

УДК 539.3

DOI 10.46698/x5277-2885-8052-p

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО СЛОЯ[#]

А. О. Ватульян^{1,2}, С. А. Нестеров²

¹ Южный федеральный университет,

Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

² Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,

Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватулина, 53

E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

Аннотация. Приведена постановка обратной задачи по идентификации переменных материальных характеристик поперечно неоднородного термоэлектроупругого слоя, нижняя грань которого жестко закреплена, закорочена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней неэлектродированной грани приложена нестационарная нагрузка. С помощью преобразования Фурье двумерная обратная задача сведена к ряду одномерных задач, аналогичных задачам для упругого и термоупругого стержня с модифицированными характеристиками. Предложен поэтапный подход по идентификации материальных характеристик слоя. Обезразмеренные прямые задачи после применения преобразования Лапласа решаются на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода и обращении трансформант на основе теории вычетов. Методом линеаризации получены операторные уравнения 1-го рода для решения обратных задач на каждом этапе. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции материальных характеристик термоэлектроупругого слоя, как при отсутствии зашумления входной информации, так и при 1%-м шуме. Выявлены эффективные для идентификации временные отрезки съема дополнительной информации. Проведен анализ результатов идентификации термомеханических характеристик слоя.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача термоэлектроупругости, функционально-градиентный пироматериал, слой, идентификация, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

AMS Subject Classification: 74B05, 80A20, 80A23.

Образец цитирования: Ватульян А. О., Нестеров С. А. Обратная задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Владикавк. матем. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 68–84. DOI: 10.46698/x5277-2885-8052-p.

1. Введение

В конструкциях, изготовленных из пироматериалов, например, в бесконтактных термометрах при нестационарном тепловом воздействии возникают температурные деформации, что приводит к образованию в поляризованной среде электрического поля [1]. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в этих конструкции с учетом взаимного влияния механического, теплового и электрического полей применяется теория термоэлектроупругости [2, 3], основные положения которой были разработаны в работах Миндлина [4, 5].

[#] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>.

© 2024 Ватульян А. О., Нестеров С. А.

Для однородных и слоистых пироматериалов динамические задачи термоэлектроупругости достаточно хорошо изучены [6–11]. Так, в [6] рассмотрено распространение плоских волн в неограниченной термоэлектроупругой среде, в [7] — тепловой удар по однородному термоэлектроупругому слою.

В настоящее время широко стали применяться функционально-градиентные пироматериалы (ФГПМ) [12] — композиты, обладающие переменными физическими свойствами. В ФГПМ благодаря плавному изменению термомеханических характеристик удается избежать концентрации напряжений в окрестности сопряжения слоев, присущей слоистым материалам.

Исследованию задач термоэлектроупругости для неоднородных плоских тел и полупространства посвящено достаточное большое количество работ [12–16]. При этом основная цель исследований — получение аналитических решений в случае степенных и экспоненциальных законов неоднородности. Однако фактические законы изменения термомеханических характеристик могут сильно отличаться от расчетных при изготовлении. Поэтому важной проблемой является разработка эффективных численных методов решения задач термоэлектроупругости при произвольных законах неоднородности. Если законы неоднородности произвольны, то для решения задач термоэлектроупругости применяются численные методы, например, метод сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 2-го рода [15].

Точность решения прямой задачи термоэлектроупругости для ФГПМ зависит от знания законов неоднородности. Однако в силу переменности характеристик они не могут быть определены из простых макроэкспериментов. Поэтому требуется создание эффективных методов идентификации переменных характеристик пироматериалов на основе аппарата коэффициентных обратных задач (КОЗ) термоэлектроупругости. При этом КОЗ термоэлектроупругости решены только для стержневых структур [17–19]. В то же время обратные задачи теории упругости и термоупругости достаточно хорошо исследованы для одномерных [19–21] и двумерных областей [22–27].

