\bigl|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'\bigl(\frac{i\lambda_j}{r}\bigr)\bigr|} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{n-1}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^3 \bigl|p_r\bigl(-\frac{\lambda_j^2}{r^2}\bigr)\bigr| \bigl|\mathbf{I}_{\frac{n}{2}+1}(\lambda_j)\bigr|}.$$

Этот ряд сравним со сходящимся рядом

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2m-\frac{n-3}{2}}}$$

(см. (12), (25) и (26)). Отсюда получаем сходимость первого ряда в (28). Сходимость второго ряда в (28) доказывается аналогично. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — четная целая функция и $g(\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\left| \frac{\lambda g(z)}{z^2 - \lambda^2} \right| \leqslant \max_{|\zeta - z| \leqslant 2} |g(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{29}$$

где при $z = \pm\lambda$ левая часть в (29) доопределена по непрерывности.

$\lhd$ Имеем

$$\left| \frac{2\lambda g(z)}{z^2 - \lambda^2} \right| = \left| \frac{g(z)}{z - \lambda} - \frac{g(z)}{z + \lambda} \right| \leqslant \left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| + \left| \frac{g(z)}{z + \lambda} \right|. \tag{30}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (30).

Если $|z - \lambda| > 1$, то

$$\left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| \leqslant |g(z)| \leqslant \max_{|\zeta - z| \leqslant 2} |g(\zeta)|. \tag{31}$$

Пусть $|z - \lambda| \leqslant 1$. Тогда применяя принцип максимума модуля к целой функции $\frac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda}$, получаем

$$\left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| \leqslant \max_{|\zeta - \lambda| \leqslant 1} \left| \frac{g(\zeta)}{\zeta - \lambda} \right| = \max_{|\zeta - \lambda| = 1} |g(\zeta)|.$$

Учитывая, что окружность $|\zeta - \lambda| = 1$ содержится в круге $|\zeta - z| \leqslant 2$, приходим к оценке

$$\left| \frac{g(z)}{z - \lambda} \right| \leqslant \max_{|\zeta - z| \leqslant 2} |g(\zeta)|, \tag{32}$$

которая справедлива для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. (31)).

Аналогично,

$$\left| \frac{g(z)}{z + \lambda} \right| \leqslant \max_{|\zeta - z| \leqslant 2} |g(\zeta)|, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{33}$$

поскольку $g(-\lambda) = 0$. Из (32), (33) и (30) следует требуемое утверждение. $\rhd$

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$\Delta(\varkappa_r^\lambda) + \lambda^2 \varkappa_r^\lambda = -\varkappa_r, \quad \lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r), \tag{34}$$

$$\Delta(\sigma_r^\mu) + \mu^2 \sigma_r^\mu = -\sigma_r, \quad \mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\sigma}_r). \tag{35}$$

$\lhd$ Для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\left\langle \Delta(\varkappa_r^\lambda) + \lambda^2 \varkappa_r^\lambda, \varphi \right\rangle = \left\langle \varkappa_r^\lambda, (\Delta + \lambda^2)\varphi \right\rangle$$

$$= -\int\limits_{|x| \leqslant r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} (\Delta\varphi)(x)\, dx - \lambda^2 \int\limits_{|x| \leqslant r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \varphi(x)\, dx.$$

Применим к первому интегралу формулу Грина

$$\int\limits_G (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int\limits_{\partial G} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma \tag{36}$$

(см., например, [28, гл. 5, § 21, п. 2]). Тогда

$$\left\langle \Delta(\varkappa_r^\lambda) + \lambda^2 \varkappa_r^\lambda, \varphi \right\rangle = -\int\limits_{|x|\leqslant r} \Delta \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) \varphi(x)\,dx$$

$$+\int\limits_{S_r} \left(\varphi(x)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) - \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma(x) - \lambda^2 \int\limits_{|x|\leqslant r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \varphi(x)\,dx.$$

Отсюда и из (5), (36) следует, что

$$\left\langle \Delta(\varkappa_r^\lambda) + \lambda^2 \varkappa_r^\lambda, \varphi \right\rangle = \int\limits_{S_r} \left(\varphi(x)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma(x)$$

$$= \int\limits_{S_r} \varphi(x)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \right) d\sigma(x) - \langle \chi_r, \Delta\varphi \rangle.$$

Теперь используя формулу

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(f(|x|) \right) = f'(|x|), \quad \mathbf{n} = \frac{x}{|x|}$$

и равенство (9), находим

$$\left\langle \Delta(\varkappa_r^\lambda) + \lambda^2 \varkappa_r^\lambda, \varphi \right\rangle = -\lambda^2 \int\limits_{S_r} \varphi(x)\,|x|\, \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}\, d\sigma(x) - \langle \Delta\chi_r, \varphi \rangle$$

$$= -r\lambda^2 \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)} \int\limits_{S_r} \varphi(x)\,d\sigma(x) - \langle \Delta\chi_r, \varphi \rangle.$$

Поскольку $\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r)$, то учитывая соотношение (8), получаем (34).

