Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 1, С. 132–141

УДК 517.9
DOI 10.46698/t7406-3495-9364-r

ОБ ОБРАТИМОСТИ И СПЕКТРЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВИНЕРА — ХОПФА В СЧЕТНО-НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННЫМ ХАРАКТЕРОМ ПОВЕДЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

А. Э. Пасенчук[1]

[1] Южно-Российский государственный политехнический университет им. М. И. Платова (НПИ), Россия, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

E-mail: `pasenchuk@mail.ru`

Аннотация. В счетно-нормированном пространстве измеримых на вещественной оси функций, убывающих быстрее любой степени, рассматривается интегральный оператор Винера — Хопфа. Показано, что в классе ограниченных операторов Винера — Хопфа содержатся операторы с разрывными символами специального вида. Рассматриваются вопросы ограниченности и обратимости таких операторов в указанном счетно-нормированном пространстве. В частности, получены критерии обратимости в терминах символа. С этой целью вводится понятие канонической гладкой вырожденной факторизхации и устанавливается, что обратимость оператора Винера — Хопфа равносильна наличию канонической гладкой вырожденной факторизации его символа. Каноническая гладкая вырожденная факторизация описывается при помощи функционала, называемого сингулярным индексом. В качестве следствия описан спектр оператора Винера — Хопфа в рассматриваемом топологическом пространстве. Приводятся некоторые соотношения, связывающие спектры интегрального оператора Винера — Хопфа с одним и тем же символом в пространствах суммируемых функций и в счетно-нормированном пространстве измеримых функций, убывающих на бесконечности быстрее любой степени.

Ключевые слова: счетно-нормированное пространство, обратимость, вырожденный, факторизация, сингулярный, индекс, спектр.

AMS Subject Classification: 47B35.

Образец цитирования: *Пасенчук А. Э.* Об обратимости и спектре интегрального оператора Винера — Хопфа в счетно-нормированном пространстве функций со степенным характером поведения на бесконечности // Владикавк. матем. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 132–141. DOI: 10.46698/t7406-3495-9364-r.

1. Введение

Пусть Z — целочисленная решетка действительной оси R, $R_+ = \{x \in R : x \geqslant 0\}$, $R_- = \{x \in R : x < 0\}$. Обозначим через $Z_\pm$ следующие подмножества: Z: $Z_+ = \{j \in Z : j \geqslant 0\}$, $Z_- = \{j \in Z : j < 0\}$. Ясно, что $Z_+ \bigcup Z_- = Z$, $Z_+ \bigcap Z_- = \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество. Через C будем обозначать поле комплексных чисел. Нам понадобятся также следующие подмножества комплексной плоскости: $C^+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\}$, $C^- = \{z \in C : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\bar{C}^+ = \{z \in C : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $\bar{C}^- = \{z \in C : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, $\Gamma = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$. Как обычно, символ E^n, $n \in Z_+$, означает, что рассматривается декартово произведение n экземпляров множества E.

Линейное пространство измеримых локально суммируемых на множестве $M \subseteq R^n$ функций будем обозначать $L^{\mathrm{loc}}(M)$.

Пусть $m \in Z_+$, обозначим через $L\{m\}$ линейное пространство измеримых, суммируемых на R с весом $(|x|+1)^m$вектор-функций $L\{m\} = \left\{\varphi(x) : \int_R (|x|+1)^m |\varphi(x)|\, dx < \infty\right\}$. Вводя норму $\|\varphi(x)\|_m = \int_R (|x|+1)^m |\varphi(x)|_n\, dx$, превращаем $L\{m\}$ в банахово пространство. Пространство, сопряженное к $L\{m\}$, обозначим через $L\{-m\}$. Из теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала вытекает, что пространство $L\{-m\}$ может быть реализовано как банахово пространство измеримых на оси функций, топология в котором порождается нормой $\|\psi(x)\|_{-m} = \sup\operatorname{ess}_{x\in R} \frac{|\psi(x)|_n}{(|x|+1)^m}$. Рассмотрим линейное пространство $L\{\infty\} = \bigcap_{m=0}^{\infty} L\{m\}$ и снабдим его счетно-нормированной топологией, порождаемой набором монотонных попарно согласованных норм $\|.\|_m$, $m \in Z_+$. Сопряженное к счетно-нормированному пространству $L\{\infty\}$ пространство обозначим $L\{-\infty\} : (L\{\infty\})^* = L\{-\infty\}$. Хорошо известно, $L\{-\infty\} = \bigcup_{m=0}^{\infty} L\{-m\}$ (см., например, [1]). Будем рассматривать линейное пространство $L\{-\infty\}$ как топологическое пространство с сильной топологией.

В пространствах $L\{m\}$, $m \in Z$, определим, операторы проектирования, действующие по формулам $(P_\pm f)(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sign} x) f(x)$. Для подпространств, порождаемых этими проекторами, будем пользоваться обозначениями $L_\pm\{m\} = P_\pm(L\{m\})$, $m \in Z$.

