Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 1, С. 36–55

УДК 519.63
DOI 10.46698/p2394-5241-9362-p

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ ТРЕТЬЕЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ

М. Х. Бештоков[1]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`

Аннотация. Исследуется многомерное уравнение Соболевского типа с эффектом памяти и граничными условиями третьего рода. Для численного решения поставленной задачи исходная многомерная задача сводится к третьей начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром. Доказана сходимость решения полученной модифицированной задачи к решению исходной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Для модифицированной задачи стоится локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем, то есть, построенная аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией, таким образом, что каждая из промежуточных схем цепочки может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок для всех промежуточных схем. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки, из чего следуют единственность и устойчивость решения локально-одномерной разностной схемы, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, многомерное уравнение, уравнение с эффектом памяти, априорная оценка, локально-одномерная схема, устойчивость и сходимость схем.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Бештоков М. Х.* Локально-одномерная схема для третьей начально-краевой задачи для многомерного уравнения Соболевского типа с эффектом памяти // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 36–55. DOI: 10.46698/p2394-5241-9362-p.

1. Введение

При математическом моделировании многих процессов в механике, физике, биологии, экономике встречаются такие системы с памятью, поведение которых зависит от всей «истории» системы [1] и не определяется целиком состоянием в настоящий момент, поэтому приходится описывать интегро-дифференциальным уравнением, содержащим соответствующий интеграл по временной переменной, т. е. когда неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла. Уравнения в частных производных с памятью исследованы в работах [2–5] при описании термомеханического поведения полимеров [2, 3], вязкоупругих жидкостей при низких температурах [4, 5]. Уравнения Соболевского типа с памятью возникают в математической теории термовязкоупругости [6–9], гидродинамике [10, 11], физике плазмы [12] и многих других областях. Таким образом, помимо теоретического интереса, рассматриваемая задача актуальна с точки зрения приложений.

Данная работа посвящена построению локально-одномерной разностной схемы для численного решения третьей начально-краевой задачи для уравнения Соболевского типа с эффектом памяти в многомерном случае, основная идея которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. Отличительной особенностью изучаемого в данной работе многомерного уравнения Соболевского типа с эффектом памяти состоит в том, что невозможно расщепить по направлениям оператор при старшей производной, в связи с чем прямое использование локально-одномерного метода невозможно, поэтому построение схем расщепления достигается за счет перехода к третьей начально-краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения параболического типа с малым параметром. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю решение полученной модифицированной задачи сходится к решению исходной задачи. Для полученной задачи строится локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского. Исследование единственности и устойчивости проводится с помощью метода энергетических неравенств, доказана сходимость схемы.

Настоящая работа является продолжением серии работ автора [13–17], посвященных исследованию локальных и нелокальных краевых задач для обобщенных уравнений Соболевского типа.

2. Постановка начально-краевой задачи

В замкнутой области $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \leqslant t \leqslant 1]$, основанием которой является p-мерный куб $\overline{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1, \ \alpha = 1, 2, \dots, p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассмотрим начально-краевую задачу для многомерного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int\limits_0^t u\,d\tau = Lu + \frac{\partial}{\partial t}Lu - u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\Pi_\alpha(x,t) = \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$-\Pi_\alpha(x,t) = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t), \quad x_\alpha = 1, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad 0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \\ |\beta_{\pm\alpha}(x,t)| \leqslant c_2, \quad u(x,t) \in C^{4,2}\left(\overline{Q}_T\right), \quad k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}\left(\overline{Q}_T\right), \ f(x,t) \in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right), \\ Q_T = G \times (0 < t \leqslant T], \quad c_0, c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\beta_{\pm\alpha}(x,t), \ \mu_{\pm\alpha}(x,t) \text{ — непрерывные функции}, \ \beta_{+\alpha} = \beta(1, x', t), \ \beta_{-\alpha} = \beta(0, x', t),$$

$$\mu_{+\alpha} = \mu(1, x', t), \quad \mu_{-\alpha} = \mu(0, x', t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_\alpha, x'), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p,$$

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p), \quad \Pi_\alpha(x,t) = k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right).$$

Учитывая, что $u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t u(x,\tau)d\tau$, преобразуем уравнение (1) и краевые условия (2), (3). Тогда, умножив обе части (1) и (2), (3) на e^t, заменив t на τ и проинтегрировав полученное выражение по τ от 0 до t, получим задачу

$$Lu+\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}u(x,t)\,d\tau-\int\limits_0^t u(x,\tau)\,d\tau-u+\widetilde{f}(x,t)=0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\mathscr{B}_{-\alpha}u-\widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\mathscr{B}_{+\alpha}u-\widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha=1,\ 0\leqslant t\leqslant T, \end{cases} \tag{7}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{f}(x,t)=\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}f(x,\tau)\,d\tau-e^{-t}\left(Lu_0(x)-u_0(x)\right),$$

$$\mathscr{B}_{-\alpha}u(0,x',t)=\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\beta_{-\alpha}(0,x',\tau)u(0,x',\tau)\,d\tau,$$

$$\mathscr{B}_{+\alpha}u(1,x',t)=\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\beta_{+\alpha}(1,x',\tau)u(1,x',\tau)\,d\tau,$$

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha}(0,x',t)=\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\mu(0,x',\tau)\,d\tau+e^{-t}k_\alpha(x,0)u_0'(0,x').$$

$$\widetilde{\mu}_{+\alpha}(1,x',t)=\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\mu(1,x',\tau)\,d\tau-e^{-t}k_\alpha(x,0)u_0'(1,x').$$

В той же области вместо уравнения (6) рассмотрим следующее уравнение с малым параметром ε:

$$\varepsilon u_t^\varepsilon=Lu^\varepsilon+\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}u^\varepsilon d\tau-\int\limits_0^t u^\varepsilon(x,\tau)d\tau-u^\varepsilon+\widetilde{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{9}$$

где $\varepsilon=\text{const}>0$.

Так как при $t=0$ начальные условия для уравнения (6) и (9) совпадают, то в окрестности $t=0$ у производной u_t^ε не возникает особенности типа пограничного слоя [18, 19].

Покажем, что $u^\varepsilon\to u$ в некоторой норме при $\varepsilon\to0$. Обозначим через $\tilde{z}=u^\varepsilon-u$ и подставим $u^\varepsilon=\tilde{z}+u$ в уравнение (9). Тогда получим задачу

$$\varepsilon\tilde{z}_t=L\tilde{z}+\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}\tilde{z}d\tau-\int\limits_0^t\tilde{z}d\tau-\tilde{z}+\overline{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{10}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial \tilde z}{\partial x_\alpha} = \mathscr{B}_{-\alpha}\tilde z, & x_\alpha = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial \tilde z}{\partial x_\alpha} = \mathscr{B}_{+\alpha}\tilde z, & x_\alpha = 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{11}$$

$$\tilde z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{12}$$

где $\overline{f}(x,t) = -\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}$.