В случае сферических средних подобным образом имеем

$$\left\langle \Delta(\sigma_r^\mu) + \mu^2 \sigma_r^\mu, \varphi \right\rangle = \left\langle \sigma_r^\mu, (\Delta + \mu^2)\varphi \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{r\mu^2} \int\limits_{|x|\leqslant r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)} \Delta\varphi(x)\,dx - \frac{1}{r} \int\limits_{|x|\leqslant r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)} \varphi(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{r\mu^2} \int\limits_{|x|\leqslant r} \Delta \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)} \right) \varphi(x)\,dx + \frac{1}{r\mu^2} \int\limits_{S_r} \varphi(x)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)} \right) d\sigma(x)$$

$$-\frac{1}{r} \int\limits_{|x|\leqslant r} \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{r\mu^2} \int\limits_{S_r} \varphi(x)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)} \right) d\sigma(x)$$

$$= -\frac{1}{r} \int\limits_{S_r} \varphi(x)\,|x|\, \frac{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu|x|)}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\mu r)}\, d\sigma(x) = -\int\limits_{S_r} \varphi(x)\,d\sigma(x) = -\langle \sigma_r, \varphi \rangle.$$

Тем самым равенство (35) также доказано. $\rhd$

Замечание 1. Из (7) и инъективности сферического преобразования следует, что для распределений $U, T \in \mathscr{E}'_\natural(\mathbb{R}^n)$ и $\zeta \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{T})$

$$\Delta U + \zeta^2 U = -T \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{U}(z) = \frac{\widetilde{T}(z)}{z^2 - \zeta^2}. \tag{37}$$

Поэтому соотношения (34) и (35) влекут равенства

$$\widetilde{\varkappa_r^\lambda}(z) = \frac{\widetilde{\varkappa}_r(z)}{z^2 - \lambda^2}, \quad \lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r), \quad \widetilde{\sigma_r^\mu}(z) = \frac{\widetilde{\sigma}_r(z)}{z^2 - \mu^2}, \quad \mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\sigma}_r). \tag{38}$$

Лемма 4. *Пусть $\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})$, $\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)$. Тогда*

$$\widetilde{\mathscr{H}_r^\lambda}(z) = \frac{\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}{z^2 - \lambda^2}, \quad \widetilde{\Omega_r^\mu}(z) = \frac{\widetilde{\Omega}_r(z)}{z^2 - \mu^2}. \tag{39}$$

$\lhd$ Формулы в (39) легко следуют из (7) и замечания 1. Действительно, если $\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\varkappa}_r)$, то в силу (18), (7), (38) и (14) имеем

$$\widetilde{\mathscr{H}_r^\lambda}(z) = p_r(-z^2)\widetilde{\varkappa_r^\lambda}(z) = \frac{p_r(-z^2)\widetilde{\varkappa}_r(z)}{z^2 - \lambda^2} = \frac{\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}{z^2 - \lambda^2}.$$

Аналогично, если $p_r(-\lambda^2) = 0$, то

$$\widetilde{\mathscr{H}_r^\lambda}(z) = q_{r,\lambda}(-z^2)\widetilde{\varkappa}_r(z) = \frac{p_r(-z^2)\widetilde{\varkappa}_r(z)}{z^2 - \lambda^2} = \frac{\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}{z^2 - \lambda^2}$$

(см. (19), (20), (7) и (14)). Подобным образом получаем и второе равенство в (39). $\rhd$

Лемма 5. *Пусть*

$$X_r^\lambda = \frac{2\lambda}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)}\, \mathscr{H}_r^\lambda, \quad \lambda \in \mathscr{Z}_+\big(\widetilde{\mathscr{H}_r}\big)\backslash\{0\}, \quad X_r^0 = -\frac{2p_r(\Delta)\chi_r}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,''(0)}, \tag{40}$$

$$\Psi_r^\mu = \frac{2\mu}{\widetilde{\Omega}_r\,'(\mu)}\, \Omega_r^\mu, \quad \mu \in \mathscr{Z}_+\big(\widetilde{\Omega}_r\big). \tag{41}$$

