Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 1, С. 56–67

УДК 514.1:517.965
DOI 10.46698/a1434-0819-2118-p

ОБЩЕЕ НЕВЫРОЖДЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. А. Богданова[1], **Г. Г. Михайличенко**

[1] Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленина, 1

E-mail: bog-rada@yandex.ru

Аннотация. Системы функциональных уравнений вида $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi(g(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu)$ с шестью неизвестными функциями $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ возникают при установлении взаимного вложения двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств (ДФС ГДМ). При установлении вложения аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с известной вектор-функцией $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^1) = (x + \xi, y + \eta)$ в дуальную ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с известной вектор-функцией $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu)$ явный вид системы двух функциональных уравнений будет следующим: $\overline{x}\overline{\xi} + \overline{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu)$, $\overline{x}\overline{\eta} + \overline{y}\overline{\xi} + \overline{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu)$. Эта система двух функциональных уравнений разрешима, поскольку выражения вектор-функций g и f, входящие в систему, известны. Чтобы найти общее невырожденное решение заданной системы функциональных уравнений, необходимо разработать метод решения, что представляет собой интересную и содержательную математическую задачу. Основа метода состоит в дифференцировании одного из функциональных уравнений, входящих в систему, с последующим переходом к дифференциальным уравнениям. Далее, решения дифференциальных уравнений подставляются во второе функциональное уравнение исходной системы функциональных уравнений, откуда при соответствующих ограничениях находится общее невырожденное ее решение. Данный метод может быть развит и применен к другим такого же вида системам функциональных уравнений, возникающих в рамках задачи вложения ДФС ГДМ, для нахождения их общего невырожденного решения.

Ключевые слова: геометрия двух множеств, последовательное по рангу вложение, система функциональных уравнений, общее невырожденное решение системы функциональных уравнений, системы дифференциальных уравнений.

AMS Subject Classification: 51K99, 34K99.

Образец цитирования: *Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г.* Общее невырожденное решение одной системы функциональных уравнений // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 56–67. DOI: 10.46698/a1434-0819-2118-p.

1. Введение

Двуметрическая феноменологически симметричная геометрия двух множеств (ДФС ГДМ) ранга $(n+1, 2)$, где $n \in N$, задается на двумерном и $2n$-мерном дифференцируемых многообразиях M и N дифференцируемой вектор-функцией (двухкомпонентной функцией) $f : M \times N \to R^2$ с открытой и плотной областью определения в $M \times N$, сопоставляющей паре точек два действительных числа [1, 2]. Координатное представление для этой функции $f = (f^1, f^2)$:

$$f = f(x, y, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{2n}),$$

где (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$ — локальные координаты соответственно в многообразиях M и N. Дополнительно имеют место следующие аксиомы:

Аксиома 1. *Координатное представление функции f невырождено относительно координат (x, y) и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$.*

Невырожденность функции f в ее координатном представлении выражается необращением в нуль якобианов:

$$\frac{\partial\big(f^1(i,\alpha), f^2(i,\alpha)\big)}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0,$$

$$\frac{\partial\big(f^1(i_1,\alpha), f^2(i_1,\alpha), \dots, f^1(i_n,\alpha), f^2(i_n,\alpha)\big)}{\partial(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, \dots, \xi^{2n}_\alpha)} \neq 0,$$

где (x_i, y_i) — координаты точки i, а $(\xi^1_\alpha, \xi^2_\alpha, \dots, \xi^{2n}_\alpha)$ — координаты точки α.

Аксиома 2. *Для плотного и открытого множества точек $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2) \in M^{n+1} \times N^2$ все $4(n+1)$ значений функции f связаны уравнением*

$$\Phi(f^1(i_1,\alpha_1), f^2(i_1,\alpha_1), \dots, f^1(i_{n+1},\alpha_2), f^2(i_{n+1},\alpha_2)) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ — вектор-функция (двухкомпонентная функция) $4(n+1)$ переменных с $\operatorname{rang}\Phi = 2$.

Двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств появились в теории физических структур, разработанной Ю. И. Кулаковым и Г. Г. Михайличенко [3, 4]. Известна полная классификация этих геометрий [1, 2, 5, 6], которая была получена функциональным методом в свое время вторым автором. С точностью до замены координат в многообразиях и преобразованиях функции f, задающей двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств, Г. Г. Михайличенко были найдены ДФС ГДМ ранга $(n+2, 1)$ для $n = 1, 2, 3, 4$, причем им же было установлено, что для $n > 4$ не существует ДФС ГДМ. Стоит также отметить, что методом вложения В. А. Кыровым и Г. Г. Михайличенко в их работе [7] была получена классификация ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$. Исследования по изучению геометрических свойств таких геометрий проводились В. А. Кыровым в работе [8].

2. Постановка задачи и ее решение

Пусть функция $g = (g^1, g^2) = g(x, y;\, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, а функция $f = (f^1, f^2) = f(x', y'; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2})$ задает ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

Определение [5]. ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ вложена в ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$, если выполняется функциональное соотношение

$$f\left(x\prime, y\prime; \eta^1, \dots, \eta^{2n}, \eta^{2n+1}, \eta^{2n+2}\right) = \chi\left(g(x, y; \xi^1, \dots, \xi^{2n}), \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}\right),$$

где χ, $x\prime = \lambda^1(x, y)$, $y\prime = \lambda^2(x, y)$, $\eta^1 = \tau^1(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}), \dots$, $\eta^{2n} = \tau^{2n}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$, $\eta^{2n+1} = \tau^{2n+1}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$, $\eta^{2n+2} = \tau^{2n+2}(\xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2})$ — дифференцируемые функции, причем выполняются неравенства

$$\frac{\partial(x\prime, y\prime)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\eta^1, \dots, \eta^{2n+2})}{\partial(\xi^1, \dots, \xi^{2n+2})} \neq 0.$$