Получим априорную оценку методом энергетических неравенств, тогда умножим уравнение (10) скалярно на $\tilde z$:

$$\left(\varepsilon\frac{\partial \tilde z}{\partial t}, \tilde z\right) = \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial \tilde z}{\partial x_\alpha}\right), \tilde z\right)$$
$$+\left(\int_0^t e^{-(t-\tau)}\tilde z d\tau, \tilde z\right) - \left(\int_0^t \tilde z d\tau, \tilde z\right) - \left(\tilde z, \tilde z\right) + \left(\overline{f}(x,t), \tilde z\right), \tag{13}$$

где $(u,v) = \int_G uv dx$, $\|u\|_0^2 = \int_G u^2 dx$, $\|u\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 u^2(x,t)\,dx_\alpha$.

Далее через M_i, $i = 1, 2, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной задачи.

С помощью ε-неравенства Коши и неравенства Коши — Буняковского после несложных преобразований из (13) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z\|_0^2 + \frac{c_0}{2}\|\tilde z_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\tilde z\|_0^2 \leqslant \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} k_\alpha(x,t)\tilde z\frac{\partial \tilde z}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^1 dx' + M_2\int_0^t \|\tilde z\|_0^2\,d\tau + \frac{1}{c_0}\|\overline{f}\|_0^2. \tag{14}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (14):

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'} k_\alpha(x,t)\tilde z\frac{\partial \tilde z}{\partial x_\alpha}\bigg|_0^1 dx' = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\Big(\tilde z(1,x',t)\mathscr{B}_{-\alpha}\tilde z(1,x',t)$$
$$-\tilde z(0,x',t)\mathscr{B}_{-\alpha}\tilde z(0,x',t)\Big)\,dx' = \sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\left(-\tilde z(1,x',t)\int_0^t e^{-(t-\tau)}\beta_{+\alpha}(1,x',\tau)\tilde z(1,x',\tau)d\tau\right.$$
$$\left.-\tilde z(0,x',t)\int_0^t e^{-(t-\tau)}\beta_{-\alpha}(0,x',\tau)\tilde z(0,x',\tau)d\tau\right)dx'$$
$$\leqslant \varepsilon_1\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\left(\tilde z^2(0,x',t) + \tilde z^2(1,x',t)\right)\,dx'$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\left(\int_0^t e^{-(t-\tau)}\beta_{-\alpha}(0,x',\tau)\tilde z(0,x',\tau)\,d\tau\right)^2 dx' \tag{15}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{G'}\left(\int_0^t e^{-(t-\tau)}\beta_{+\alpha}(1,x',\tau)\tilde z(1,x',\tau)\,d\tau\right)^2 dx'$$
$$\leqslant \varepsilon_1 M_3\left(\|\tilde z\|_0^2 + \|\tilde z_x\|_0^2\right) + M_4(\varepsilon_1)\int_0^t\left(\|\tilde z\|_0^2 + \|\tilde z_x\|_0^2\right)\,d\tau.$$

Выбирая в (15) $\varepsilon_1 = \min\left\{\frac{c_0}{4M_3}, \frac{1}{4M_3}\right\}$, из неравенства (14) находим

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde{z}\|_0^2 + \frac{c_0}{4}\|\tilde{z}_x\|_0^2 + M_5\|\tilde{z}\|_0^2 \leqslant M_6\int\limits_0^t \left(\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}_x\|_0^2\right) d\tau + \frac{1}{c_0}\|\overline{f}\|_0^2. \tag{16}$$

Проинтегрировав (16) по τ от 0 до t, получим

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \int\limits_0^t \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\tau \leqslant M_7\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\tau + M_8\int\limits_0^t \|\overline{f}\|_0^2\, d\tau. \tag{17}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (17), для этого перепишем (17) в виде

$$Y \leqslant M_7\int\limits_0^t Y\, d\tau + M_8 F, \tag{18}$$

где $Y = \int_0^t \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\tau$, $F = \int_0^t \|\overline{f}\|_0^2\, d\tau$.

Применяя лемму Гронуолла (см. [20, с. 152, лемма 1.1]) к неравенству (18), получим неравенство

$$\int\limits_0^t \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\tau \leqslant M_9\int\limits_0^t F\, d\tau = M_9\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau \|\overline{f}\|_0^2\, d\tau \leqslant TM_9\int\limits_0^t \|\overline{f}\|_0^2\, d\tau. \tag{19}$$

Таким образом, из (17) с учетом (19) получаем оценку

$$\varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \int\limits_0^t \left(\|\tilde{z}_x\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_0^2\right) d\tau \leqslant M_{10}\int\limits_0^t \|\overline{f}\|_0^2\, d\tau = \varepsilon^2 M_{10}\int\limits_0^t \|u_\tau\|_0^2\, d\tau = O(\varepsilon^2). \tag{20}$$

Из априорной оценки (20) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon \to 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2$, где $\|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|\tilde{z}_x\|_0^2\, d\tau$, если u_t — ограниченная, достаточно гладкая функция. Поэтому при малом ε решение задачи (7)–(9) будем принимать за приближенное решение третьей начально-краевой задачи для многомерного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка гиперболического типа (1)–(4).

3. Построение локально-одномерной схемы

На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый интервал (t_j, t_{j+1}) разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \tau\frac{\alpha}{p}$, $\alpha = 1, 2, \ldots,$ и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$.

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \frac{1}{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p}\overline{\omega}_{h_\alpha}, \quad \overline{\omega}_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha\hbar_\alpha,\ i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\right\},$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha \neq 0, N_\alpha, \\ \frac{h_\alpha}{2}, & i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

Уравнение (9) перепишем в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathscr{L}_\alpha u^\varepsilon = 0, \quad \mathscr{L}_\alpha u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - L_\alpha u^\varepsilon - \frac{1}{p}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} u^\varepsilon d\tau + \frac{1}{p}\int\limits_0^t u^\varepsilon d\tau + \frac{1}{p}u^\varepsilon - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x,t)$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, и удовлетворяющие условию $\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathscr{L}_\alpha \vartheta_{(\alpha)} = \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - \frac{1}{p}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} \vartheta_{(\alpha)}\, d\tau + \frac{1}{p}\int\limits_0^t \vartheta_{(\alpha)}\, d\tau + \frac{1}{p}\vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \tag{21}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \mathscr{B}_{-\alpha}\vartheta_{(\alpha)} - \widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \mathscr{B}_{+\alpha}\vartheta_{(\alpha)} - \widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha = 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{22}$$

полагая при этом [21, с. 522]

$$\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j), \quad j = 1,2,\ldots,$$

$$\vartheta_{(\alpha)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = \vartheta_{(\alpha-1)}\left(x, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2,3,\ldots,p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (21) номера α неявной схемой на полуинтервале $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$, тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений

$$\varepsilon\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} y\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau$$
$$- \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} y\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau - \frac{1}{p} y\left(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{23}$$

где $\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha}$, $a_\alpha = k_\alpha\left(x^{(-0.5\alpha)}, \bar{t}\right)$, $x^{(-0.5\alpha)} = (x_1,\ldots,x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1},\ldots,x_p)$, $\bar{t} = t^{j+1/2}$, $\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных по направлению x_α узлов.