Тогда

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})} X_r^\lambda = \sum_{\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)} \Psi_r^\mu = \delta, \tag{42}$$

где ряды в (42) сходятся безусловно в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

$\lhd$ Для произвольной функции $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ определим функцию $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\psi(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,y)}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $\lambda \in \mathscr{Z}_+\big(\widetilde{\mathscr{H}_r}\big)\backslash\{0\}$. Тогда (см. (2), (6) и (39))

$$\big\langle X_r^\lambda, \varphi \big\rangle = \big\langle X_r^\lambda, \widehat{\psi} \big\rangle = \big\langle \widehat{X_r^\lambda}, \psi \big\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \widetilde{X_r^\lambda}(|x|)\, dx = \frac{2}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\lambda \widetilde{\mathscr{H}_r}(|x|)}{|x|^2 - \lambda^2}\, dx.$$

Используя это представление и лемму 2, получаем

$$\left|\left\langle X_r^\lambda, \varphi\right\rangle\right| \leqslant \frac{2}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)\right|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta-|x||\leqslant 2} \left|\widetilde{\mathscr{H}_r}(\zeta)\right| dx.$$

Из (14), (8) и (23) имеем

$$\max_{|\zeta-|x||\leqslant 2} \left|\widetilde{\mathscr{H}_r}(\zeta)\right| = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \max_{|\zeta-|x||\leqslant 2} |\zeta|^2 \left|p_r(-\zeta^2)\right| \left|\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r\zeta)\right|$$

$$\leqslant \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \max_{|\zeta-|x||\leqslant 2} |\zeta|^2 \left|p_r(-\zeta^2)\right| \cdot e^{r|\operatorname{Im}\zeta|} \leqslant \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \max_{|\zeta-|x||\leqslant 2} |\zeta|^2 \left|p_r(-\zeta^2)\right|.$$

Поэтому

$$\left|\left\langle X_r^\lambda, \varphi\right\rangle\right| \leqslant \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} r^n e^{2r}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \left|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)\right|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \max_{|\zeta-|x||\leqslant 2} |\zeta|^2 \left|p_r(-\zeta^2)\right| dx. \tag{43}$$

Это неравенство и следствие 1 показывают, что первый ряд в (42) сходится безусловно в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ к некоторому распределению f с носителем в $\overline{B}_r$. По лемме 4 для сферического преобразования этого распределения справедливо равенство

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})} \widetilde{X_r^\lambda}(z) = \sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}} \frac{2\lambda}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)} \frac{\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}{z^2-\lambda^2} + \frac{2\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,''(0) z^2}. \tag{44}$$

При этом, если $\zeta \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}$, то

$$\widetilde{f}(\zeta) = \frac{2\zeta}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\zeta)} \lim_{z\to\zeta} \frac{\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}{z^2-\zeta^2} = 1 \quad \text{и} \quad \widetilde{f}(0) = \frac{2}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,''(0)} \lim_{z\to 0} \frac{\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}{z^2} = 1. \tag{45}$$

Далее, поскольку $\widetilde{f}(z)-1$ и $\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)$ являются четными целыми функциями экспоненциального типа, то в силу (45) их отношение

$$h(z) = \frac{\widetilde{f}(z)-1}{\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)}$$

является целой функцией не выше первого порядка (см. [29, гл. 1, § 9, следствие из теоремы 12]). При $\operatorname{Im} z = \pm\operatorname{Re} z$, $z\neq 0$ она оценивается следующим образом:

$$|h(z)| \leqslant \frac{|\widetilde{f}(z)|}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)\right|} + \frac{1}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)\right|}$$

$$\leqslant \left| \sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}} \frac{1}{\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)} \left(\frac{1}{z-\lambda} - \frac{1}{z+\lambda}\right)\right| + \frac{2}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,''(0)\right| |z|^2} + \frac{1}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)\right|}$$

$$\leqslant \sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}} \frac{1}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)\right|} \left(\frac{1}{|z-\lambda|} + \frac{1}{|z+\lambda|}\right) + \frac{2}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,''(0)\right| |z|^2} + \frac{1}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}(z)\right|}$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{2}}{|z|} \sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}} \frac{1}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,'(\lambda)\right|} + \frac{2}{\left|\widetilde{\mathscr{H}_r}\,''(0)\right| |z|^2} + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \left|z^2 p_r(-z^2) \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(rz)\right|}.$$