В работе [5] доказано, что в каждую ДФС ГДМ ранга $(n+2,2)$ вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга $(n+1,2)$, где $n=1,2,3$. Установление всех возможных последовательных по рангу взаимных вложений ДФС ГДМ предполагает рассмотрение 23 систем функциональных уравнений. Нахождение общего невырожденного решения одной из таких систем функциональных уравнений представляет собой сложную задачу, как было отмечено В. А. Кыровым и Г. Г. Михайличенко в их работах [9, 10], в которых авторами с применением жордановых форм находятся канонические невырожденные решения одной из таких систем функциональных уравнений, возникающей в задаче о вложении ДФС ГДМ аддитивной, неаддитивной ранга $(2,2)$ в мультипликативную ранга $(3,2)$.

В последующем изложении будем использовать более удобные обозначения для координат и функций.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений аддитивной ДФС ГДМ ранга $(2,2)$ с вектор-функцией

$$g^1 = x+\xi, \quad g^2 = y+\eta$$

в дуальную ДФС ГДМ ранга $(3,2)$ с вектор-функцией

$$f^1 = x\xi+\mu, \quad f^2 = x\eta + y\xi + \nu,$$

которая сводится к нахождению общего невырожденного решения системы двух функциональных уравнений

$$\begin{cases} \overline{x}\overline{\xi} + \overline{\mu} = \chi^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \\ \overline{x}\overline{\eta} + \overline{y}\overline{\xi} + \overline{\nu} = \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu) \end{cases} \tag{1}$$

относительно шести неизвестных функций $\overline{x}=\overline{x}(x,y)$, $\overline{y}=\overline{y}(x,y)$ и $\overline{\xi}=\overline{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\eta}=\overline{\eta}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\mu}=\overline{\mu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\nu}=\overline{\nu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$ от двух переменных x, y и четырех переменных ξ, η, μ, ν. Стоит отметить, что функции χ^1 и χ^2, входящие в систему функциональных уравнений (1), также являются неизвестными.

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно невырожденное решение, удовлетворяющее следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(\overline{x},\overline{y})}{\partial(x,y)} \neq 0, \qquad \frac{\partial(\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{\mu},\overline{\nu})}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu)} \neq 0. \tag{2}$$

При вложении допускаются обратимые замены локальных координат $(x;y)\mapsto(\overline{x};\overline{y})$, $(\xi;\eta;\mu;\nu)\mapsto(\overline{\xi};\overline{\eta};\overline{\mu};\overline{\nu})$ в двумерном и четырехмерном многообразиях, на которых метрическая функция задает ДФС ГДМ ранга $(3,2)$, а также ее масштабное преобразование $\chi(f)\to f$. Заметим, что компоненты χ^1 и χ^2 этого преобразования по решению системы (1) и ее уравнениям определяются однозначно.

Теорема. *Общее невырожденное решение системы* (1) *определяется строением его первой функции* $\overline{x}=\overline{x}(x,y)$*:*

1. *Общее экспоненциальное невырожденное решение*

$$\begin{cases} \overline{x} = h\exp(ax+by)+g, \\ \overline{y} = (h(cx+\gamma y)+\beta)\exp(ax+by)+\alpha, \\ \overline{\xi} = \overline{\xi}(\mu,\nu)\exp(a\xi+b\eta), \\ \overline{\eta} = (\overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi+\gamma\eta)+\overline{\eta}(\mu,\nu))\exp(a\xi+b\eta), \\ \overline{\mu} = -g\overline{\xi}(\mu,\nu)\exp(a\xi+b\eta)+\overline{\mu}(\mu,\nu), \\ \overline{\nu} = -(\overline{\xi}(\mu,\nu)(g(c\xi+\gamma\eta)+\alpha)+g\overline{\eta}(\mu,\nu))\exp(a\xi+b\eta)+\overline{\nu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{3}$$

где $h \neq 0$, $a\gamma - bc \neq 0$, $\partial(\overline{\mu}(\mu,\nu),\overline{\nu}(\mu,\nu))/\partial(\mu,\nu) \neq 0$, *причем* $\chi^1 = h\overline{\xi}(\mu,\nu)\exp(a(x+\xi) + b(y+\eta) + \overline{\mu}(\mu,\nu))$, $\chi^2 = (\overline{\xi}(\mu,\nu)(h(c(x+\xi)+\gamma(y+\eta)) + \beta) + h\overline{\eta}(\mu,\nu))\exp(a(x+\xi) + b(y+\eta) + \overline{\nu}(\mu,\nu))$;

2. *Общее линейное невырожденное решение*

$$\begin{cases} \overline{x} = ax + by + g, \\ \overline{y} = \frac{acx^2}{2} + bcxy + \frac{b\gamma y^2}{2} + (h+gc)x + (\beta + g\gamma)y + \alpha, \\ \overline{\xi} = \overline{\xi}(\mu,\nu), \\ \overline{\eta} = \overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi + \gamma\eta) + \overline{\eta}(\mu,\nu), \\ \overline{\mu} = \overline{\xi}(\mu,\nu)(a\xi + b\eta) + \overline{\mu}(\mu,\nu), \\ \overline{\nu} = \overline{\xi}(\mu,\nu)\left(\frac{ac\xi^2}{2} + bc\xi\eta + \frac{b\gamma\eta^2}{2} + h\xi + \beta\eta\right) + \overline{\eta}(\mu,\nu)(a\xi + b\eta) + \overline{\nu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{4}$$