Запишем разностный аналог для граничных условий (22):

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mathscr{B}_{-\alpha} y^{j+\frac{\alpha}{p}} - \widetilde{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ -a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mathscr{B}_{+\alpha} y^{j+\frac{\alpha}{p}} - \widetilde{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = 1. \end{cases} \tag{24}$$

Условия (24) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\alpha^2)$ на решениях уравнения (21) при каком-либо α:

$$a_\alpha^{(1_\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mathscr{B}_{-\alpha}\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}} + \widetilde{\mu}_{-\alpha} + O(h_\alpha).$$

С помощью разложения Тейлора находим

$$k_\alpha \vartheta'_{(\alpha)} = a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha \Big(k_\alpha \vartheta'_{(\alpha)}\Big)' + O(h_\alpha^2)$$
$$= a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha \left(\varepsilon \frac{\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}} - \vartheta^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} \vartheta\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} \vartheta\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau + \frac{1}{p}\vartheta\left(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) - f^{j+\frac{\alpha}{p}} \right) + O(h_\alpha^2).$$

Итак,

$$a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha \left(\varepsilon \frac{\vartheta^{j+\frac{\alpha}{p}} - \vartheta^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} \vartheta\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau \right.$$
$$\left. + \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} \vartheta\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau + \frac{1}{p}\vartheta\left(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) - f^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)_0 \tag{25}$$
$$= \mathscr{B}_{-\alpha} \vartheta\left(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) + \widetilde{\mu}_{-\alpha} + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau).$$

В (25) отбросим величины порядка малости $O(h_\alpha^2)$ и $O(h_\alpha \tau)$, заменим $\vartheta_{(\alpha)}$ на $y^{j+\frac{\alpha}{p}}$, тогда (25) при $x_\alpha = 0$ перепишется так:

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t},0}^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$= \frac{a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau - \frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau - \mathscr{B}_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \frac{\overline{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Аналогично при $x_\alpha = 1$

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t},N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$= -\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau + \frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau + \mathscr{B}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha} + \frac{\overline{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

где $\mathscr{B}_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-(t_j - t_{j'})} \beta_{-\alpha} y_0^{\frac{j'}{p}}\tau$, $\mathscr{B}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{j'=0}^{pj+\alpha} e^{-(t_j - t_{j'})} \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\tau$, $\overline{\mu}_{-\alpha} = 0.5\, h_\alpha f_{\alpha,0} + \widetilde{\mu}_{-\alpha}$, $\overline{\mu}_{+\alpha} = 0.5 h_\alpha f_{\alpha,0} + \widetilde{\mu}_{+\alpha}$.

Итак, разностный аналог задачи (7)–(9) имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \;\; x \in \overline{\omega}_h, \tag{26}$$

$$y(x, 0) = u_0(x),$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \begin{cases} \widetilde{\Lambda}_\alpha y = \Big(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)_{x_\alpha} + \frac{1}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})} y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\tau - \frac{1}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} y\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau - \frac{1}{p}y^{j+\frac{\alpha}{p}}, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda_\alpha^- y = \dfrac{a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau - \frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau - \mathscr{B}_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda_\alpha^+ y = -\dfrac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau + \frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau + \mathscr{B}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p} y_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}, \end{cases}$$

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\overline{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\overline{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = 1, \end{cases} \qquad y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}}.$$

4. Погрешность аппроксимации локально-одномерной схемы

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ — решение исходной задачи (7)–(9). Подставляя $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в разностную задачу (26), получим задачу для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\varepsilon\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})} z\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau$$
$$- \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} z\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau - \frac{1}{p}z\Big(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big) + \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \qquad (27)$$

где $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})} u\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau - \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} u\left(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right)\tau - \frac{1}{p}u\left(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\right) + \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} - \varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau}$.

Обозначив через $\mathring{\psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + \frac{1}{p}\int_0^t e^{-(t-\tau)} u\,d\tau - \frac{1}{p}\int_0^t u\,d\tau - \frac{1}{p}u + f_\alpha - \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$ и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^{p}\mathring{\psi}_\alpha = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*$:

$$\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})} u\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau - \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} u\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau - \frac{1}{p}u\Big(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)$$
$$+ \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} - \varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \mathring{\psi}_\alpha + \mathring{\psi}_\alpha = \Big(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\Big) - \Big(\frac{1}{p}u\Big(x, t^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big) - \frac{1}{p}u^{j+\frac{1}{2}}\Big)$$
$$+ \left(\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})} u\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau - \frac{1}{p}\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)} u^{j+\frac{1}{2}} d\tau\right) - \left(\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} u\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau - \frac{1}{p}\int\limits_0^t u^{j+\frac{1}{2}} d\tau\right)$$
$$+ \left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\varepsilon\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{\varepsilon}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right) + \mathring{\psi}_\alpha = \mathring{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*.$$

Очевидно, что $\psi^*_\alpha = O(h^2_\alpha + \tau)$, $\mathring{\psi}_\alpha = O(1)$,

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathring{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p} \psi^*_\alpha = O(|h|^2 + \tau), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2.$$

Запишем граничное условие при $x_\alpha = 0$ так:

$$\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p} y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau - \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau$$
$$- \mathscr{B}_{-\alpha} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p} y_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \widetilde{\mu}_{-\alpha}. \qquad (28)$$