Для анизотропных материалов основные методы идентификации механических характеристик неоднородного полупространства изложены в монографии [28]. В [22] обратная задача о реконструкции модуля сдвига упругой прямоугольной области, зависящего от обеих координат, исследуется на базе операторного метода Ньютона и сводится к итеративной процедуре решения последовательности интегральных уравнений. В [23] исследована обратная задача теории упругости для ортотропного слоя. Решение двумерной обратной задачи сводится к последовательной идентификации механических характеристик из решения одномерных обратных задач для усредненных полей смещений и их моментов. В [24] исследуется КОЗ термоупругости для однородной изотропной пластинки в режиме установившихся колебаний. Благодаря специальным граничным условиям и геометрии удается свести задачу к одномерной. При некотором условии на частоту колебаний построено разрешающее уравнение для нахождения коэффициента температурных напряжений. В [25] термомеханические характеристики трехслойной пластины находятся путем сведения КОЗ термоупругости к экстремальной постановке и минимизации функционала невязки градиентным методом. В [26, 27] исследованы КОЗ термоупругости для поперечно-неоднородного изотропного слоя. Идентификация характеристик изотропного термоупругого слоя строится на основе итерационного процесса для усредненных характеристик, на каждом этапе которого для нахождения поправок решается ИУФ 1-го рода.

В данной работе на основе подхода, изложенного в [19, 23], исследована обратная задача по идентификации материальных характеристик поперечно неоднородного термо-

электроупругого слоя. Предложен трехэтапный подход по идентификации материальных характеристик путем последовательного решения ряда одномерных задач, аналогичных задачам для упругого и термоупругого стержня с модифицированными характеристиками. Прямые задачи на каждом этапе решаются на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Получены операторные уравнения для решения обратных задач на каждом этапе. Даны рекомендации по вычислительным аспектам решения прямых и обратных на каждом этапе. Проведен анализ результатов реконструкции термомеханических характеристик слоя.

2. Постановка коэффициентной обратной задачи для термоэлектроупругого слоя

Рассмотрим неустановившиеся колебания неоднородного по толщине термоэлектроупругого слоя ($x_1 \in (-\infty, \infty)$, $x_2 \in (-\infty, \infty)$, $x_3 \in [0, h]$), нижняя грань которого $x_3 = 0$ жестко закреплена, закорочена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней неэлектропроводной грани $x_3 = h$ приложена нестационарная нагрузка: 1) $-k_3\theta_{,3}(x_1, h, t) = q$, $\sigma_{13}(x_1, h, t) = \sigma_{33}(x_1, h, t) = 0$; 2) $\theta_{,3}(x_1, h, t) = 0$, $\sigma_{13}(x_1, h, t) = p_1$, $\sigma_{33}(x_1, h, t) = 0$; 3) $\theta_{,3}(x_1, h, t) = 0$, $\sigma_{13}(x_1, h, t) = 0$, $\sigma_{33}(x_1, h, t) = p_3$.

Математическая постановка задачи связанной термоэлектроупругости состоит из дифференциальных уравнений движения, электростатики и теплопроводности, граничных и начальных условий.

При тепловом способе нагружения постановка задачи термоэлектроупругости для слоя описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k_3 \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) = c_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial t} + T_0 \gamma_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} - T_0 g_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial t}, \quad (3)$$

$$u_1(x_1, 0, t) = u_3(x_1, 0, t) = \theta(x_1, 0, t) = \varphi(x_1, 0, t) = 0, \quad (4)$$

$$-k_3 \theta_{,3}(x_1, h, t) = q, \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = \sigma_{33}(x_1, h, t) = 0, \quad D_3(x_1, h, t) = 0, \quad (5)$$

$$\theta(x_1, x_3, 0) = u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_1(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_3(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (6)$$