где $a\gamma - bc = 0$, $a\beta - bh \neq 0$, $(a\beta - bh)\partial(\overline{\xi}(\mu,\nu),\overline{\eta}(\mu,\nu))/\partial(\mu,\nu) - (\beta c - h\gamma)\partial(\overline{\xi}(\mu,\nu), \overline{\mu}(\mu,\nu))/\partial(\mu,\nu) \neq 0$, *причем* $\chi^1 = \overline{\xi}(\mu,\nu)(a(x+\xi) + b(y+\eta) + g) + \overline{\mu}(\mu,\nu)$, $\chi^2 = \overline{\xi}(\mu,\nu)(ac(x+\xi)^2/2 + (x+\xi)(y+\eta) + \beta\gamma(y+\eta)^2/2 + (h+gc)(x+\xi) + (\beta+g\gamma)(y+\eta) + \alpha) + \overline{\eta}(\mu,\nu)(a(x+\xi) + b(y+\eta)) + \overline{\nu}(\mu,\nu)$.

$\triangleleft$ Приступим к доказательству теоремы. Заметим, что в первое уравнение системы (1) из шести неизвестных функций входят только три, именно: $\overline{x} = \overline{x}(x,y)$, $\overline{\xi} = \overline{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu)$ и $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$. Определив их как его решение и подставив во второе уравнение системы (1), можно будет найти возможные на них ограничения, а также оставшиеся три неизвестные функции $\overline{y} = \overline{y}(x,y)$, $\overline{\eta} = \overline{\eta}(\xi,\eta,\mu,\nu)$ и $\overline{\nu} = \overline{\nu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$. Первое уравнение системы (1) продифференцируем отдельно по переменным x и ξ. Поскольку в его правую часть они входят в виде суммы $x+\xi$, результаты дифференцирования по ним его левой части должны совпадать, откуда следует равенство

$$\overline{x}_x\overline{\xi} = \overline{x}\overline{\xi}_\xi + \overline{\mu}_\xi. \tag{5}$$

По шести независимым переменным x, y и ξ, η, μ, ν равенство (5) является тождеством. Зафиксируем в нем последние четыре переменные ξ, η, μ, ν. Учитывая, что по второму из условий (2) имеем $\overline{\xi} \neq 0$, для функции $\overline{x} = \overline{x}(x,y)$ по переменной x, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\overline{x}_x = a\overline{x} + c. \tag{6}$$

Если $a \neq 0$, то решение уравнения (6) будет экспоненциальным:

$$\overline{x} = \overline{x}(y)e^{ax} - c/a, \tag{7}$$

причем по первому из условий (2) $\overline{x}(y) \neq 0$.

Если же $a = 0$, но $c \neq 0$, то решение будет линейным:

$$\overline{x} = cx + \overline{x}(y). \tag{8}$$

Если же, наконец, $a = 0$ и $c = 0$, то решение уравнения (6) от переменной x зависеть не будет:

$$\overline{x} = \overline{x}(y), \tag{9}$$

причем по первому из условий (2) $\overline{x}'(y) \neq 0$, т. е. $\overline{x}(y) \neq \mathrm{const}$. В дифференциальное равенство (5) подставим сначала экспоненциальное решение (7):

$$a\overline{x}(y)e^{ax}\overline{\xi} = (\overline{x}(y)e^{ax} - c/a)\overline{\xi}_\xi + \overline{\mu}_\xi,$$

откуда для функций $\overline{\xi}$ и $\overline{\mu}$ получаем систему уравнений $\overline{\xi}_\xi = a\overline{\xi}$, $\overline{\mu}_\xi = c\overline{\xi}$ со следующим решением:

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}, \quad \overline{\mu} = c\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a\xi}/a + \overline{\mu}(\eta, \mu, \nu), \tag{10}$$

где, очевидно, $\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu) \neq 0$.

Выражения (7), (10) для функций $\overline{x}$, $\overline{\xi}$, $\overline{\mu}$ подставим в первое уравнение системы (1)

$$\overline{x}(y)\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} + \overline{\mu}(\eta, \mu, \nu) = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu).$$

Производные его левой части по переменным y и η совпадают, поскольку в его правую часть они входят в виде суммы $y + \eta$, откуда следует равенство

$$\overline{x}'(y)\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} = \overline{x}(y)\overline{\xi}_\eta(\eta, \mu, \nu)e^{a(x+\xi)} + \overline{\mu_\eta}(\eta, \mu, \nu),$$

а из него затем система уравнений $\overline{x}'(y) = b\overline{x}(y)$, $\overline{\xi}_\eta(\eta, \mu, \nu) = b\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)$, $\overline{\mu}_\eta(\eta, \mu, \nu) = 0$ для функций $\overline{x}(y)$, $\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)$, $\overline{\mu}(\eta, \mu, \nu)$ со следующим решением:

$$\overline{x}(y) = he^{by}, \quad \overline{\xi}(\eta, \mu, \nu) = \overline{\xi}(\mu, \nu)e^{b\eta}, \quad \overline{\mu}(\eta, \mu, \nu) = \overline{\mu}(\mu, \nu). \tag{11}$$

Соединяя выражения (7), (10) с решением (11), получим экспоненциальное решение первого уравнения системы (1)

$$\begin{cases} \overline{x} = he^{ax+by} - c/a, \\ \overline{\xi} = \overline{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}, \\ \overline{\mu} = c\overline{\xi}(\mu, \nu)e^{a\xi+b\eta}/a + \overline{\mu}(\mu, \nu) \end{cases} \tag{12}$$

с явной зависимостью функции $\overline{x}$ от переменной x, поскольку $a \neq 0$, в котором, очевидно, $h \neq 0$ и $\overline{\xi}(\mu, \nu) \neq 0$.