Пусть $z^{j+\frac{\alpha}{p}} = y^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где u — решение исходной дифференциальной задачи (7)–(9). Подставим $y^{j+\frac{\alpha}{p}} = z^{j+\frac{\alpha}{p}} + u^{j+\frac{\alpha}{p}}$ в (28). Тогда получим

$$\frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p} z_{\bar{t}}^{(\alpha)} = a_\alpha^{(1\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau - \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau$$
$$- \mathscr{B}_{-\alpha} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p} z_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau$$
$$- \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau - \mathscr{B}_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha\varepsilon}{p} u_{\bar{t},0}^{(\alpha)} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \widetilde{\mu}_{-\alpha}.$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{p}\int_0^t e^{-(t-\tau)} u \, d\tau - \frac{1}{p}\int_0^t u\, d\tau - \frac{1}{p} u + f_\alpha - \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_\alpha=0}^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \left(f_{\alpha,0} - \frac{\varepsilon}{p} u_{\bar{t},0}^{j+\frac{\alpha}{p}} \right) + a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}}$$
$$+ \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j - t_{j'})} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau + \frac{0.5h_\alpha}{p} \sum_{j'=0}^{j} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} \tau - \mathscr{B}_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{0.5h_\alpha}{p} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \widetilde{\mu}_{-\alpha}$$
$$- 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) u + \frac{1}{p}\int_0^t e^{-(t-\tau)} u d\tau - \frac{1}{p}\int_0^t u d\tau - \frac{1}{p} u + f_\alpha - \frac{\varepsilon}{p}\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_\alpha=0}^{j+\frac{1}{p}} + 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha}$$
$$= a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \mathscr{B}_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \widetilde{\mu}_{-\alpha} - 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \right]^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau)$$
$$= k_\alpha \frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha} + 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \right]_0^{j+\frac{\alpha}{p}} - 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) \right]^{j+\frac{1}{2}}$$
$$- \mathscr{B}_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \widetilde{\mu}_{-\alpha} + 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau)$$
$$= \left(k_\alpha \frac{\partial u^{j+\frac{\alpha}{p}}}{\partial x_\alpha} - \mathscr{B}_{-\alpha} u_0^{j+\frac{\alpha}{p}} + \widetilde{\mu}_{-\alpha} \right)_{x_\alpha=0} + 0.5h_\alpha \mathring{\psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau).$$

В силу граничных условий (7) выражение, стоящее в скобках, есть ноль. Поэтому

$$\psi_{-\alpha}=0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}+\psi^*_{-\alpha},\quad \psi^*_{-\alpha}=O(h_\alpha^2+\tau)+O(h_\alpha\tau),$$

$$\frac{\varepsilon}{p}z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar t,0}$$

$$=\frac{a_\alpha^{(1_\alpha)}z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{x_\alpha,0}+\frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-(t_j-t_{j'})}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-\frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau-\mathscr{B}_{-\alpha}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}-\frac{0.5h_\alpha}{p}z_0^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}$$

$$+\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}+\frac{\psi^*_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},$$

$$\frac{\varepsilon}{p}z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar t,N_\alpha}$$

$$=-\frac{a_\alpha^{(N_\alpha)}z^{j+\frac{\alpha}{p}}_{\bar x_\alpha,N_\alpha}-\frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j}e^{-(t_j-t_{j'})}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau+\frac{0.5h_\alpha}{p}\sum\limits_{j'=0}^{j}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\tau+\mathscr{B}_{+\alpha}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}+\frac{0.5h_\alpha}{p}z_{N_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}}{0.5h_\alpha}$$

$$+\overset{\circ}{\psi}_{+\alpha}+\frac{\psi^*_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Итак, задача для погрешности $z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ принимает вид

$$\frac{\varepsilon}{p}z^{(\alpha)}_{\bar t}=\overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)}+\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}},\quad z(x,0)=0, \tag{29}$$

где

$$\overline{\Lambda}_\alpha=\begin{cases}\widetilde{\Lambda}_\alpha, & x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda^-_\alpha, & x_\alpha=0,\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\Lambda^+_\alpha, & x_\alpha=1,\end{cases}\qquad \Psi_\alpha=\begin{cases}\psi_\alpha, & x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\psi_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ \frac{1}{0.5h_\alpha}\psi_{+\alpha}, & x_\alpha=1,\end{cases}$$

$$\psi_\alpha=\overset{\circ}{\psi}_\alpha+\psi^*_\alpha,\quad \overset{\circ}{\psi}_\alpha=O(1),\quad \psi^*_\alpha=O(h_\alpha^2+\tau),\quad \psi_{-\alpha}=0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{-\alpha}+\psi^*_{-\alpha},$$

$$\psi_{+\alpha}=0.5h_\alpha\overset{\circ}{\psi}_{+\alpha}+\psi^*_{+\alpha},\quad \psi^*_{\pm\alpha}=O(h_\alpha^2+\tau),\quad \overset{\circ}{\psi}_{\pm\alpha}=O(1),\quad \sum_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_{\pm\alpha}=0.$$

5. Устойчивость локально-одномерной схемы

Для доказательства устойчивости схемы (26) воспользуемся методом энергетических неравенств. Для этого умножим уравнение (26) скалярно на $y^{(\alpha)}=y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\left[\frac{\varepsilon}{p}y^{(\alpha)}_{\bar t},y^{(\alpha)}\right]-\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right]=\left[\Phi^{(\alpha)},y^{(\alpha)}\right], \tag{30}$$

где

$$[u,v]_\alpha=\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\quad \|\,y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}=\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha}y^2\hbar_\alpha,$$

$$[u,v]=\sum_{x\in\bar\omega_h}uvH,\quad H=\prod_{\alpha=1}^{p}\hbar_\alpha,\quad \|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}=\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}H/\hbar_\alpha.$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (30):

$$\left[\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \frac{\varepsilon}{2p}\Big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\Big)_{\bar t} + \frac{\varepsilon\tau}{2p}\|y_{\bar t}^{\alpha}\|^2_{L_2(\alpha)}. \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha &= \Big(\widetilde{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)}y^{(\alpha)} + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)}y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\\ &= -\Big(a_\alpha y^2_{\bar x_\alpha}\Big]_\alpha + \frac{1}{p}\left[y^{(\alpha)}, \sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})}y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\tau\right]_\alpha - \frac{1}{p}\Big[y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha\\ &- \left[\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} y\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_\alpha - y_0^{(\alpha)}\mathscr{B}_{-\alpha}y_0^{(\alpha)} - y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\mathscr{B}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)}.\end{aligned} \tag{32}$$

$$\Big[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha = \Big[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha - \widetilde{\mu}_{-\alpha}y_0^{(\alpha)} - \widetilde{\mu}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{33}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (33):

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha}y_0^{(\alpha)} + \widetilde{\mu}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha} + \widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big) + \varepsilon_1\frac{c_0}{8}\|y_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + \varepsilon_1\Big(1 + \frac{8}{c_0}\Big)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}.$$