Отметим, что для всех $m \in Z_+ \bigcup \{\infty\}$ имеет место вложение $L\{m\} \subseteq L(R)$, $m \in Z_+ \bigcup \{\infty\}$, где $L(R)$ — банахово пространство измеримых суммируемых на R функций. В частности, это означает, что для всех функций $f(x) \in L\{m\}$ определено преобразование Фурье $F[f](\lambda) = \int_R e^{i\lambda x} f(x)\, dx$. Положим $\tilde{C}^m(R) = F(L\{m\})$, $\tilde{C}^m_\pm(R) = F(L_\pm\{m\})$, $m \in Z_+ \bigcup \{\infty\}$. Очевидно, операторы $P^\pm = FP_\pm F^{-1}$ являются операторами проектирования, действующими в пространствах $\tilde{C}^m(R)$, причем $\tilde{C}^m_\pm(R) = P^\pm\big(\tilde{C}^m(R)\big)$. Введем также следующие пространства: $C^m(R) = C \oplus \tilde{C}^m(R)$, $C^m_\pm(R) = C \oplus \tilde{C}^m_\pm(R)$, $m \in Z_+ \bigcup \{\infty\}$. Нетрудно видеть, что функции из подпространств $C^m_\pm(R)$ аналитически продолжимы в области $C^\pm$ соответственно.

При любом фиксированном $m \in Z_+$ пространство $C^m(R)$ есть банахова алгебра с единицей относительно поточечных операций и топологии, порождаемой нормой $|\alpha + F[\varphi]|_m = |\alpha| + \|\varphi\|_m$, $m \in Z_+$. Пространство $C^\infty(R)$ является топологической алгеброй с единицей, счетно-нормированная топология которой определяется следующим набором норм $|\cdot|_m$, $m \in Z_+$; $C^m_\pm(R)$ — топологические подалгебры $C^m(R)$ с единицей для всех $m \in Z_+ \bigcup \{\infty\}$.

Рассмотрим следующий оператор: $C(k) : L_2\{\infty\} \to L_2\{\infty\}$, $(C(k)\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)\varphi(s)\, ds$, где $k(x) \in L\{\infty\}$. Этот оператор называют *оператором свертки*, а функцию $k(x)$ называют *ядром* этого интегрального оператора. Хорошо известно, что необходимым и достаточным условием ограниченности оператора $C(k)$ является заявленное выше условие $k(x) \in L\{\infty\}$. С оператором свертки тесно связан интегральный оператор Винера — Хопфа $W(\alpha, k) = \alpha I + P_+ C(k) I$, $W(\alpha, k) : L_2^+\{\infty\} \to L_2^+\{\infty\}$. *Символом оператора* $W(\alpha, k)$ называют функцию $(A(\alpha, k))(\lambda) = \alpha + F[k](\lambda) \in C^\infty(R)$. Наряду с символом $(A(\alpha, k))(\lambda)$ для описания свойств оператора Винера — Хопфа используют также функцию $a(\xi) = (A(\alpha, k))\left(i\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)$, $\xi \in \Gamma$. Для того чтобы различать эти функции первую из них будем называть *λ-символом*, а вторую *ξ-символом оператора Винера — Хопфа* (см. [2, с. 64–65]). Оператор Винера — Хопфа был подробно изучен в многочисленных оригинальных исследованиях, результаты которых были отражены в монографиях и обзорных статьях [1–5]. Для этого оператора построена полная теория Нетера в широком классе банаховых и счетно-нормированных пространств. Отметим, что критерий обратимости оператора Винера — Хопфа в пространствах суммируемых функций позволяет достаточно эффективно описать спектр этого оператора. С другой стороны, критерий обратимости оператора Винера — Хопфа в счетно-нормированных пространствах типа $L_+\{\infty\}$ весьма громоздок и трудно проверяем (см. [1]). Видимо, в связи с этим, задача об описании спектра интегрального оператора Винера — Хопфа практически не рассматривалась. В этой работе введено и изучено понятие вырожденной гладкой факторизации типа минус. Оказалось, что обратимость рассматриваемого оператора Винера — Хопфа равносильна наличию канонической гладкой вырожденной факторизации типа минус его символа. Это позволило дать эффективный критерий обратимости в случае гладкого символа и получить описание спектра оператора Винера — Хопфа $W(\alpha,k): L_2^+\{\infty\} \to L_2^+\{\infty\}$.

2. Вспомогательные результаты

В пространстве $L_+\{\infty\}$ рассмотрим следующий интегральный оператор $(K\varphi)(x) = \int_0^\infty k(x,s)\varphi(s)\,ds$, $x>0$, предполагая, что ядро $k(x,s)$ локально суммируемо на R_+^2.

Лемма 1. *Оператор $K: L_+\{\infty\} \to L_+\{\infty\}$ ограничен в пространстве $L_+\{\infty\}$ тогда и только тогда, когда почти для любого фиксированного $s \in R_+$ функция $k(x,s) \in L_+\{\infty\}$ и для любого $m \in Z_+$ найдутся $n_m \in Z_+$ и $c_m \in R_+$ так, что $\|k(x,s)\|_m \leqslant c_m(s+1)^{n_m}$.*