Подставим теперь в дифференциальное равенство (5) линейное решение (8)

$$c\overline{\xi} = (cx + \overline{x}(y))\overline{\xi}_\xi + \overline{\mu}_\xi,$$

откуда получаем для функций $\overline{\xi}$ и $\overline{\mu}$ систему уравнений $\overline{\xi}_\xi = 0$, $\overline{\mu}_\xi = c\overline{\xi}$ со следующим решением:

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}(\eta, \mu, \nu), \quad \overline{\mu} = c\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)\xi + \overline{\mu}(\eta, \mu, \nu), \tag{13}$$

где $\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu) \neq 0$.

Выражения (8) и (13) для функций $\overline{x}$, $\overline{\xi}$, $\overline{\mu}$ подставим в первое уравнение системы (1)

$$(c(x + \xi) + \overline{x}(y))\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu) + \overline{\mu}(\eta, \mu, \nu) = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu).$$

Производные его левой части по переменным y и η, очевидно, совпадают:

$$\overline{x}'(y)\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu) = (c(x + \xi) + \overline{x}(y))\overline{\xi}_\eta(\eta, \mu, \nu) + \overline{\mu}_\eta(\eta, \mu, \nu),$$

откуда для функций $\overline{x}(y)$, $\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)$, $\overline{\mu}(\eta, \mu, \nu)$ получаем систему уравнений $\overline{x}'(y) = d$, $\overline{\xi}_\eta(\eta, \mu, \nu) = 0$, $\overline{\mu}_\eta(\eta, \mu, \nu) = d\overline{\xi}(\eta, \mu, \nu)$ со следующим решением:

$$\overline{x}(y) = dy + g, \quad \overline{\xi}(\eta, \mu, \nu) = \overline{\xi}(\mu, \nu), \quad \overline{\mu}(\eta, \mu, \nu) = d\overline{\xi}(\mu, \nu)\eta + \overline{\mu}(\mu, \nu). \tag{14}$$

Соединим выражения (8), (13) с решением (14). В результате получим линейное решение первого уравнения системы (1)

$$\begin{cases} \overline{x} = cx + dy + g, \quad \overline{\xi} = \overline{\xi}(\mu, \nu), \\ \overline{\mu} = \overline{\xi}(\mu, \nu)(c\xi + d\eta) + \overline{\mu}(\mu, \nu) \end{cases} \tag{15}$$

с явной зависимостью функции $\overline{x}$ от переменной x, поскольку $c \neq 0$, в котором $\overline{\xi}(\mu,\nu) \neq 0$. В дифференциальное равенство (5) подставим последнее решение (9), в котором отсутствует зависимость от переменной x:

$$\overline{x}(y)\overline{\xi}_\xi + \overline{\mu}_\xi = 0.$$

Поскольку $\overline{x}'(y) \neq 0$, для функций $\overline{\xi}$ и $\overline{\mu}$ отсюда получаем систему уравнений $\overline{\xi}_\xi = 0$, $\overline{\mu}_\xi = 0$ с решением

$$\overline{\xi} = \overline{\xi}(\eta,\mu,\nu), \quad \overline{\mu} = \overline{\mu}(\eta,\mu,\nu), \tag{16}$$

причем $\overline{\xi}(\eta,\mu,\nu) \neq 0$.

Выражения (9), (16) подставим в первое уравнение системы (1)

$$\overline{x}(y)\overline{\xi}(\eta,\mu,\nu) + \overline{\mu}(\eta,\mu,\nu) = \chi^1(x+\xi, y+\eta,\mu,\nu).$$

Производные левой части этого уравнения по переменным y и η, очевидно, совпадают:

$$\overline{x}'(y)\overline{\xi}(\eta,\mu,\nu) = \overline{x}(y)\overline{\xi}_\eta(\eta,\mu,\nu) + \overline{\mu}_\eta(\eta,\mu,\nu),$$

откуда для функций $\overline{x}(y)$, $\overline{\xi}(\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\mu}(\eta,\mu,\nu)$ получаем систему уравнений $\overline{x}'(y) = p\overline{x}(y) + q$, $\overline{\xi}_\eta(\eta,\mu,\nu) = p\overline{\xi}(\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\mu}_\eta(\eta,\mu,\nu) = q\overline{\xi}(\eta,\mu,\nu)$ со следующими двумя решениями:

$$\begin{cases} \overline{x}(y) = re^{py} - q/p, \\ \overline{\xi}(\eta,\mu,\nu) = \overline{\xi}(\mu,\nu)e^{p\eta}, \\ \overline{\mu}(\eta,\mu,\nu) = q\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{p\eta}/p + \overline{\mu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{17}$$

если $p \neq 0$, причем $r \neq 0$, $\overline{\xi}(\mu,\nu) \neq 0$, и

$$\begin{cases} \overline{x}(y) = qy + s, \\ \overline{\xi}(\eta,\mu,\nu) = \overline{\xi}(\mu,\nu), \\ \overline{\mu}(\eta,\mu,\nu) = q\overline{\xi}(\mu,\nu)\eta + \overline{\mu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{18}$$

если $p = 0$, причем $q \neq 0$, $\overline{\xi}(\mu,\nu) \neq 0$.