Выбирая $\varepsilon_1 = \frac{c_0}{8p(c_0+8)}$, получаем

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha}y_0^{(\alpha)} + \widetilde{\mu}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \leqslant \frac{2p(c_0+8)}{c_0}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha} + \widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big) + \frac{c_0^2}{64p(c_0+8)}\|y_{\bar x_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{8p}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}, \tag{34}$$

$$\left[\frac{1}{p}y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left[\frac{1}{p}, \Big(y^{(\alpha)}\Big)^2\right]_\alpha = \frac{1}{p}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}. \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})}y\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_\alpha = \left\|\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})}y\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau\right\|_{L_2(\alpha)}\left\|\frac{1}{p}y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|_{L_2(\alpha)}\\ &\leqslant \left\|\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})}y\Big(x, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{4p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\\ &= \frac{1}{p}\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\left(\sum_{j'=0}^{j} e^{-(t_j-t_{j'})}y\Big(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau\right)^2 h_\alpha + \frac{1}{4p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\\ &\leqslant \frac{1}{p}\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\left(\sum_{j'=0}^{j} e^{-2(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{j'=0}^{j} y^2\Big(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau\right)h_\alpha + \frac{1}{4p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\\ &\leqslant \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-2(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha\sum_{j'=0}^{j} y^2\Big(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau + \frac{1}{4p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\\ &= \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-2(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} y^2\Big(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)h_\alpha + \frac{1}{4p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\\ &= \frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-2(t_j-t_{j'})}\tau\sum_{j'=0}^{j}\left\|y\Big(x_{i_\alpha}, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\right\|^2_{L_2(\alpha)}\tau + \frac{1}{4p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}.\end{aligned} \tag{36}$$

Так как

$$\sum_{j'=0}^{j} e^{-2(t_j-t_{j'})}\tau = e^{-2t_j}\sum_{j'=0}^{j} e^{2t_{j'}}\tau = e^{-2t_j}\frac{e^{2t_j}-1}{e^{2\tau}-1}\tau = \frac{1-e^{-2t_j}}{2},$$

то из (36) получаем

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} e^{-2(t_j-t_{j'})}y\Big(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_\alpha \leqslant \frac{1-e^{-2t_j}}{2p}\sum_{j'=0}^{j}\Big\|y\Big(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\Big\|^2_{L_2(\alpha)}\tau \\ +\frac{1}{4p}\Big\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big\|^2_{L_2(\alpha)} \leqslant T\sum_{j'=0}^{j}\Big\|y\Big(x_{i_\alpha},t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\Big\|^2_{L_2(\alpha)}\tau+\frac{1}{4p}\Big\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big\|^2_{L_2(\alpha)},\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} y\Big(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau, y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]_\alpha = \left[\left(\frac{1}{p}\sum_{j'=0}^{j} y\Big(x,t^{j'+\frac{\alpha}{p}}\Big)\tau\right)^2,\frac{1}{4\varepsilon_1}\right]_\alpha+\left[\frac{\varepsilon_1}{p},\Big(y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big)^2\right]_\alpha \\ \leqslant \frac{1}{8p}\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}+M_1\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\alpha)}\tau,\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}-y_0^{(\alpha)}\mathscr{B}_{-\alpha}y_0^{(\alpha)}-y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\mathscr{B}_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{(\alpha)} = -y_0^{(\alpha)}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}e^{-(t_j-t_{j'})}\beta_{-\alpha}y_0^{\frac{j'}{p}}\tau \\ -y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}e^{-(t_j-t_{j'})}\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\tau \leqslant \varepsilon_2\left(\Big(y_0^{(\alpha)}\Big)^2+\Big(y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\Big)^2\right) \\ +M_2(\varepsilon_2)\left[\left(\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}e^{-(t_j-t_{j'})}\beta_{-\alpha}y_0^{\frac{j'}{p}}\tau\right)^2+\left(\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}e^{-(t_j-t_{j'})}\beta_{+\alpha}y_{N_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\tau\right)^2\right] \\ \leqslant \varepsilon_2 M_3\left(\Big\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big\|^2_{L_2(\alpha)}+\Big\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big]\Big|^2_{L_2(\alpha)}\right)+M_4(\varepsilon_2)\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}\left(\Big\|y^{\frac{j'}{p}}\Big\|^2_{L_2(\alpha)}+\Big\|y_{\bar{x}_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\Big]\Big|^2_{L_2(\alpha)}\right)\tau,\end{aligned} \tag{39}$$

$$\Big[\varphi_\alpha, y^{(\alpha)}\Big]_\alpha \leqslant 2p\big\|\varphi_\alpha\big\|^2_{L_2(\alpha)}+\frac{1}{8p}\big\|y^{(\alpha)}\big\|^2_{L_2(\alpha)}. \tag{40}$$

После суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1,2,\ldots,p$, подставим (31)–(40) в тождество (30). Тогда, выбирая $\varepsilon_2 = \min\left\{\frac{c_0}{4M_3},\frac{1}{4pM_3}\right\}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2p}\Big(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\Big)_{\bar t}+\frac{\varepsilon\tau}{2p}\|y_{\bar t}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{c_0}{4}\|y_{\bar x_\alpha}^{(\alpha)}]|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\frac{1}{4p}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)} \\ \leqslant M_5\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau+M_6\sum_{j'=0}^{pj+\alpha}\left(\Big\|y^{\frac{j'}{p}}\Big\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\Big\|y_{\bar x_\alpha}^{\frac{j'}{p}}\Big]\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau \\ +M_7\left(\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\Big(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\Big)H/\hbar_\alpha\right).\end{aligned} \tag{41}$$

Суммируем (41) сначала по α от 1 до p :

$$\frac{\varepsilon}{2p}\left(\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)_{\bar t}+M_8\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)$$
$$\leqslant M_5\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j'=0}^{j}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau+M_6\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{j'=0}^{pj+\alpha'}\left(\left\|y^{\frac{j'}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|y_{\bar x_{\alpha'}}^{\frac{j'}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau$$
$$+M_7\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|\varphi^{\frac{j'}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right),$$

а затем, суммируя по j' от 0 до j:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+M_8\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)$$
$$\leqslant M_5\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\tau+M_6\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj'+\alpha'}\left(\left\|y^{\frac{s}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|y_{\bar x_{\alpha'}}^{\frac{s}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau \tag{42}$$
$$+M_7\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\frac{\varepsilon}{2}\|y^0\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}.$$

Оценим второе слагаемое в правой части (42), тогда имеем

$$\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{pj'+\alpha'}\left(\left\|y^{\frac{s}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|y_{\bar x_{\alpha'}}^{\frac{s}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau$$
$$\leqslant M_9\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\sum_{\alpha'=1}^{p}\left(\left\|y^{s+\frac{\alpha'}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|y_{\bar x_{\alpha'}}^{s+\frac{\alpha'}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau$$
$$\leqslant M_9\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}+p\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\left(\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|y_{\bar x_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau.$$

С учетом последнего перепишем (42) в виде

$$\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|y_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)$$
$$\leqslant M_{10}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{s=0}^{j'}\left(\left\|y^{s+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|y_{\bar x_\alpha}^{s+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\tau+M_{11}F_1^j, \tag{43}$$

где $F_1^j=\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar\omega_h)}$.