Из этой оценки и соотношений (28), (24) видно, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z=\pm\operatorname{Re} z}} h(z)=0. \tag{46}$$

Тогда по принципу Фрагмена — Линделёфа функция h ограничена на $\mathbb{C}$. Теперь из (46) и теоремы Лиувилля следует, что $h=0$. Отсюда $\widetilde{f}=1$, т. е. $f=\delta$. Аналогично получаем, что второй ряд в (42) сходится безусловно в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ к дельта-функции δ. Таким образом, лемма 5 доказана. $\rhd$

Лемма 6. *Пусть* $\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}$, $\mu\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)$. *Тогда*

$$\left(\lambda^2-\mu^2\right)X_r^\lambda*\Psi_r^\mu=\frac{4\lambda\mu}{\widetilde{\mathscr{H}_r}{}'(\lambda)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)}\Big(\Omega_r*\mathscr{H}_r^\lambda-\mathscr{H}_r*\Omega_r^\mu\Big). \tag{47}$$

Кроме того,

$$X_r^0*\Psi_r^\mu=\frac{4}{\mu\widetilde{\mathscr{H}_r}{}''(0)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)}\Big(\Omega_r*(p_r(\Delta)\chi_r)+\mathscr{H}_r*\Omega_r^\mu\Big). \tag{48}$$

$\lhd$ Из (39), (37), (40) и (41) имеем

$$\left(\Delta+\lambda^2\right)\left(X_r^\lambda\right)=-\frac{2\lambda}{\widetilde{\mathscr{H}_r}{}'(\lambda)}\mathscr{H}_r,\quad \lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}, \tag{49}$$

$$\left(\Delta+\mu^2\right)\left(\Psi_r^\mu\right)=-\frac{2\mu}{\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)}\Omega_r,\quad \mu\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r). \tag{50}$$

Из (49), (41) и перестановочности оператора дифференцирования со сверткой получаем

$$\left(\Delta+\lambda^2\right)\left(X_r^\lambda*\Psi_r^\mu\right)=\frac{-4\lambda\mu}{\widetilde{\mathscr{H}_r}{}'(\lambda)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)}\,\mathscr{H}_r*\Omega_r^\mu.$$

Аналогично, из (50) следует, что

$$-\left(\Delta+\mu^2\right)\left(X_r^\lambda*\Psi_r^\mu\right)=\frac{4\lambda\mu}{\widetilde{\mathscr{H}_r}{}'(\lambda)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)}\,\Omega_r*\mathscr{H}_r^\lambda.$$

Складывая два последних равенства, приходим к соотношению (47). Подобным образом находим

$$\Delta\left(X_r^0\right)=-\frac{2\mathscr{H}_r}{\widetilde{\mathscr{H}_r}{}''(0)},$$

$$\left(\Delta+\mu^2\right)\left(X_r^0*\Psi_r^\mu\right)=\frac{4\mu}{\widetilde{\mathscr{H}_r}{}''(0)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)}\,\Omega_r*\left(p_r(\Delta)\chi_r\right),$$

$$-\Delta\left(X_r^0*\Psi_r^\mu\right)=\frac{4\mu}{\widetilde{\mathscr{H}_r}{}''(0)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)}\,\mathscr{H}_r*\Omega_r^\mu,$$

откуда следует (48). $\rhd$

4. Доказательство теоремы 3

Докажем, что

$$\sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})}\ \sum_{\mu\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)} X_r^\lambda * \Psi_r^\mu = \delta, \tag{51}$$

где ряд (51) сходится безусловно в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi=\widehat{\psi}$. Для $\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})\backslash\{0\}$, $\mu\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)$ имеем (см. (4) и доказательство оценки (43))

$$\begin{aligned}
\bigl|\bigl\langle X_r^\lambda * \Psi_r^\mu,\varphi\bigr\rangle\bigr| &= \bigl|\bigl\langle X_r^\lambda * \Psi_r^\mu,\widehat{\psi}\bigr\rangle\bigr| = \bigl|\bigl\langle \widehat{X_r^\lambda * \Psi_r^\mu},\psi\bigr\rangle\bigr| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\widetilde{X_r^\lambda}(|x|)\widetilde{\Psi_r^\mu}(|x|)\,dx\right| \\
&= \frac{4}{\bigl|\widetilde{\mathscr{H}_r}{}'(\lambda)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)\bigr|}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\frac{\lambda\widetilde{\mathscr{H}_r}(|x|)}{|x|^2-\lambda^2}\,\frac{\mu\widetilde{\Omega}_r(|x|)}{|x|^2-\mu^2}\,dx\right| \\
&\leqslant \frac{8\pi^n r^{2n-1}e^{4r}}{\bigl|\widetilde{\mathscr{H}_r}{}'(\lambda)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)\bigr|\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\psi(x)|\max_{|\zeta-|x||\leqslant 2}|\zeta|^2\bigl|p_r(-\zeta^2)\bigr|\max_{|\zeta-|x||\leqslant 2}\bigl|P_r(-\zeta^2)\bigr|\,dx.
\end{aligned}$$