$\lhd$ *Необходимость.* Хорошо известно, что линейный оператор K ограничен в счетно-нормированном пространстве с порождающей системой норм $\|\cdot\|_m$, $m\in Z_+$ тогда и только тогда, когда по любому $m\in Z_+$ найдутся $n_m\in Z_+$ и $c_m\in R_+$ так, что $\|K\varphi\|_m \leqslant c_m\|\varphi\|_{n_m}$ для любого $\varphi\in L_+\{\infty\}$ (см., например, [1]). Для оператора K это неравенство означает, что $\int_0^\infty (x+1)^m\left|\int_0^\infty k(x,t)\varphi(t)\,dt\right|dx \leqslant c_m\int_0^\infty (x+1)^{n_m}|\varphi(x)|\,dx$, где $\varphi\in L_+\{\infty\}$. В частности, последнее неравенство имеет место для характеристической функции отрезка $[s,s+\Delta s]$, $s\in R_+$, $\Delta s>0$,

$$\int_0^\infty (x+1)^m\left|\int_s^{s+\Delta s} k(x,t)dt\right|dx \leqslant c_m \int_s^{s+\Delta s}(x+1)^{n_m}dx = c_m\big((s+1)^{n_m}\Delta s + o(\Delta s)\big).$$

Отсюда имеем $\int_0^\infty (x+1)^m\left|\frac{1}{\Delta s}\int_s^{s+\Delta s} k(x,t)dt\right|dx \leqslant c_m\Big((s+1)^{n_m}+\frac{o(\Delta s)}{\Delta s}\Big)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\Delta s\to 0$ и учитывая, что почти каждая точка из области определения измеримой функции есть точка Лебега, получим $\int_0^\infty (x+1)^m|k(x,s)|\,dx \leqslant c_m(s+1)^{n_m}$. Таким образом, почти для любого фиксированного $s\in R_+$ $k(x,s)\in L_+\{\infty\}$ и для любого $m\in Z_+$ найдутся $n_m\in Z_+$ и $c_m\in R_+$ так, что $\|k(x,s)\|_m\leqslant c_m(s+1)^{n_m}$.

Достаточность. Пусть почти для любого фиксированного $s\in R_+$, $k(x,s)\in L_+\{\infty\}$ и для любого $m\in Z_+$ найдутся $n_m\in Z_+$ и $c_m\in R_+$ так, что $\int_0^\infty (x+1)^m|k(x,s)|\,dx\leqslant c_m(s+1)^{n_m}$. Тогда, каково бы ни было $\varphi\in L_+\{\infty\}$, имеем

$$\|K\varphi\|_m = \int_0^\infty (x+1)^m\left|\int_0^\infty k(x,s)\varphi(s)\,ds\right|dx \leqslant \int_0^\infty (x+1)^m\int_0^\infty |k(x,s)|\,|\varphi(s)|\,ds\,dx$$

$$= \int_0^\infty |\varphi(s)|\int_0^\infty (x+1)^m|k(x,s)|\,dx\,ds \leqslant c_m\int_0^\infty (s+1)^{n_m}|\varphi(s)|\,ds = c_m\|\varphi\|_{n_m}. \rhd$$

Очевидно, оператор Винера — Хопфа является частным случаем оператора $\alpha I + K$, ядро которого зависит от разности аргументов: $k(x,s) = k(x-s)$. Положим $k_+(x) = (P_+k)(x)$, $k_-(x) = (P_-k)(x)$. Ясно, что функции $k_+(x)$, $k_-(x)$ измеримы и локально интегрируемы вместе с $k(x)$. Имеет место следующее утверждение, описывающее ограниченность оператора Винера — Хопфа в пространстве $L_+\{\infty\}$.

Теорема 1. *Оператор $W(\alpha,k) : L_+\{\infty\} \to L_+\{\infty\}$ ограничен тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) $k_+(x) \in L_+\{\infty\}$; 2) $k_-(-x) \in L_+\{-\infty\}$.

$\lhd$ *Необходимость.* В силу леммы 1 ограниченность оператора K в пространстве $L_+\{\infty\}$ равносильна тому, что почти для любого фиксированного $s \in R_+$ и для любого $m \in Z_+$ найдутся $n_m \in Z_+$ и $c_m \in R_+$ так, что $\int_0^\infty (x+1)^m |k(x-s)|\,dx \leqslant c_m(s+1)^{n_m}$. Сделав в интеграле из последнего неравенства замену переменных $x - s = t$, получим, что оператор K ограничен в пространстве $L_+\{\infty\}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $\int_{-s}^\infty (s+t+1)^m |k(t)|\,dt \leqslant c_m(s+1)^{n_m}$, $s \in R_+$. Ясно, что последнее неравенство равносильно выполнению двух следующих:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^\infty (s+t+1)^m |k(t)|\,dt \leqslant c_m(s+1)^{n_m}, \quad s \in R_+;$$

$$\text{б)}\ \int\limits_{-s}^0 (s+t+1)^m |k(t)|\,dt \leqslant c_m(s+1)^{n_m}, \quad s \in R_+.$$

При $s = 0$ из а) получаем $\int_0^\infty (t+1)^m |k(t)|\,dt \leqslant c_m$, $m \in Z_+$, что и означает 1). Для завершения доказательства необходимости осталось убедиться в том, что условие б) влечет условие 2). Действительно, если имеет место б), то при $m = 0$ получаем $\int_{-s}^0 |k(t)|\,dt \leqslant c_0(s+1)^{n_0}$, $s \in R_+$. Выполнив в интеграле замену переменного $t = -\theta$ и переобозначив переменные, получим $\int_0^x |k_-(-s)|\,ds \leqslant c_0(x+1)^{n_0}$, $x \in R_+$. Покажем, что последнее неравенство имеет место тогда и только тогда, когда $k_-(-x) \in L_+\{-\infty\}$. В самом деле, если выполнено условие $\int_0^x |k_-(-s)|\,ds \leqslant c(x+1)^{n_0}$, $x \in R_+$, то

$$\int\limits_0^\infty \frac{|k_-(-s)|}{(s+1)^{n_1}} ds = n_1 \int\limits_0^\infty |k_-(-s)|\,ds \int\limits_s^\infty \frac{dt}{(t+1)^{n_1+1}}$$

$$= n_1 \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^{n_1+1}} \int\limits_0^t |k_-(-s)|\,ds \leqslant n_1 c \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^{n_1-n_0+1}} < \infty,$$