Применяя разностный аналог леммы Гроноулла [22, лемма 4, с. 171] к неравенству (43), получим

$$\begin{gathered}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\right|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)\\ \leqslant M_{12}\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_h)}\right).\end{gathered}\tag{44}$$

Учитывая (43), (44), из (42) получаем априорную оценку

$$\begin{gathered}\varepsilon\left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\right|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}\right)\\ \leqslant M\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar{\omega}_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde{\mu}^2_{-\alpha}+\widetilde{\mu}^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right)+\|y^0\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_h)}\right),\end{gathered}\tag{45}$$

где $M=\mathrm{const}>0$ и не зависит от h_α и τ, $x'=(x_1,x_2,\ldots,x_{\alpha-1},x_{\alpha+1},\ldots,x_p)$.

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5), *тогда локально-одномерная схема* (26) *устойчива по правой части и начальным данным, так что для решения схемы* (26) *справедлива оценка* (45).

6. Сходимость локально-одномерной схемы

По аналогии с [21] решение $z_{(\alpha)}=z^{j+\frac{\alpha}{p}}$ задачи для погрешности (29) представим в виде суммы $z_{(\alpha)}=\upsilon_{(\alpha)}+\eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\varepsilon\frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau}=\mathring{\psi}_\alpha,\quad x\in\omega_h+\gamma_\alpha,\ \alpha=1,2,\ldots,p,\tag{46}$$

$$\eta(x,0)=0,\quad \mathring{\psi}_\alpha=\begin{cases}\mathring{\psi}_\alpha, & x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \mathring{\psi}_{-\alpha}, & x_\alpha=0,\\ \mathring{\psi}_{+\alpha}, & x_\alpha=l_\alpha.\end{cases}$$

Из (46) следует $\varepsilon\eta^{j+1}=\varepsilon\eta_{(p)}=\varepsilon\eta^j+\tau\left(\mathring{\psi}_1+\mathring{\psi}_2+\ldots+\mathring{\psi}_p\right)=\varepsilon\eta^j=\ldots=\varepsilon\eta^0=0$. Для $\eta^\alpha=\frac{\tau}{\varepsilon}\left(\mathring{\psi}_1+\mathring{\psi}_2+\ldots+\mathring{\psi}_\alpha\right)=-\frac{\tau}{\varepsilon}\left(\mathring{\psi}_{\alpha+1}+\ldots+\mathring{\psi}_p\right)=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$.

Функция $\upsilon_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\varepsilon\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau}=\widetilde{\Lambda}_\alpha\upsilon_{(\alpha)}+\widetilde{\psi}_\alpha,\quad \widetilde{\psi}_\alpha=\widetilde{\Lambda}_\alpha\eta_{(\alpha)}+\psi^*_\alpha,\quad x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\tag{47}$$

$$0.5h_\alpha\varepsilon\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau}=\Lambda^-_\alpha\upsilon_{(\alpha)}+\widetilde{\psi}_{-\alpha},\quad \widetilde{\psi}_{-\alpha}=\Lambda^-_\alpha\eta_{(\alpha)}+\psi^*_{-\alpha},\quad x_\alpha=0,\tag{48}$$

$$0.5h_\alpha\varepsilon\frac{\upsilon_{(\alpha)}-\upsilon_{(\alpha-1)}}{\tau}=\Lambda^+_\alpha\upsilon_{(\alpha)}+\widetilde{\psi}_{+\alpha},\quad \widetilde{\psi}_{+\alpha}=\Lambda^+_\alpha\eta_{(\alpha)}+\psi^*_{+\alpha},\quad x_\alpha=1,\tag{49}$$

$$\upsilon(x,0)=0.\tag{50}$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\overline{Q}_T$ производные $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4u}{\partial x_\alpha^2\partial x_\beta^2}$, $\frac{\partial^3u}{\partial x_\alpha^2\partial t}$, $\frac{\partial^2f}{\partial x_\alpha^2}$, $\alpha=1,2,\ldots,p$, $\alpha\neq\beta$, то $\widetilde{\Lambda}_\alpha\eta_{(\alpha)}=-\frac{\tau}{\varepsilon}\widetilde{\Lambda}_\alpha\left(\mathring{\psi}_{\alpha+1}+\ldots+\mathring{\psi}_p\right)=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, $\Lambda^\pm_\alpha\eta_{(\alpha)}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$.

Решение задачи (47)–(50) оценим с помощью теоремы 1.

$$\varepsilon\left\|v^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|v_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|v^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)$$
$$\leqslant M\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|\widetilde\psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\widetilde\psi^2_{-\alpha}+\widetilde\psi^2_{+\alpha}\right)H/\hbar_\alpha\right). \tag{51}$$

Так как $\eta^{j+1}=0$, $\eta_{(\alpha)}$, $\eta_{\bar x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ и

$$\left\|z^{j+1}\right\|^2_1=\varepsilon\left\|z^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|z_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|z^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)$$
$$=\varepsilon\left\|v^{j+1}+\eta^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|v_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}+\eta_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|v^{j'+\frac{\alpha}{p}}+\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)$$
$$\leqslant\varepsilon\|v^{j+1}\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+2\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|v_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|v^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|\eta_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right.$$
$$\left.+\left\|\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\leqslant 2\left(\varepsilon\left\|v^{j+1}\right\|^2_1+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|\eta_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|\eta^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\right),$$

тогда из оценки (51) следует теорема.

Теорема 2. *Пусть задача (7)–(9) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ при всех значениях ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2\partial x_\beta^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2\partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\quad \alpha=1,2,\ldots,p,\ \alpha\neq\beta,$$

а также выполнены условия (5), тогда локально-одномерная схема (26) сходится к решению дифференциальной задачи (7)–(9) со скоростью $O\left(|h|^2+\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, $\tau=o\left(\varepsilon\right)$, так, что

$$\left\|y^{j+1}-u^{j+1}\right\|_1\leqslant M\left(|h|^2+\frac{\tau}{\varepsilon}\right),$$

где ε — малый параметр, $|h|^2=h_1^2+h_2^2+\ldots+h_p^2$,

$$\left\|z^{j+1}\right\|_1=\left(\varepsilon\left\|z^{j+1}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\left\|z_{\bar x_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\bar\omega_h)}+\left\|z^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\bar\omega_h)}\right)\right)^{1/2}.$$

Замечание 1. Если $\varepsilon=\tau^\rho$, где $0<\rho<1$, тогда решение схемы (26) с учетом оценки (20) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(4) со скоростью $O\left(|h|^2+\tau^{1-\rho}+\tau^\rho\right)$.

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если взять $\varepsilon=\tau^{\frac12}$, тогда решение схемы (26) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(4) со скоростью $O\left(|h|^2+\tau^{\frac12}\right)$.