Аналогично (см. (14), (8)),

$$\begin{aligned}
\bigl|\bigl\langle X_r^0 * \Psi_r^\mu,\varphi\bigr\rangle\bigr| &= \frac{4}{\bigl|\widetilde{\mathscr{H}_r}{}''(0)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)\bigr|}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\frac{\widetilde{\mathscr{H}_r}(|x|)}{|x|^2}\,\frac{\mu\widetilde{\Omega}_r(|x|)}{|x|^2-\mu^2}\,dx\right| \\
&= \frac{4(2\pi)^{\frac{n}{2}}r^n}{\bigl|\widetilde{\mathscr{H}_r}{}''(0)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)\bigr|}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)p_r(-|x|^2)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r|x|)\,\frac{\mu\widetilde{\Omega}_r(|x|)}{|x|^2-\mu^2}\,dx\right| \\
&\leqslant \frac{8\pi^n r^{2n-1}e^{2r}}{\bigl|\widetilde{\mathscr{H}_r}{}''(0)\widetilde{\Omega}_r{}'(\mu)\bigr|\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\psi(x)|\,|p_r(-|x|^2)|\max_{|\zeta-|x||\leqslant 2}\bigl|P_r(-\zeta^2)\bigr|\,dx.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (28) следует, что

$$\sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})}\left(\sum_{\mu\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)}\Bigl|\Bigl\langle X_r^\lambda * \Psi_r^\mu,\varphi\Bigr\rangle\Bigr|\right)<\infty.$$

Значит (см., например, [30, гл. 1, теорема 1.24]), ряд в (51) сходится безусловно в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. При этом (см. (3), (42))

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})}\ \sum_{\mu\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)}\Bigl\langle X_r^\lambda * \Psi_r^\mu,\varphi\Bigr\rangle &= \sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})}\left(\sum_{\mu\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)}\Bigl\langle \Psi_r^\mu(y),\Bigl\langle X_r^\lambda(x),\varphi(x+y)\Bigr\rangle\Bigr\rangle\right) \\
&= \sum_{\lambda\in\mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r})}\Bigl\langle X_r^\lambda(x),\varphi(x)\Bigr\rangle = \varphi(0),
\end{aligned}$$

что доказывает (51).

Сворачивая обе части (51) с f и учитывая раздельную непрерывность свертывания $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ с $g \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, (47), (48) и (17), находим

$$f = \sum_{\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)} \frac{4}{\mu \widetilde{\mathscr{H}_r}''(0) \widetilde{\Omega}_r'(\mu)} \Big(f * \Omega_r * (p_r(\Delta)\chi_r) + f * \mathscr{H}_r * \Omega_r^\mu \Big)$$
$$+ \sum_{\lambda \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\mathscr{H}_r}) \setminus \{0\}} \; \sum_{\mu \in \mathscr{Z}_+(\widetilde{\Omega}_r)} \frac{4\lambda\mu}{(\lambda^2 - \mu^2) \widetilde{\mathscr{H}_r}'(\lambda) \widetilde{\Omega}_r'(\mu)} \Big(f * \Omega_r * \mathscr{H}_r^\lambda - f * \mathscr{H}_r * \Omega_r^\mu \Big). \tag{52}$$

Наконец, используя (52), (13) и коммутативность оператора свертки с оператором дифференцирования, приходим к формуле (21). Таким образом, теорема 3 доказана.