если $n_1 > n_0+1$. Обратно, если $\int_0^\infty \frac{|k(-s)|}{(s+1)^{n_1}} ds < \infty$, то при $x \in R_+$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{(x+1)^{n_1}} \int\limits_0^x |k(-s)|\,ds \leqslant \int\limits_0^x \frac{|k(-s)|}{(s+1)^{n_1}}\,ds \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{|k(-s)|}{(s+1)^{n_1}}\,ds = c_0.$$

Но это и означает выполнение условия 2).

Достаточность. Пусть $k_+(x) \in L_+\{\infty\}$, тогда $\int_0^\infty (t+1)^m |k(t)|\,dt \leqslant c_m$, $s \in R_+$ для всех $m \in Z_+$. Поскольку $t+s+1 \leqslant (s+1)(t+1)$, имеем $\int_0^\infty (t+s+1)^m |k(t)|\,dt \leqslant (s+1)^m \int_0^\infty (t+1)^m |k(t)|\,dt = c_m(s+1)^m$, $s \in R_+$, где $c_m = \int_0^\infty (t+1)^m |k(t)|\,dt$.

Для доказательства того, что из 2) следует б) воспользуемся методом математической индукции по числу $m \in Z_+$. Действительно, если выполнено 2), то имеет место и неравенство $\int_{-s}^{0} |k(t)|\, dt \leqslant c_m(s+1)^{n_0}$, $s \in R_+$, означающее справедливость б) при $m = 0$. Предположим, что б) имеет место при $m = k$ и рассмотрим интеграл $\int_{-s}^{0} (s+t+1)^{k+1} |k(t)|\, dt$, $s \in R_+$. Очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$\int_{-s}^{0} (s+t+1)^{k+1} |k(t)|\, dt = (s+1) \int_{-s}^{0} (s+t+1)^{k} |k(t)|\, dt + \int_{-s}^{0} t(s+t+1)^{k} |k(t)|\, dt$$

$$\leqslant (s+1) \int_{-s}^{0} (s+t+1)^{k} |k(t)|\, dt \leqslant c_k(s+1)^{n_k+1}, \quad s \in R_+. \ \rhd$$

Лемма 2. *Если λ-символ оператора Винера — Хопфа $W(\alpha, k)$ допускает представление $A(\alpha, k) = A(\alpha_1, k_-)\, A(\alpha_2, k_0)\, A(\alpha_3, k_+)$, где $A(\alpha_j, k_\pm) \in C^{\infty}_{\pm}(R)$, то имеет место представление $W(\alpha, k) = W(\alpha_1, k_-)\, W(\alpha_2, k_0)\, W(\alpha_3, k_+)$.*

Свойство, сформулированное в лемме 3, называют *частичной мультипликативностью* (см. [4, 6]).

Лемма 3. *Оператор Винера — Хопфа $W(1, k) : L_+\{\infty\} \to L_+\{\infty\}$ с λ-символом $A(1, k) = \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda-i}\right)^{n_j}$, $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, обратим.*

$\lhd$ Рассмотрим элементарный оператор Винера — Хопфа $W(1, k_j)$ с λ-символом $\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda-i}$, $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$. Поскольку $\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda-i} = 1 - (1 + i\lambda_j)\, F\left[e^x_-\right](\lambda) \in C^{\infty}_{-}(R)$, где $e^x_- = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} x)\, e^x$, то в силу свойства частичной мультипликативности $W(1, k) = \prod_{j=1}^{n} W(1, k_j)$. Поэтому для доказательства обратимости оператора $W(1, k) : L_+\{\infty\} \to L_+\{\infty\}$ достаточно доказать, что обратим элементарный оператор $W(1, k_j)$. Очевидно,

$$\left(W\left(1, k_j\right)\varphi\right)(x) = \varphi(x) - \left(1 + i\lambda_j\right) \int_{x}^{\infty} e^{x-s} \varphi(s)\, ds, \quad x > 0.$$

Рассмотрим оператор $W^{-1}(1, k_j) : L_+\{\infty\} \to L_+\{\infty\}$, действующий по правилу

$$\left(W^{-1}(1, k_j)\,\varphi\right)(x) = \varphi(x) + (1 + i\lambda_j) \int_{x}^{\infty} e^{-i\lambda_j(x-s)} \varphi(s)\, ds, \quad x > 0.$$

В силу теоремы 1 этот оператор ограничен. Непосредственные вычисления показывают, что $W^{-1}(1, k_j)\, W(1, k_j)\, \varphi = \varphi$, $W(1, k_j)\, W^{-1}(1, k_j)\, \varphi = \varphi$ для любого $\varphi \in L_+\{\infty\}$. $\rhd$