Замечание 2. Полученные априорные оценки справедливы и в случае, когда
1) Область G представляет собой p-мерный прямоугольный параллелепипед

$$G=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_p):\ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2,\ldots,p\}.$$

2) Оператор Lu имеет вид

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u,\quad L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)-q_\alpha(x,t)u(x,t),$$

где $|q_\alpha(x,t)|\leqslant c_2$, $q_\alpha(x,t)\in C^{2,1}\left(\overline{Q}_T\right)$.

Замечание 3. Полученные в данной работе результаты справедливы и для уравнения влагопереноса дробного порядка следующего вида:

$$\partial_{0t}^{\delta}u=Lu+\partial_{0t}^{\delta}Lu-u+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{52}$$

с краевыми

$$k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\partial_{0t}^{\delta}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)=\beta_{-\alpha}(x,t)u+\mu_{-\alpha}(x,t),\quad x_\alpha=0,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{53}$$

$$-\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\partial_{0t}^{\delta}\left(k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)\right)=\beta_{+\alpha}(x,t)u+\mu_{+\alpha}(x,t),\quad x_\alpha=1,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{54}$$

и начальными условиями

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{55}$$

где $Lu=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u$, $L_\alpha u=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)-q_\alpha(x,t)u(x,t)-\frac{1}{p}\int_0^t u\,d\tau$, $\partial_{0t}^{\delta}=\frac{1}{\Gamma(1-\delta)}\int_0^t\frac{u_\tau\,d\tau}{(t-\tau)^\delta}$ — дробная производная в смысле Капуто порядка δ, $0<\delta<1$.

Тогда, умножая обе части (52), (53), (54) на $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}$ и действуя оператором дробного интегрирования $D_{0t}^{-\delta}=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\delta}}$, после несложных преобразований получаем

$$Lu-u=-\widetilde{f}(x,t), \tag{56}$$

$$\begin{cases}k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\mathscr{B}_{-\alpha}u+\widetilde{\mu}_{-\alpha}(x,t), & x_\alpha=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ -k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=\mathscr{B}_{+\alpha}u+\widetilde{\mu}_{+\alpha}(x,t), & x_\alpha=1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{57}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{G}, \tag{58}$$

где

$$\widetilde{f}(x,t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(f(x,t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)+Lu_0(x)-u_0(x)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\mathscr{B}_{-\alpha}u(0,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\beta_{-\alpha}(0,x',t)u(0,x',t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\mathscr{B}_{+\alpha}u(1,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\beta_{+\alpha}(1,x',t)u(1,x',t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha}(0,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\mu_{-\alpha}(0,x',t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)+k_{\alpha}(0,x',0)u_0'(0,x')}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$$\widetilde{\mu}_{+\alpha}(1,x',t)=\frac{D_{0t}^{-\delta}\left(\mu_{+\alpha}(1,x',t)\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}\right)-k_{\alpha}(1,x',0)u_0'(1,x')}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(1+\delta k)}},$$

$D_{0t}^{-\delta}=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\delta}}$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка δ, $0<\delta<1$.

Далее вместо уравнения (56) рассматривается уравнение с малым параметром

$$\varepsilon u_t=Lu-u+\widetilde{f}(x,t). \tag{59}$$

Повторяя рассуждения настоящей статьи, нетрудно убедиться в справедливости теорем 1 и 2 для задачи (57)–(59).

Заключение. Настоящая работа посвящена изучению многомерного уравнения Соболевского типа с эффектом памяти и граничными условиями третьего рода. Для приближенного решения поставленной задачи исходное уравнение сводится к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром. Показано, что при стремлении малого параметра к нулю решение полученной модифицированной задачи сходится к решению исходной задачи. Для модифицированной задачи построена локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка, откуда следуют единственность и устойчивость решения схемы, доказана сходимость решения локально-одномерной разностной схемы к решению модифицированной дифференциальной задачи.

Литература

1. *Grasselli M., Pata V.* Uniform attractors of nonautonomous dynamical systems with memory // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications / Lorenzi, A., Ruf, B. (eds).—Basel: Birkhauser Verlag, 2002.—Vol. 50.—P. 155–178. DOI: 10.1007/978-3-0348-8221-7_9.
2. *Coleman B. D., Gurtin M. E., Angew Z.* Equipresence and costitutive equations for rigid heat conductors // Appl. Math. Phys.—1967.—Vol. 18.—P. 199–208. DOI: 10.1007/BF01596912.
3. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal.—1968.—Vol. 31.—P. 113–126. DOI: 10.1007/BF00281373.
4. *Fabrizio M., Morro A.* Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity.—Philadelphia, PA, 1992.—x+203 p.—(SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 12. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)).
5. *Renardy M., Hrusa W. J., Nohel J. A.* Mathematical problems in linear viscoelasticity.—Longmans Press, Essex, 1987.—273 p.
6. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping // Math. Meth. Appl. Sci.—2001.—Vol. 24.—P. 1043–1053. DOI: 10.1002/mma.250.
7. *Munoz Rivera J. E., Barreto R. K.* Decay rates of solutions to thermoviscoelastic plates with memory // IMA J. Appl. Math.—1998.—Vol. 60, № 3.—P. 263–283. DOI: 10.1093/imamat/60.3.263.
8. *Munoz Rivera J. E., Fatori L. H.* Regularizing properties and propagations of singularities for thermoelastic plates // Math. Meth. Appl. Sci.—1998.—Vol. 21, № 9.—P. 797–821. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(199806)21:9<797::AID-MMA970>3.0.CO;2-D.

9. *Racke R.* Asymptotic behavior of solutions in linear 2- or 3-d thermoelasticity with second sound // Quart. Appl. Math.—2003.—Vol. 61.—P. 315–328. DOI: 10.1090/qam/1976372.
10. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Краевые задачи матем. физики. 13. Сб. работ. Тр. МИАН СССР.—1988.—Т. 179.—С. 126–164.
11. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Кан Н. З.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.—М.: Наука, 1989.—416 с.
12. *Свешников А. А., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа.—М.: Физматлит, 2007.—736 с.
13. *Бештоков М. Х.* Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения.—2013.—Т. 49, № 9.—С. 1170–1177.
14. *Бештоков М. Х.* О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения.—2016.—Т. 52, № 10.—С. 1393–1406.
15. *Beshtokov M. Kh.* The third boundary value prob-lem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.—2016.—Vol. 158, № 1.—P. 12–19. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012019.
16. *Бештоков М. Х.* Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений Соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференц. уравнения.—2018.—Т. 54, № 2.—С. 249–266. DOI: 10.1134/S0374064118020115.
17. *Бештоков М. Х.* Численное исследование начально-краевых задач для уравнения Соболевского типа с дробной по времени производной // Журн. выч. матем. и матем. физ.—2019.—Т. 59, № 2.—С. 185–202. DOI: 10.1134/S0044466919020054.
18. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференицальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук.—1957.—Т. 12, № 5.—С. 3–122.
19. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы.—М.: Наука, 1977.—439 с.
20. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.
21. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—617 с.
22. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.