Литература

1. *Minkowski H.* Über die Körper konstanter Breite // Mat. Sbornik.—1904.—Vol. 25.—P. 505–508. (in Russian).
2. *Funk P.* Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätishen linien // Math. Annal.—1913.—Vol. 74.—P. 278–300. DOI: 10.1007/BF01456044.
3. *Radon J.* Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl.—1917.—Vol. 69.—P. 262–277.
4. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления.—М.: ВИНИТИ, 1989.—Т. 54.—С. 5–111.
5. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.—P. 185–194. DOI: 10.1007/978-94-011-2436-2_17.
6. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” // Contemp. Math. Radon Transform and Tomography.—2001.—Vol. 278.—P. 69–74. DOI: 10.1090/conm/278/04595.
7. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p. DOI: 10.1007/978-94-010-0023-9.
8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer, 2009.—672 p. DOI: 10.1007/978-1-84882-533-8.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser, 2013.—592 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0572-8.
10. *Brown L., Schreiber B. M., Taylor B. A.* Spectral synthesis and the Pompeiu problem // Ann. Inst. Fourier, Grenoble.—1973.—Vol. 23, № 3.—P. 125–154. DOI: 10.5802/aif.474.
11. *Икромов И. А.* Восстановление функции по сферическим средним // Успехи мат. наук.—1987.—Т. 42, вып. 5 (257).—С. 211–212.
12. *Berenstein C. A., Gay R., Yger A.* Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math.—1990.—Vol. 54, № 1.—P. 259–287. DOI: 10.1007/bf02796152.
13. *Helgason S.* Integral Geometry and Radon Transforms.—New York: Springer, 2010.—301 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-6055-9.
14. *Волчкова Н. П., Волчков Вит. В.* Проблема деконволюции для индикаторов отрезков // Мат. заметки СВФУ.—2019.—Т. 26, вып. 3.—С. 3–14. DOI: 10.25587/SVFU.2019.47.12.001.
15. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Т. I.—М: Мир, 1986.—461 с.
16. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ.—М.: Мир, 1987.—735 с.
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, Т. 2.—М.: Наука, 1974.—296 с.
18. *El Harchaoui M.* Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) // J. Anal. Math.—1995.—Vol. 67, № 1.—P. 1–37. DOI: 10.1007/BF02787785.
19. *Berkani M., El Harchaoui M., Gay R.* Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l’espace hyperbolique quaternique — Cas des deux boules // J. Complex Variables.—2000.—Vol. 43, № 1.—P. 29–57. DOI: 10.1080/17476930008815300.
20. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. РАН.—2001.—Т. 379, № 5.—С. 587–590.

21. *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ.—2003.—Т. 15, вып. 5.—С. 169–197.
22. *Volchkov Vit. V.* On functions with given spherical means on symmetric spaces // J. Math. Sci.—2011.—Vol. 175, № 4.—P. 402–412. DOI: 10.1007/s10958-011-0354-2.
23. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Inversion of the local Pompeiu transformation on Riemannian symmetric spaces of rank one // J. Math. Sci.—2011.—Vol. 179, № 2.—P. 328–343. DOI: 10.1007/s10958-011-0597-y.
24. *Волчков В. В., Волчков Вит. В.* Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем.—2013.—Т. 77, № 2.—С. 3–34. DOI: 10.4213/im7956.
25. *Rubin B.* Reconstruction of functions on the sphere from their integrals over hyperplane sections // Anal. Math. Phys.—2019.—Vol. 9, № 4.—P. 1627–1664. DOI: 10.1007/s13324-019-00290-1.
26. *Salman Y.* Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres // Anal. Math. Phys.—2017.—Vol. 7, № 2.—P. 165–185. DOI: 10.1007/s13324-016-0135-7.
27. *Hielscher R., Quellmalz M.* Reconstructing a function on the sphere from its means along vertical slices // Inverse Probl. Imaging.—2016.—Vol. 10, № 3.—P. 711–739. DOI: 10.3934/ipi.2016018.
28. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики.—М.: Физматлит, 2008.—400 с.
29. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Издательская группа URSS, 2022.—632 с.
30. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ, Т. 2.—М.: Юрайт-Издат, 2013.—357 с.

Статья поступила 7 августа, 2022 г.

Волчкова Наталья Петровна
Донецкий национальный технический университет,
заведующая кафедрой высшей математики им. В. В. Пака
РОССИЯ, 283000, Донецк, ул. Артёма, 58
E-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Волчков Виталий Владимирович
Донецкий государственный университет,
заведующий кафедрой математического анализа
и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 283001, Донецк, ул. Университетская, 24
E-mail: v.volchkov@donnu.ru
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 3, P. 59–75

INVERSION OF A CONVOLUTION OPERATOR ASSOCIATED WITH SPHERICAL MEANS

Volchkova, N. P.[1] and Volchkov, Vit. V.[2]