Лемма 4. *Оператор Винера — Хопфа λ-символом $A^+(\lambda) \in C^{\infty}_{+}(R)$ обратим в пространстве $L_+\{\infty\}$ тогда и только тогда, когда $A^+(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \overline{C^+}$. Если λ-символ $A^-(\lambda) \in C^{\infty}_{-}(R)$ оператора Винера — Хопфа $W(\alpha, k_-) : L_+\{\infty\} \to L_+\{\infty\}$ таков, что $A^-(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \overline{C^-}$, то оператор $W(\alpha, k_-)$ обратим.*

3. Вырожденная факторизация и обратимость

Будем говорить, что функция $B(\lambda) \in C^{\infty}(R)$ допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус, если она допускает представление $B(\lambda) = B^-(\lambda) \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\kappa} B^+(\lambda)$, где сомножители правой части удовлетворяют условиям 1) $B^{\pm}(\lambda) \in C^{\infty}_{\mp}(R)$, 2) операторы Винера — Хопфа с λ-символами $B^{\pm}(\lambda)$ обратимы в пространстве $L_+\{\infty\}$.

Число $\kappa \in Z$ будем называть индексом гладкой вырожденной факторизации типа минус в алгебре $C^{\infty}(R)$. Гладкую вырожденную факторизацию типа минус с нулевым индексом будем называть канонической.

Замечание. Из лемм 2, 3 следует, что условия 1) и 2) в определении вырожденной гладкой факторизации типа минус означают, что функция $B^{-}(\lambda)$, вообще говоря, может иметь нули на вещественной оси, а функция $B^{+}(\lambda)$ — нет. Это объясняет термин «вырожденная факторизация типа минус».

Теорема 2. *Оператор Винера — Хопфа $W(\alpha, k) : L_+\{\infty\} \to L_+\{\infty\}$ обратим тогда и только тогда, когда его λ-символ $(A(\alpha, k))(\lambda) = \alpha + F[k](\lambda) \in C^{\infty}(R)$ допускает каноническую вырожденную факторизацию типа минус в алгебре $C^{\infty}(R)$.*

$\lhd$ Достаточность утверждения немедленно вытекает из свойства частичной мультипликативности и определения гладкой вырожденной факторизации типа минус. Если оператор $W(\alpha, k)$ обратим, то согласно теореме Зильберманна его символ имеет на вещественной оси не более чем конечное число нулей конечных порядков (см. [1, 7]). Пусть λ_k — все нули λ-символа кратностей n_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, соответственно. Рассмотрим функцию $(A_1(\alpha, k))(\lambda) = \prod_{k=1}^{s} \left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda-i}\right)^{-n_k} (A(\alpha, k))(\lambda)$. Ясно, что $(A_1(\alpha, k))(\lambda) \in C^{\infty}(R)$ и $(A_1(\alpha, k))(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in R$. Как известно, тогда функция $(A_1(\alpha, k))(\lambda)$ допускает стандартную факторизацию Винера — Хопфа $A_1(\alpha, k) = A^{-}(\alpha, k) \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\kappa} A^{+}(\alpha, k)$, где $\kappa = \mathrm{ind}_{\lambda \in R} A_1(\alpha, k)$, а $A^{\pm}(\alpha, k) = \exp\left(P^{\pm}\left(\ln\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\kappa} A_1(\alpha, k)\right)\right) \in GC^{\infty}_{\pm}(R)$. В силу свойства частичной мультипликативности $W(\alpha, k) = \prod_{j=1}^{n} W(1, k_j) W(1, k_-) DW(\alpha, k_+)$, где $\prod_{j=1}^{s} (W(1, k_j))^{n_k}$, $W(1, k_-)$, D, $W(\alpha, k_+)$ — операторы Винера — Хопфа с λ-символами $\prod_{k=1}^{s} \left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda-i}\right)^{n_k}$, $A^{-}(\alpha, k)$, $\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\kappa}$, $A^{+}(\alpha, k)$ соответственно. Все операторы в последнем равенстве обратимы, что влечет за собой обратимость оператора D. Последнее, как известно, справедливо тогда и только тогда, когда $\kappa = 0$ (см. [2, 4]). Таким образом, имеет место следующее представление λ-символа рассматриваемого оператора $A(\alpha, k) = \prod_{k=1}^{s} \left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda-i}\right)^{n_k} A^{-}(1, k) A^{+}(\alpha, k)$. Пользуясь леммами 3, 4 нетрудно убедиться в том, что это представление является гладкой вырожденной канонической факторизацией λ-символа рассматриваемого оператора. $\rhd$

Пусть $a(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, — гладкая функция, определенная на единичной окружности $(a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma))$. Предположим, что эта функция имеет на Γ конечное число нулей конечных порядков и пусть z_k все нули $a(\xi)$ порядков n_k, $k = 1, 2, \ldots, s$, соответственно. Назовем число $n(a) = \sum_{k=1}^{s} n_k$ суммарным числом нулей этой функции.

Сингулярным индексом функции $a(\xi) \in C^{\infty}(\Gamma)$, имеющей конечное число нулей конечных кратностей, будем называть число $\kappa_c(a) = \frac{1}{\pi i} \mathrm{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{a'(\xi)}{a(\xi)}\, d\xi$.