Соединяя выражения (9), (16) и (17), получим экспоненциальное решение системы (1), в котором функция $\overline{x}$ не зависит от переменной x:

$$\begin{cases} \overline{x} = re^{py} - q/p, \\ \overline{\xi} = \overline{\xi}(\mu,\nu)e^{p\eta}, \\ \overline{\mu} = q\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{p\eta}/p + \overline{\mu}(\mu,\nu). \end{cases} \tag{19}$$

Решение (19) можно включить в решение (12), если допустить в нем более общее ограничение $a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда при $a = 0$ должно быть $b \neq 0$. Вводя в решениях (12) и (19) единое обозначение констант и минимизируя их число, общее экспоненциальное решение первого уравнения системы (1), не противоречащее условиям (2), можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \overline{x}(y) = he^{ax+by} + g, \\ \overline{\xi}(\eta,\mu,\nu) = \overline{\xi}(\mu,\nu)e^{ax+b\eta}, \\ \overline{\mu}(\eta,\mu,\nu) = -g\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{a\xi+b\eta} + \overline{\mu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{20}$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, $h \neq 0$, $\overline{\xi}(\mu,\nu) \neq 0$.

Соединяя выражения (9), (16) и (18), получим линейное решение первого уравнения системы (1), в котором функция $\overline{x}$ не зависит от переменной x:

$$\begin{cases} \overline{x} = qy + s, \\ \overline{\xi} = \overline{\xi}(\mu,\nu), \\ \overline{\mu} = q\overline{\xi}(\mu,\nu)\eta + \overline{\mu}(\mu,\nu). \end{cases} \tag{21}$$

Решение (21) можно включить в решение (15) на основаниях, аналогичных объединению решений (19) и (12):

$$\begin{cases} \overline{x} = ax + by + g, \\ \overline{\xi} = \overline{\xi}(\mu,\nu), \\ \overline{\mu} = \overline{\xi}(\mu,\nu)(a\xi + b\eta) + \overline{\mu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{22}$$

где $a^2 + b^2 \neq 0$, $\overline{\xi}(\mu,\nu) \neq 0$.

Заметим, что общее линейное решение (22) первого уравнения системы (1), как и его общее экспоненциальное решение (20), не противоречит условиям (2). В совокупности же эти решения составляют общее решение первого уравнения системы (1). Для того чтобы найти общее невырожденное решение системы (1), необходимо общие решения (20) и (22) ее первого уравнения подставить в ее второе уравнение. Сначала во второе уравнение системы (1) подставим решение (20)

$$(he^{ax+by} + g)\overline{\eta} + \overline{y}\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{a\xi+b\eta} + \overline{\nu} = \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu). \tag{23}$$

Производные левой части уравнения (23) по переменным x и ξ, очевидно, совпадают:

$$ahe^{ax+by}\overline{\eta} + \overline{y}_x\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{a\xi+b\eta} = (he^{ax+by} + g)\overline{\eta}_\xi + a\overline{y}\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{a\xi+b\eta} + \overline{\nu}_\xi.$$

Фиксируя в этом равенстве переменные ξ, η, μ, ν, сначала получим уравнения для функции $\overline{y}$, используя которое затем из того же равенства получаем уравнения для функций $\overline{\eta}$ и $\overline{\nu}$. В итоге имеем систему уравнений $\overline{y}_x - a\overline{y} = che^{ax+by} + d$, $\overline{\eta}_\xi - a\overline{\eta} = c\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{a\xi+b\eta}$, $\overline{\nu}_\xi + g\overline{\eta}_\xi = d\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{a\xi+b\eta}$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \overline{y} = chxe^{ax+by} + \overline{y}(y)e^{ax} - d/a, \\ \overline{\eta} = c\overline{\xi}(\mu,\nu)\xi e^{a\xi+b\eta} + \overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)e^{a\xi}, \\ \overline{\nu} = (-gc\xi + d/a)\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{a\xi+b\eta} - g\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)e^{a\xi} + \overline{\nu}(\eta,\mu,\nu), \end{cases} \tag{24}$$

если $a \neq 0$ и

$$\begin{cases} \overline{y} = (che^{by} + d)x + \overline{y}(y), \\ \overline{\eta} = c\overline{\xi}(\mu,\nu)\xi e^{b\eta} + \overline{\eta}(\eta,\mu,\nu), \\ \overline{\nu} = (-gc + d)\overline{\xi}(\mu,\nu)\xi e^{b\eta} - g\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu) + \overline{\nu}(\eta,\mu,\nu), \end{cases} \tag{25}$$

если $a = 0$, причем $b \neq 0$, так как $a^2 + b^2 \neq 0$.

В уравнение (23), полагая $a \neq 0$, подставим выражения (24):

$$\begin{aligned} &ch\overline{\xi}(\mu,\nu)(x+\xi)e^{a(x+\xi)+b(y+\eta)} + (\overline{y}(y)\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta} \\ &\qquad + h\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} + \overline{\nu}(\eta,\mu,\nu) = \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu). \end{aligned} \tag{26}$$

Производные левой части уравнения (26) по переменным y и η, очевидно, совпадают:

$$(\overline{y}'(y)\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta} + bh\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)e^{by})e^{a(x+\xi)}$$
$$= (b\overline{y}(y)\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta} + h\overline{\eta}_\eta(\eta,\mu,\nu)e^{by})e^{a(x+\xi)} + \overline{\nu}_\eta(\eta,\mu,\nu),$$

откуда для функций $\overline{y}(y)$, $\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\nu}(\eta,\mu,\nu)$ получаем уравнения $\overline{y}'(y) - b\overline{y}(y) = \gamma h e^{by}$, $\overline{\eta}_\eta(\eta,\mu,\nu) - b\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu) = \gamma\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta}$, $\overline{\nu}_\eta(\eta,\mu,\nu) = 0$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \overline{y}(y) = \gamma h y e^{by} + \beta e^{by}, \\ \overline{\eta}(\eta,\mu,\nu) = \gamma\overline{\xi}(\mu,\nu)\eta e^{b\eta} + \overline{\eta}(\mu,\nu)e^{b\eta}, \\ \overline{\nu}(\eta,\mu,\nu) = \overline{\nu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{27}$$

которые являются также и решениями функционального уравнения (26).