[1] Donetsk National Technical University, 58 Artyoma St., Donetsk 283000, Russia;
[2] Donetsk State University, 24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia

E-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com, v.volchkov@donnu.ru

Abstract. An obvious property of an arbitrary nonzero smooth antiperiodic function is that its derivative has no corresponding period. In other words, if r is a fixed positive number, $f(x+r)+f(x-r)=0$ and $f'(x+r)-f'(x-r)=0$ on the real axis, then $f=0$. This fact admits non-trivial generalizations to multidimensional spaces. One general method for such generalizations is the following Brown-Schreiber-Taylor theorem on spectral analysis: any non-zero subspace $\mathscr{U}$ in $C(\mathbb{R}^n)$ invariant under all motions of $\mathbb{R}^n$ contains for some $\lambda \in \mathbb{C}$, the radial function $(\lambda|x|)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)$, where J_ν is the Bessel function of the first kind of order ν. In particular, if a function $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ and its normal derivative have zero integrals over all spheres of fixed radius r in $\mathbb{R}^n$, then $f = 0$. In terms of convolution, this means that the operator $\mathscr{P}f = (f * \Delta\chi_r, f * \sigma_r)$, $f \in C(\mathbb{R}^n)$, is injective, where Δ is the Laplace operator, χ_r is the indicator of the ball $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$, σ_r is the surface delta function centered on the sphere $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. In this paper, we study the inversion problem for the operator $\mathscr{P}$ on the class of distributions. A new formula for reconstruction a distribution $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ from known convolutions $f * \Delta\chi_r$ and $f * \sigma_r$ is obtained. The paper uses the methods of harmonic analysis, as well as the theory of entire and special functions. The key step in the proof of the main result is the expansion of the Dirac delta function in terms of a system of radial distributions supported in $\overline{B}_r$, biorthogonal to some system of spherical functions. A similar approach can be used to invert other convolution operators with radial distributions in $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Keywords: radial distributions, mean periodicity, Pompeiu transform, inversion formulas.

AMS Subject Classification: 44A35, 42A85.

For citation: *Volchkova, N. P. and Volchkov, Vit. V.* Inversion of a Convolution Operator Associated with Spherical Means, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 3, pp. 59–75 (in Russian). DOI: 10.46698/z5526-4462-9472-g.

References

1. *Minkowski, H.* Über die Körper konstanter Breite, *Gesammelte Abhandlungen*, 1911, vol. 2, pp. 277–279. (in German).
2. *Funk, P.* Über Flächen mit Lauter Geschlossenen Geodätishen Linien, *Mathematische Annalen*, 1913, vol. 74, pp. 278–300. DOI: 10.1007/BF01456044.
3. *Radon, J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl.*, 1917, vol. 69, pp. 262–277.
4. *Berenstein, C. A. and Struppa, D. C.* Complex Analysis and Convolution Equations, *Several Complex Variables, V*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol. 54, New York, Springer-Verlag, 1993, pp. 1–108. DOI: 10.1007/978-3-642-58011-6_1.
5. *Zalcman, L.* A Bibliographic Survey of the Pompeiu Problem, *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1992, pp. 185–194. DOI: 10.1007/978-94-011-2436-2_17.
6. *Zalcman, L.* Supplementary Bibliography to “A Bibliographic Survey of the Pompeiu Problem”, *Contemporary Mathematics, Radon Transform and Tomography*, 2001, vol. 278, pp. 69–74. DOI: 10.1090/conm/278/04595.
7. *Volchkov, V. V. Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2003, 454 p. DOI: 10.1007/978-94-010-0023-9.
8. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London, Springer, 2009, 672 p. DOI: 10.1007/978-1-84882-533-8.
9. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel, Birkhäuser, 2013, 592 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0572-8.
10. *Brown, L., Schreiber, B. M. and Taylor, B. A.* Spectral Synthesis and the Pompeiu Problem, *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, 1973, vol. 23, no. 3, pp. 125–154. DOI: 10.5802/aif.474.
11. *Ikromov, I. A.* Recovering a Function from its Spherical Means, *Russian Mathematical Surveys*, 1987, vol. 42, no. 5, pp. 169–170. DOI: 10.1070/RM1987v042n05ABEH001476.
12. *Berenstein, C. A., Gay, R. and Yger, A.* Inversion of the Local Pompeiu Transform, *Journal d'Analyse Mathématique*, 1990, vol. 54, no. 1, pp. 259–287. DOI: 10.1007/bf02796152.
13. *Helgason, S. Integral Geometry and Radon Transforms*, New York, Springer, 2010, 301 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-6055-9.
14. *Volchkova, N. P. and Volchkov, Vit. V.* Deconvolution Problem for Indicators of Segments, *Mathematical Notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 3, pp. 3–14. DOI: 10.25587/SVFU.2019.47.12.001. (in Russian).
15. *Hörmander, L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol.* I., New York, Springer-Verlag, 2003, 440 p. DOI: 10.1007/978-3-642-61497-2.
16. *Helgason, S. Groups and Geometric Analysis*, New York, Academic Press, 1984, 667 p. URL: http://books.google.com/books?vid=ISBN978-1-4704-1310-1.
17. *Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G. Higher Transcendental Functions* (*Bateman Manuscript Project*)*, Vol.* II, New York, McGraw-Hill, 1953, 302 p. URL: https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738.