Теорема 3. *λ-символ оператора Винера — Хопфа допускает гладкую вырожденную каноническую факторизацию типа минус тогда и только тогда, когда соответствующий ξ-символ $a(\xi) = (A(\alpha, k))\left(i\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)$, $\xi \in \Gamma$, удовлетворяет условиям:*

1) *имеет на Γ не более чем конечное число нулей конечных порядков;*

2) *суммарное число нулей и сингулярный индекс ξ-символа связаны соотношением $\kappa_c(a) + n(a) = 0$.*

$\lhd$ Пусть выполнены условия 1), 2) и ξ_k — все нули функции $a(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, кратностей n_k, $k = 1, 2, \ldots, s$. Тогда функция $a_1(\xi) = \prod_{j=0}^{s} \left(\xi^{-1} - \xi_k^{-1}\right)^{-n_k} a(\xi) \in$

$C^{\infty}(\Gamma)$ не обращается в нуль на Γ и поэтому допускает факторизацию Винера — Хопфа. Тогда $a(\xi) = \prod_{j=0}^{s}\left(\xi^{-1}-\xi_k^{-1}\right)^{n_k} a^{-}(\xi)\,\xi^{\kappa}a^{+}(\xi)$, где $\kappa = \mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}a_1(\xi)$, а $a^{\pm}(\xi) = \exp\left(P^{\pm}\left((\ln\xi^{-\kappa})\,a_1(\xi)\right)\right)$. Вычисляя сингулярный индекс функции $a(\xi) = \prod_{j=0}^{s}\left(\xi^{-1}-\xi_k^{-1}\right)^{-n_k} a_1(\xi)$, получим $\kappa_c(a) = -n(a)+2\kappa$. Отсюда с учетом 2) получаем $2\kappa = \kappa_c(a)+n(a) = 0$. Таким образом, $a(\xi) = \prod_{j=0}^{s}\left(\xi^{-1}-\xi_k^{-1}\right)^{n_k} a^{-}(\xi)\,a^{+}(\xi)$. Тогда $(A(\alpha,k))(\lambda) = a\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right) = a(\xi) = \prod_{j=0}^{s}\left(\left(\frac{\lambda+i}{\lambda-i}\right)-\left(\frac{\lambda_k+i}{\lambda_k-i}\right)\right)^{n_k} a^{-}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)a^{+}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)$, где $\lambda_k = i\frac{1+\xi_k}{1-\xi_k}$, $k = 1,2,\ldots,s$. Нетрудно видеть, пользуясь леммами 3, 4, что последнее представление является канонической гладкой вырожденной факторизацией типа минус λ-символа оператора Винера — Хопфа. Обратно, если оператор Винера — Хопфа $W(\alpha,k) : L_{+}\{\infty\} \to L_{+}\{\infty\}$ обратим, то по теореме Зильберманна [1, 7] его ξ-символ имеет не более чем конечное число нулей конечных порядков. Выделяя эти нули, как и выше, получим представление $a(\xi) = \prod_{j=0}^{s}\left(\xi^{-1}-\xi_k^{-1}\right)^{n_k} a^{-}(\xi)\,\xi^{\kappa}a^{+}(\xi)$. Из этого представления следует, что λ-символа оператора Винера — Хопфа допускает гладкую вырожденную факторизацию типа минус с индексом факторизации κ. В силу того, что факторизация каноническая $\kappa = 0$. Но, как и выше, $\kappa_c(a) = -n(a)+2\kappa$, поэтому условие 2) выполняется. $\triangleright$

Следствие. *Оператор Винера — Хопфа* $W(\alpha,k) : L_{+}\{\infty\} \to L_{+}\{\infty\}$ *обратим тогда и только тогда, когда его ξ-символ удовлетворяет условиям* 1), 2).

4. Спектр оператора Винера — Хопфа

Теорема 3 позволяет описать резольвентное множество оператора $W(\alpha,k) : L_{+}\{\infty\} \to L_{+}\{\infty\}$ с ξ-символом $a(\xi)$ следующим образом. Резольвентное множество оператора $W(\alpha,k)$ состоит из тех и только тех $\mu\in C$, которые удовлетворяют условиям: 1) $n(a(\xi)-\mu) < \infty$, 2) $\kappa_c(n(a(\xi)-\mu)) + n(a(\xi)-\mu) = 0$. Следовательно, спектр оператора $W(\alpha,k)$ состоит из всех тех $\mu\in C$, для которых нарушается либо условие 1), либо условие 2).

Пусть $a(\xi) = (A(\alpha,k))\left(i\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)$, $\xi\in\Gamma$. Если $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$, то эта функция порождает ограниченные операторы Винера — Хопфа, и в пространстве $L_{+}\{\infty\}$ и в пространстве $L_2^{+}(R)$. Условимся каждый из этих операторов обозначать, по-прежнему, $W(\alpha,k)$, а их резольвентные множества и спектры $\rho_{\infty}(W(\alpha,k)_a)$, $\sigma_{\infty}(W(\alpha,k))$; $\rho_2(W(\alpha,k))$, $\sigma_2(W(\alpha,k))$ соответственно.

Теорема 4. *Имеют место вложения* $\rho_{\infty}(W(\alpha,k)_a) \supseteq \rho_2(W(\alpha,k))$, $\sigma_{\infty}(W(\alpha,k)) \subseteq \sigma_2(W(\alpha,k))$.