Объединяя выражения (24) и (27), получим решения исходного функционального уравнения (23) для случая $a \neq 0$

$$\begin{cases} \overline{y} = (h(cx+\gamma y) + \beta)e^{ax+by} - d/a, \\ \overline{\eta} = (\overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi+\gamma\eta) + \overline{\eta}(\mu,\nu))e^{a\xi+b\eta}, \\ \overline{\nu} = (-g\overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi+\gamma\eta) + d\overline{\xi}(\mu,\nu)/a - g\overline{\eta}(\mu,\nu))e^{a\xi+b\eta} + \overline{\nu}(\mu,\nu). \end{cases} \tag{28}$$

В уравнение (23) с $a = 0$ подставим выражения (25):

$$\begin{gathered} hc\overline{\xi}(\mu,\nu)(x+\xi)e^{b(y+\eta)} + h\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)e^{by} + d\overline{\xi}(\mu,\nu)(x+\xi)e^{b\eta} \\ + \overline{y}(y)\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta} + \overline{\nu}(\eta,\mu,\nu) = \chi^2(x+\xi, y+\eta,\mu,\nu). \end{gathered} \tag{29}$$

Производные левой части уравнения (29) по переменным y и η, очевидно, совпадают:

$$hb\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)e^{by} + \overline{y}'(y)\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta}$$
$$= h\overline{\eta}_\eta(\eta,\mu,\nu)e^{by} + bd\overline{\xi}(\mu,\nu)(x+\xi)e^{b\eta} + b\overline{y}(y)\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta} + \overline{\nu}_\eta(\eta,\mu,\nu),$$

откуда выводим, что $d = 0$, так как $b \neq 0$, $\overline{\xi}(\mu,\nu) \neq 0$, и для функций $\overline{y}(y)$, $\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\nu}(\eta,\mu,\nu)$ получаем уравнения $\overline{y}'(y) - b\overline{y}(y) = \gamma h e^{by} + \alpha$, $\overline{\eta}_\eta(\eta,\mu,\nu) - b\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu) = \gamma\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta}$, $\overline{\nu}_\eta(\eta,\mu,\nu) = \alpha\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta}$ со следующими решениями:

$$\begin{cases} \overline{y}(y) = \gamma h y e^{by} + \beta e^{by} - \alpha/b, \\ \overline{\eta}(\eta,\mu,\nu) = \gamma\overline{\xi}(\mu,\nu)\eta e^{b\eta} + \overline{\eta}(\mu,\nu)e^{b\eta}, \\ \overline{\nu}(\eta,\mu,\nu) = \alpha\overline{\xi}(\mu,\nu)e^{b\eta}/b + \overline{\nu}(\mu,\nu), \end{cases} \tag{30}$$

которые удовлетворяют также и уравнению (29) с $d = 0$. Соединяя выражения (30) с выражениями (25), в которых должно быть $d = 0$, получаем решение уравнения (23) при $a = 0$

$$\begin{cases} \overline{y} = (h(cx+\gamma y) + \beta)e^{by} - \alpha/b, \\ \overline{\eta} = (\overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi+\gamma\eta) + \overline{\eta}(\mu,\nu))e^{b\eta}, \\ \overline{\nu} = (-g\overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi+\gamma\eta) + \alpha\overline{\xi}(\mu,\nu)/b - g\overline{\eta}(\mu,\nu))e^{b\eta} + \overline{\nu}(\mu,\nu). \end{cases} \tag{31}$$

Решение (31) можно включить в решение (28), введя единое ограничение $a^2+b^2\neq 0$ и переобозначения $d\to -\alpha a$, $\alpha/b\to -\alpha$,

$$\begin{cases}\overline{y}=((h(cx+\gamma y)+\beta)+\beta)e^{ax+by}+\alpha,\\ \overline{\eta}=(\overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi+\gamma\eta)+\overline{\eta}(\mu,\nu))e^{a\xi+b\eta},\\ \overline{\nu}=-(\overline{\xi}(\mu,\nu)(g(c\xi+\gamma\eta)+\alpha)+g\overline{\eta}(\mu,\nu))e^{a\xi+b\eta}+\overline{\nu}(\mu,\nu).\end{cases}\tag{32}$$

Соединяя общие решения (20) и (32) первого и второго уравнений системы (1), получим ее общее экспоненциальное решение (3). Дополнительные ограничения в нем ($a\gamma-bc\neq 0$, $\partial(\overline{\mu}(\mu,\nu))/\partial(\mu,\nu)\neq 0$) определяются условиями (2) его невырожденности, а компоненты χ^1 и χ^2 масштабной функции χ находятся его подстановкой в соответствующие функциональные уравнения системы (1).