18. *El Harchaoui, M.* Inversion de la Transformation de Pompéiu Locale Dans les Espaces Hyperboliques RÉel et Complexe (Cas de deux boules), *Journal d'Analyse Mathématique*, 1995, vol. 67, no. 1, pp. 1–37. DOI: 10.1007/BF02787785.
19. *Berkani, M., El Harchaoui, M. and Gay, R.* Inversion de la Transformation de Pompéiu locale Dans l'espace Hyperbolique Quaternique — Cas des deux boules, *Complex Variables*, 2000, vol. 43, no. 1, pp. 29–57. DOI: 10.1080/17476930008815300.
20. *Volchkov, Vit. V. and Volchkova, N. P.* Inversion of the Local Pompeiu Transform on the Quaternion Hyperbolic Space, *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 90–93. https://zbmath.org/1041.43005.
21. *Volchkov, Vit. V. and Volchkova, N. P.* Inversion Theorems for the Local Pompeiu Transformation in the Quaternion Hyperbolic Space, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, no. 5, pp. 753–771. DOI: 10.1090/S1061-0022-04-00830-1.
22. *Volchkov, Vit. V.* On Functions with Given Spherical Means on Symmetric Spaces, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 175, no. 4, pp. 402–412. DOI: 10.1007/s10958-011-0354-2.
23. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V.* Inversion of the Local Pompeiu Transformation on Riemannian Symmetric Spaces of Rank One, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 179, no. 2, pp. 328–343. DOI: 10.1007/s10958-011-0597-y.
24. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V.* Spherical Means on Two-Point Homogeneous Spaces and Applications, *Izvestiya: Mathematics*, 2013, vol. 77, no. 2, pp. 223–252. DOI: 10.1070/IM2013v077n02ABEH002634.
25. *Rubin, B.* Reconstruction of Functions on the Sphere from Their Integrals Over Hyperplane Sections, *Analysis and Mathematical Physics*, 2019, vol. 9, no. 4, pp. 1627–1664. DOI: 10.1007/s13324-019-00290-1.
26. *Salman, Y.* Recovering Functions Defined on the Unit Sphere by Integration on a Special Family of Sub-Spheres, *Analysis and Mathematical Physics*, 2017, vol. 7, no. 2, pp. 165–185. DOI: 10.1007/s13324-016-0135-7.
27. *Hielscher, R. and Quellmalz, M.* Reconstructing an Function on the Sphere from its Means Along Vertical Slices, *Inverse Problems and Imaging*, 2016, vol. 10, no. 3, pp. 711–739. DOI: 10.3934/ipi.2016018.
28. *Vladimirov, V. S. and Zharinov, V. V. Uravneniya matematicheskoj fiziki* [Equations of Mathematical Pphysics], Moscow, Fizmatlit, 2008, 400 p. (in Russian).
29. *Levin, B. Ya. Raspredelenie kornej celyh funkcij* [Distribution of Roots of Entire Functions], Moscow, URSS, 2022, 632 p. (in Russian).
30. *Ilyin, V. A., Sadovnichiy, V. A. and Sendov, Bl. Kh. Matematicheskij analiz* [Mathematical Analysis], Vol. II, Moscow, Yurayt-Izdat, 2013, 357 p. (in Russian).

Received August 7, 2022

Natalia P. Volchkova
Donetsk National Technical University,
58 Artyoma St., Donetsk 283000, Russia,
Head of the Department of Higher Mathematics named after V. V. Pak
E-mail: volna936@gmail.com, volchkova.n.p@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Vitaliy V. Volchkov
Donetsk State University,
24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations
E-mail: v.volchkov@donnu.ru
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034