$\triangleleft$ В самом деле, если $a(\xi)-\mu \neq 0$, $\xi\in\Gamma$, то условие 2) означает, что $\kappa_c(a(\xi)-\mu) = 0$. Поскольку $\kappa_c(a(\xi)-\mu) = 2\,\mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}(a(\xi)-\mu)$, то $\mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}(a(\xi)-\mu) = 0$. Однако, хорошо известно (см., например, [4]), что выполнение условий $a(\xi)-\mu \neq 0$, $\xi\in\Gamma$, $\mathrm{ind}_{\xi\in\Gamma}(a(\xi)-\mu) = 0$ являются необходимыми и достаточными условиями обратимости оператора $W(\alpha,k)$ в пространстве $L_2^{+}(R)$, что и доказывает утверждение. $\triangleright$

Отметим, что иногда удается наверняка утверждать, что имеют место строгие вложения резольвентных множеств и спектров или строгие равенства.

Теорема 5. *Пусть функция* $a(\xi)\in C^{\infty}(\Gamma)$ *осуществляет конформное отображение области, содержащей единичную окружность* Γ, *и является ξ-символом интегрального оператора Винера — Хопфа* $W(\alpha,k)$. *Тогда возможны следующие ситуации:*

1) $\rho_{\infty}(W(\alpha,k)_a) = \rho_2(W(\alpha,k))\bigcup a(\Gamma)$, $\sigma_{\infty}(W(\alpha,k)) = \sigma_2(W(\alpha,k))\setminus a(\Gamma)$, *если найдется, хотя бы одна точка* $\mu = a(\xi_0)\in\rho_{\infty}$, $\xi_0\in\Gamma$;

2) $\rho_\infty\left(W(\alpha,k)_a\right)=\rho_2\left(W(\alpha,k)\right)$, $\sigma_\infty\left(W(\alpha,k)\right)=\sigma_2\left(W(\alpha,k)\right)$, *если найдется, хотя бы одна точка* $\mu=a(\xi_0)\notin\rho_\infty\left(W(\alpha,k)\right)$, $\xi_0\in\Gamma$.

$\lhd$ Заметим, прежде всего, что для любого $\mu=a(\xi_0)$, $\xi_0\in\Gamma$, функция $a(\xi)-\mu=a(\xi)-a(\xi_0)$ имеет в точке $\xi_0\in\Gamma$ нуль. При этом в силу конформности, $(a(\xi)-\mu)'=a'(\xi)\neq 0$, $\xi\in\Gamma$, поэтому это обязательно нуль первого порядка, т. е. $n(a(\xi)-\mu)=1$ для любых $\mu\in a(\Gamma)$. Таким образом, для $\mu=a(\xi_0)\in\rho_\infty(T_a)$, $\xi_0\in\Gamma$ выполнение условия 2) описания резольвентного множества означает, что $\kappa_c(a(\xi)-\mu)=-1$, $\mu=a(\xi_0)$. Но, тогда, пользуясь определением сингулярного индекса, имеем $\kappa_c(a(\xi)-\mu)=\frac{1}{\pi i}\text{v.p.}\int_\Gamma\frac{a'(\xi)}{a(\xi)-\mu}\,d\xi=-1$, $\mu=a(\xi_0)$. С другой стороны, хорошо известно, что $\frac{1}{\pi i}\text{v.p.}\int_\Gamma\frac{a'(\xi)}{a(\xi)-\mu}\,d\xi$ есть непрерывная функция параметра $\mu\in a(\Gamma)$, принимающая целочисленные значения (см., например, [3]). Поэтому условие $\kappa_c(a(\xi)-\mu)=-1$ выполняется для любого $\mu=a(\xi_0)\in a(\Gamma)$, т. е. оператор $T_{a-\lambda}:C_+^\infty(\Gamma)\to C_+^\infty(\Gamma)$ обратим при всех $\mu=a(\xi_0)\in a(\Gamma)$. Следовательно, $a(\Gamma)\subset\rho_\infty\left(W(\alpha,k)\right)$, что и доказывает утверждение 1). Утверждение 2) доказывается аналогично. $\rhd$

Следующие примеры показывают, что могут реализовываться обе ситуации, указанные в теореме 5, а при нарушении условий теоремы возможна ситуация, при которой непустая часть множества $a(\Gamma)$ содержится в спектре оператора $W(\alpha,k)$ и непустая часть — в резольвентном множестве этого оператора.

Пример 1. Пусть λ-символ оператора Винера — Хопфа имеет вид $A(1,k)=\frac{\lambda-i}{\lambda+i}$, тогда $\sigma_\infty\left(W(1,k)\right)=\sigma_2\left(W(1,k)\right)=\overline{D^+}$.

Пример 2. Пусть λ-символ оператора Винера — Хопфа имеет вид $A(1,k)=\frac{\lambda+i}{\lambda-i}$, тогда $\sigma_\infty\left(W(1,k)\right)=\sigma_2\left(W(1,k)\right)\setminus\Gamma=D^+$.

Утверждения, приведенные в примерах 1, 2 вытекают из лемм 3, 4.