Подставим теперь во второе уравнение системы (1) общее решение (22) ее первого уравнения:

$$(ax+by+g)\overline{\eta}+\overline{y}\overline{\xi}(\mu,\nu)+\overline{\nu}=\chi^2(x+\xi,y+\eta,\mu,\nu).\tag{33}$$

Производные левой части уравнения (33) по переменным x и ξ, очевидно, совпадают:

$$a\overline{\eta}+\overline{y}_x\overline{\xi}(\mu,\nu)=(ax+by+g)\overline{\eta}_\xi+\overline{\nu}_\xi,$$

откуда для функций $\overline{y}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\nu}$ получаем систему уравнений $\overline{y}_x=c(ax+by+g)+h$, $\overline{\eta}_\xi=c\overline{\xi}(\mu,\nu)$, $\overline{\nu}_\xi=a\overline{\eta}+h\overline{\xi}(\mu,\nu)$ со следующим решением:

$$\begin{cases}\overline{y}=acx^2/2+bcxy+(gc+h)x+\overline{y}(y),\\ \overline{\eta}=c\overline{\xi}(\mu,\nu)\xi+\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu),\\ \overline{\nu}=ac\overline{\xi}(\mu,\nu)\xi^2/2+(h\overline{\xi}(\mu,\nu)+a\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu))\xi+\overline{\nu}(\eta,\mu,\nu),\end{cases}\tag{34}$$

которое подставим в исходное уравнение (33)

$$\begin{gathered}ac\overline{\xi}(\mu,\nu)(x+\xi)^2/2+(\overline{\xi}(\mu,\nu)(bcy+gc+h)+a\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu))(x+\xi)\\ +(by+g)\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)+\overline{\xi}(\mu,\nu)\overline{y}(y)+\overline{\nu}(\eta,\mu,\nu)=\chi^2(x+\xi,y+\eta,\mu,\nu).\end{gathered}\tag{35}$$

Производные левой части уравнения (35) по переменным y и η, очевидно, совпадают:

$$bc\overline{\xi}(\mu,\nu)(x+\xi)+b\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)+\overline{\xi}(\mu,\nu)\overline{y}'(y)=a\overline{\eta}_\eta(\eta,\mu,\nu)(x+\xi)+(by+g)\overline{\eta}_\eta(\eta,\mu,\nu)+\overline{\nu}_\eta(\eta,\mu,\nu),$$

откуда для функций $\overline{y}(y)$, $\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)$, $\overline{\nu}(\eta,\mu,\nu)$ получаем систему уравнений $\overline{y}'(y)=\gamma(by+g)+\beta$, $\overline{\eta}_\eta(\eta,\mu,\nu)=\gamma\overline{\xi}(\mu,\nu)$, $\overline{\nu}_\eta(\eta,\mu,\nu)=\beta\overline{\xi}(\mu,\nu)+b\overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)$ со следующим решением:

$$\begin{cases}\overline{y}(y)=b\gamma y^2/2+(b+g\gamma)y+\alpha,\\ \overline{\eta}(\eta,\mu,\nu)=\gamma\overline{\xi}(\mu,\nu)\eta+\overline{\eta}(\mu,\nu),\\ \overline{\nu}(\eta,\mu,\nu)=\overline{\xi}(\mu,\nu)(b\gamma\eta^2/2+\beta\eta)+b\overline{\eta}(\mu,\nu)\eta+\overline{\nu}(\mu,\nu),\end{cases}\tag{36}$$

в котором имеет место связь констант

$$a\gamma-bc=0.\tag{37}$$

Выражения (34) дополним выражениями из решения (36):

$$\begin{cases}\overline{y}=acx^2/2+bcxy+b\gamma y^2/2+(h+gc)x+(\beta+g\gamma)y+\alpha,\\ \overline{\eta}=\overline{\xi}(\mu,\nu)(c\xi+\gamma\eta)+\overline{\eta}(\mu,\nu),\\ \overline{\nu}=\overline{\xi}(\mu,\nu)(ac\xi^2/2+bc\xi\eta+b\gamma\eta^2/2+h\xi+\beta\eta)+\overline{\eta}(\mu,\nu)(a\xi+b\eta)+\overline{\nu}(\mu,\nu).\end{cases}\tag{38}$$

В совокупности общие решения (22) и (38) первого и второго уравнений системы (1) представляют собой ее общее линейное решение (4). Дополнительные к связи (37) ограничения в нем (в частности, $a\beta - bh \neq 0$) вытекают из условий (2) его невырожденности, а компоненты масштабной функции $\chi = (\chi^1, \chi^2)$ находятся его подстановкой в каждое из уравнений системы (1), что и завершает доказательство теоремы. $\rhd$

3. Заключение

Поставленная выше задача полностью решена. Найдено общее невырожденное решение системы функциональных уравнений (1), которое можно записать в компактной форме, используя замену координат x, y, ξ, η и функций $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$. Из этих форм выпишем явно только краткие выражения для функций $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

Экспоненциальное решение

$$\overline{x} = e^x, \quad \overline{y} = ye^x$$

получается при следующей замене: $ax + by \to x$, $cx + \gamma y + \beta/h \to y$, $(\overline{x} - g)/h \to \overline{x}$, $(\overline{y} - \alpha)/h \to \overline{y}$.

Линейное решение

$$\overline{x} = x, \quad \overline{y} = \delta x^2 + \overline{y}$$

получается при следующей замене: $ax+by+g \to x$, $hx+\beta y+\alpha \to y$, $\overline{x} \to \overline{x}$, $\overline{y}+\delta g^2 \to \overline{y}$, где коэффициент δ отражает связь векторов (c, γ) и (a, b) по формуле $cx + \gamma y = 2\delta(ax + by)$.