Статья поступила 22 сентября 2022 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительных методов,
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 36–55

A LOCALLY ONE-DIMENSIONAL SCHEME FOR THE THIRD INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MULTIDIMENSIONAL SOBOLEV-TYPE EQUATION WITH A MEMORY EFFECT

Beshtokov, M. Kh.[1]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
89 a Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`

Abstract. The multidimensional Sobolev equation with memory effect and boundary conditions of the third kind is studied. For the numerical solution of the problem, the original multidimensional problem is reduced to the third initial boundary value problem for an integro-differential equation of parabolic type with a small parameter. The convergence of the solution of the obtained modified problem to the solution of the original problem when the small parameter approaches zero is proved. A. A. Samarsky's local one-dimensional difference scheme is used for the modified problem, the main idea of which is to reduce the transition from layer to layer to the sequential solution of a number of one-dimensional problems in each of the coordinate directions. In this case, the approximation error of the additive scheme is defined as the sum of inconsistencies for all intermediate schemes, that is, the constructed additive scheme has a total approximation, so that each of the intermediate schemes of the chain may not approximate the original problem, the approximation is achieved by summing up all inconsistencies for all intermediate schemes. Using the method of energy inequalities, a priori estimates are obtained, from which the uniqueness and stability of the solution of the locally one-dimensional difference scheme, as well as the convergence of the solution of the scheme to the solution of the original differential problem, follow.

Keywords: Sobolev-type equation, multidimensional equation, memory equation, a priori estimate, locally one-dimensional scheme, stability and convergence of schemes.

AMS Subject Classification: 65N06, 65N12.

For citation: *Beshtokov, M. Kh.* A Locally One-Dimensional Scheme for the Third Initial Boundary Value Problem for a Multidimensional Sobolev-Type Equation with a Memory Effect, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 36–55 (in Russian). DOI: 10.46698/p2394-5241-9362-p.

References

1. *Grasselli, M. and Pata, V.* Uniform Attractors of Nonautonomous Dynamical Systems with Memory, *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications* / Lorenzi, A., Ruf, B. (eds), Basel, Birkhauser Verlag, 2002, vol. 50, pp. 155–178. DOI: 10.1007/978-3-0348-8221-7_9.
2. *Coleman, B. D., Gurtin, M. E. and Angew, Z.* Equipresence and Costitutive Equations for Rigid Heat Conductors, *Applied Mathematics and Physics*, 1967, vol. 18, pp. 199–208. DOI: 10.1007/BF01596912.
3. *Gurtin, M. E. and Pipkin, A. C.* A General Theory of Heat Conduction with Finite Wave Speeds, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1968, vol. 31, pp. 113–126. DOI: 10.1007/BF00281373.
4. *Fabrizio, M. and Morro, A. Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM Studies in Applied Mathematics, vol. 12. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1992, vol. 12, Philadelphia, PA, 1992.
5. *Renardy, M., Hrusa, W. J. and Nohel, J. A. Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, Longmans Press, Essex, 1987.
6. *Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N. and Ferreira, J.* Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2001, vol. 24, pp. 1043–1053. DOI: 10.1002/mma.250.
7. *Munoz Rivera, J. E. and Barreto, R. K.* Decay Rates of Solutions to Thermoviscoelastic Plates with Memory, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1998, vol. 60, no. 3, pp. 263–283. DOI: 10.1093/imamat/60.3.263.
8. *Munoz Rivera, J. E. and Fatori, L. H.* Regularizing Properties and Propagations of Singularities for Thermoelastic Plates, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1998, vol. 21, no. 9, pp. 797–821. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(199806)21:9<797::AID-MMA970>3.0.CO;2-D.
9. *Racke, R.* Asymptotic Behavior of Solutions in Linear 2- or 3-d Thermoelasticity with Second Sound, *Quarterly of Applied Mathematics*, 2003, vol. 61, pp. 315–328. DOI: 10.1090/qam/1976372.
10. *Oskolkov, A. P.* Initial-Boundary Value Problems for Equations of Motion of Kelvin–Voight Fluids and Oldroyd Fluids, Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Part 13, Work Collection, *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova*, 1988, vol. 179, pp. 126–164 (in Russian).
11. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. and Kan, N. Z. Operatornyye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolyutsionnyye i spektral'nyye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolutionary and Spectral Problems], Moscow, Nauka, 1989, 416 p. (in Russian).
12. *Sveshnikov, A. A., Alshin, A. B., Korpusov, M. O. and Pletner, Yu. D. Lineynyye i nelineynyye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Equations of the Sobolev Type], Moscow, Fizmatlit, 2007, 736 p. (in Russian).
13. *Beshtokov, M. Kh.* Finite-Difference Method for a Non-Local Boundary Value Problem for a Third-Order Pseudoparabolic Equation, *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1134–1141. DOI: 10.1134/S0012266113090085.
14. *Beshtokov, M. Kh.* On the Numerical Solution of a Non-Local Boundary Value Problem for a Degenerating Pseudoparabolic Equation, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 10, pp. 1341–1354. DOI: 10.1134/S0012266116100104.

15. *Beshtokov, M. Kh.* The third boundary value problem-lem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 12–19. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012019.
16. *Beshtokov, M. Kh.* Boundary Value Problems for Degenerating and Nondegenerating Sobolev-Type Equations with a Nonlocal Source in Differential and Difference Forms, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. DOI: 10.1134/S0012266118020118.
17. *Beshtokov, M. Kh.* Nonlocal Boundary Value Problems for Sobolev-Type Fractional Equations and Grid Methods for Solving Them, *Siberian Advances in Mathematics*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 1–21. DOI: 10.3103/S1055134419010012.
18. *Vishik, M. I. and Lyusternik, L. A.* Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with Small Parameter, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1967, vol. 12, no. 5, pp. 3–122 (in Russian).
19. *Godunov, S. K. and Ryabenky, V. S. Raznostnyye skhemy* [Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1977, 439 p. (in Russian).
20. *Ladyzhenskaya, O. A. Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics], Moscow, Nauka, 1973, 407 p. (in Russian).
21. *Samarsky, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1983, 617 p. (in Russian).
22. *Samarsky, A. A. and Gulin, A. B. Ustoychivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1973, 415 p. (in Russian).

Received September 22, 2022

Murat Kh. Beshtokov
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
89 a Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia,
Leading Researcher, Department of Computational Methods
E-mail: `beshtokov-murat@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2968-9211