Пример 3. Пусть λ-символ оператора Винера — Хопфа имеет вид $A(0,k)=\left(\frac{2i}{\lambda-i}\right)^n$. Нетрудно видеть, что ξ-символ этого оператора имеет вид $a(\xi)=\left(\xi^{-1}-1\right)^n$ и в точке $\xi=1$ отображение $\xi\mapsto\left(\xi^{-1}-1\right)^n$ не является конформным. Простые вычисления показывают, что

1) точка $\mu=0$ является точкой резольвентного множества и является граничной точкой спектра, если $n=1,2,3$. При этом оба множества $\sigma_\infty\left(W(1,k)\right)\bigcap a(\Gamma)$ и $\rho_\infty\left(W(1,k)\right)\bigcap a(\Gamma)$непусты.

2) точка $\mu=0$ является изолированной точкой резольвентного множества, если $n\geqslant 4$.

Литература

1. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.—М.: Наука, 1979.—493 с.
2. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.—М.: Наука, 1971.—352 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—638 с.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи матем. наук.—1958.—Т. 13, № 2.—С. 3–72.
5. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений.—Кишинев: Штиинца, 1973.—426 с.
6. *Пасенчук А. Э.* Дискретные операторы типа свертки в классах последовательностей со степенным характером поведения на бесконечности.—Ростов-н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2013.—279 с.
7. *Зильберман Б.* О сингулярных операторах в пространствах бесконечно дифференцируемых и обобщенных функций // Матем. исследования.—Кишинев: Штиинца, 1971.—Т. 6, № 3.—С. 168–179.

Статья поступила 31 июля 2023 г.

Пасенчук Александр Эдуардович
Южно-Российский государственный политехнический
университет (НПИ) им. М. И. Платова
профессор кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132
E-mail: pasenchuk@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-3939-1593

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 132–141

ON REVERSIBILITY AND THE SPECTRUM OF THE WIENER–HOPF INTEGRAL OPERATOR IN A COUNTABLY-NORMED SPACE OF FUNCTIONS WITH POWER BEHAVIOR AT INFINITY

Pasenchuk, A. E. [1]

[1] Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
132 Prosveshcheniya St., Novocherkassk 346428, Russia

E-mail: pasenchuk@mail.ru

Abstract. We consider the Wiener–Hopf integral operator in a countable normed space of measurable functions on the real axis, decreasing faster then any power. It is shown that the class of bounded Wiener–Hopf operators contains with discontinuous symbols of a special form. The problems of boundedness, Noetherianity, and invertibility of such operators in the given countably normed space are studied. In particular, criteria for Noetherianity and invertibility in terms of a symbol are obtained. For this purpose, the concept of a canonical smooth degenerate factorization is introduced and it is established that the invertibility of the Wiener–Hopf operator is equivalent to the presence of a canonical smooth degenerate factorization of its symbol. The canonical smooth degenerate factorization is described using a functional called the singular index. As a corollary, the spectrum of the Wiener–Hopf operator in the considered topological space is described. Some relations are given that connect the spectra of the Wiener–Hopf integral operator with the same symbol in the countably normed spaces of measurable functions decreasing at infinity faster than any power.

Keywords: countable, normed, space, invertibillity, degenerate, factorization, singular, index, spectrum.

AMS Subject Classification: 47B35.

For citation: *Pasenchuk, A. E.* On Reversibility and the Spectrum of the Wiener–Hopf Integral Operator in a Countably-Normed Space of Functions with Power Behavior at Infinity, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 132–141 (in Russian). DOI: 10.46698/t7406-3495-9364-r.

References

1. *Presdorf, Z. Nekotorye klassy singuljarnyh uravnenij* [Some Classes of Singular Equation], Moscow, Mir, 1979, 493 p. (in Russian).
2. *Gohberg, I. C. and Fel'dman, I. A. Uravnenija v svertkah i proekcionnye metody ih reshenija* [Convolution Equations and Projection Methods for their Solution], Moscow, Nauka, 1971, 352 p. (in Russian).
3. *Gahov, F. D. Kraevye zadachi* [Boundary Problems], Moscow, Nauka, 1977, 638 p. (in Russian).
4. *Gokhberg, I. C. and Krein, M. G.* Systems of Integral Equations on the Half-Line with Kernels Depending on the Difference of the Arguments, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1958, vol. 13, no. 2 (80), pp. 3–72 (in Russian).
5. *Gohberg, I. C. and Krupnik, I. A. Vvedenie v teoriju odnomernyh singuljarnyh integral'nyh uravnenij* [Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Integral Equations], Kishinev, Shtiinca, 1973, 426 p. (in Russian).

6. *Pasenchuk, A. E. Diskretnye operatory tipa svertki v klassah posledovatel'nostej so stepennym harakterom povedenija na beskonechnosti* [Discrete Convolution-Type Operators in Classes of Sequences with Power Behavior at Infinity], Rostov-on-Don, SFU Publ., 2013, 279 p. (in Russian).
7. *Silberman, B.* On Singular Operators in Spaces of Infinitely Differentiable and Generalized Functions, *Matematicheskie issledovanija* [Mathematical Research], Kishinev, Shtiinca, 1971, vol. 6, no. 3, pp. 168–179 (in Russian).

Received Jule 31, 2023

Alersandr E. Pasenchuk
Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI),
Department of Applied Mathematics,
132 Prosveshcheniya St., Novocherkassk 346428, Russia,
Professor
E-mail: `pasenchuk@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-3939-1593