Литература

1. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур.—Барнаул: Барн. гос. пед. ун-т, 2003.—203 с.
2. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические феноменологические структуры ранга $(n+1, 2)$ // Сиб. матем. журн.—1993.—Т. 34, № 3.—С. 132–143.
3. *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. матем. журн.—1971.—Т. 12, № 5.—С. 1142–1145.
4. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР.—1972.—Т. 206, № 5.—С. 1056–1058.
5. *Кыров В. А.* О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.—2018.—№ 56.—С. 5–16. DOI: 10.17223/19988621/56/1.
6. *Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г., Мурадов Р. М.* Последовательное по рангу $(n+1, 2)$ вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств // Изв. вузов. Матем.—2020.—№ 6.—С. 9–14. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-6-9-14.
7. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2, 2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(3, 2)$ // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2018.—Т. 28, № 1.—С. 305–327. DOI: 10.20537/vm180304.
8. *Кыров В. А.* Двуметрические пространства // Изв. вузов. Матем.—2005.—№ 8.—С. 27–38.
9. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений // Изв. вузов. Матем.—2021.—№ 8.—С. 46–55. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-8-46-55.
10. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения некоторой системы функциональных уравнений // Владикавк. матем. журн.—2022.—Т. 24, № 1.—С. 44–53. DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.

Статья поступила 28 июня 2023 г.

Богданова Рада Александровна
Горно-Алтайский государственный университет,
доцент кафедры математики, физики и информатики
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск, ул. Ленина, 1
E-mail: bog-rada@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-1306-6426

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 56–67

GENERAL NONDEGENERATE SOLUTION OF A SYSTEM OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Bogdanova, R. A.[1] and Mikhailichenko, G. G.

[1] Corno-Altaisk State University,
1 Lenin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia
E-mail: bog-rada@yandex.ru

Abstract. Systems of functional equations of the form $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}, \bar{\nu}) = \chi(g(x, y, \xi, \eta), \mu, \nu)$ with six unknown functions $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ arise when establishing the mutual embedding of two-metric phenomenologically symmetric geometries of two sets (TPhS GTS). When establishing an embedding of an additive TPhS GTS of rank $(2,2)$ with a known vector function $g(x, y, \xi, \eta) = (g^1, g^1) = (x + \xi, y + \eta)$ into a dual GDM DFS of rank $(3,2)$ with a known vector function $f(x, y, \xi, \eta, \mu, \nu) = (f^1, f^2) = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu)$ the explicit form of the system of two functional equations is as follows: $\overline{x}\overline{\xi} + \overline{\mu} = \chi^1(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu)$, $\overline{x}\overline{\eta} + \overline{y}\overline{\xi} + \overline{\nu} = \chi^2(x + \xi, y + \eta, \mu, \nu)$. This system of two functional equations is solvable because the expressions for the vector functions g and f in the system are known. To find a general nondegenerate solution to a given system of functional equations, it is necessary to develop a solving method, which is an interesting and meaningful mathematical problem. The basis of the method is the differentiation of one of the functional equations included in the system, followed by the transition to differential equations. Further, the solutions of the differential equations are substituted into the second functional equation of the original system of functional equations, from which, under appropriate restrictions, its general nondegenerate solution is found. This method can be developed and applied to other systems of functional equations of the same type that arise in the framework of the TPhS GTS embedding problem in order to find their general nondegenerate solution.

Keywords: geometry of two sets, sequential in rank embedding, system of functional equations, general nondegenerate solution of a system of functional equations, system of differential equations.

AMS Subject Classification: 51K99, 34K99.

For citation: *Bogdanova, R. A. and Mikhailichenko, G. G.* General Nondegenerate Solution of a System of Functional Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 56–67 (in Russian). DOI: 10.46698/a1434-0819-2118-p.

References

1. *Mikhailichenko, G. G.* Gruppovaya Simmetriya Fizicheskih Struktur [Group Symmetry of Physical Structures], Barnaul, BGPU, 2003, 203 p. (in Russian).
2. *Mikhailichenko, G. G.* Dimetric Physical Structures of Rank $(n+1,2)$, *Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, no. 3, pp. 513–522. DOI: 10.1007/BF00971227.
3. *Kulakov, Yu. I.* A Mathematical Formulation of the Theory of Physical Structures, *Siberian Mathematical Journal*, 1971, vol. 12, no. 5, pp. 822–824. DOI: 10.1007/BF00966522.
4. *Mikhailichenko, G. G.* The Solution of Functional Equations in the Theory of Physical Structures, *Doklady Akademii Nauk*, 1972, vol. 206, no. 5, pp. 1056–1058 (in Russian).

5. *Kyrov, V. A.* On the Embedding of Two-Dimetric Phenomenologically Symmetric Geometries, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2018, no. 56, pp. 5–16 (in Russian). DOI 10.17223/19988621/56/1.
6. *Bogdanova, R. A., Mikhailichenko, G. G. and Muradov, R. M.* Successive in Rank $(n+1,2)$ Embedding of Dimetric Phenomenologically Symmetric Geometries of Two Sets, *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2020, no. 64, pp. 6–10. DOI: 10.3103/S1066369X2006002X.
7. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Embedding of the Additive Two-Metric Phenomenologically Symmetric Geometry of Two Sets of Rank $(2,2)$ into the Two-Metric Phenomenologically Symmetric Geometries of Two Sets of Rank $(3,2)$, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki*, 2018, vol. 28, no. 3, pp. 305–327 (in Russian). DOI: 10.20537/vm180304.
8. *Kyrov, V. A.* Two-Metric Spaces, *Russian Mathematics*, 2005, vol. 49, no. 5, pp. 25–35.
9. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Nondegenerate Canonical Solutions of one System of Functional Equations, *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 8, pp. 40–48. DOI: 10.3103/S1066369X21080053.
10. *Kyrov, V. A. and Mikhailichenko, G. G.* Nondegenerate Canonical Solutions of a Certain System of Functional Equations, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 44–53 (in Russian). DOI: 10.46698/u7680-5193-0172-d.

Received June 28, 2023

Rada A. Bogdanova
Gorno-Altaisk State University,
1 Lenin St., Gorno-Altaisk 649000, Russia,
Associate Professor
E-mail: `bog-rada@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-1306-6426