Здесь ρ — плотность, c_ε — удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации, c_{11} , c_{13} , c_{33} , c_{44} — компоненты тензора упругих модулей, k_1 , k_3 — компоненты тензора теплопроводности, γ_1 , γ_3 — компоненты тензора коэффициентов температурных напряжений, e_{31} , e_{15} , e_{33} — компоненты тензора пьезомодулей, ϵ_1 , ϵ_3 — компоненты тензора диэлектрической проницаемости, g_3 — компонента вектора пьезокоэффициентов, q — плотность теплового потока, θ — приращение температуры тела от естественного состояния с температурой T_0 , φ — электрический потенциал, u_i — компоненты вектора перемещения, $\sigma_{11} = c_{11}u_{1,1} + c_{13}u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3} - \gamma_1\theta$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = c_{44}(u_{1,3} + u_{3,1}) + e_{15}\varphi_{,1}$, $\sigma_{33} = c_{13}u_{1,1} + c_{33}u_{3,3} + e_{33}\varphi_{,3} - \gamma_3\theta$ — компоненты тензора напряжений, $D_1 = e_{15}(u_{1,3} + u_{3,1}) - \epsilon_1\varphi_{,1}$, $D_3 = e_{33}u_{3,3} + e_{13}u_{1,1} - \epsilon_3\varphi_{,3} + g_3\theta$ — компоненты вектора электрической индукции, p_i — компоненты вектора механической нагрузки.

Обратная задача термоэлектроупругости для слоя при тепловом способе нагружения состоит в нахождении термомеханических характеристик из (1)–(6) по информации о температуре, измеренной на верхней границе слоя $x_3 = h$:

$$\theta(x_1, h, t) = f(x_1, t), \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (7)$$

В случае действия на верхней грани слоя нормальной механической нагрузки в постановке задачи (1)–(6) изменятся граничные условия (5), которые примут вид:

$$\theta_{,3}(x_1, h, t) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = 0, \quad \sigma_{33}(x_1, h, t) = p_3, \quad D_3(x_1, h, t) = 0. \quad (8)$$

В этом случае при решении обратной задачи термоэлектроупругости в качестве дополнительной информации выступают компоненты перемещений, измеренные на верхней границе слоя $x_3 = h$,

$$u_i(x_1, h, t) = g_i(x_1, t), \quad i = 1, 3, \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (9)$$

3. Упрощенные постановки обратной задачи термоэлектроупругости для слоя

Основываясь на подходе, изложенном в [23], двумерную обратную задачу (1)–(9) можно значительно упростить, сведя ее к решению более простых одномерных задач. Для этого сначала применим к задаче (1)–(9) преобразование Фурье по продольной координате

$$\hat{u}(\omega, x_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_3, t) e^{i\omega x_1} dx_1. \quad (10)$$

Постановка обратной задачи термоэлектроупругости для слоя в трансформантах Фурье имеет вид:

$$-\omega^2 c_{11} \hat{u}_1 - i\omega c_{13} \hat{u}_{3,3} - i\omega e_{31} \hat{\varphi}_{,3} + i\omega \gamma_1 \hat{\theta} + (c_{44} \hat{u}_{1,3})_{,3} - i\omega (c_{44} \hat{u}_3)_{,3} - i\omega (e_{15} \hat{\varphi})_{,3} = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial t^2}, \quad (11)$$

$$-i\omega c_{44} \hat{u}_{1,3} - \omega^2 c_{44} \hat{u}_3 - \omega^2 e_{15} \hat{\varphi} - i\omega (c_{13} \hat{u}_1)_{,3} + (c_{33} \hat{u}_{3,3})_{,3} + (e_{33} \hat{\varphi}_{,3})_{,3} - (\gamma_3 \hat{\theta})_{,3} = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial t^2}, \quad (12)$$

$$-\omega^2 k_{11} \hat{\theta} + (k_{33} \hat{\theta}_{,3})_{,3} = c_\varepsilon \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} - i\omega T_0 \gamma_1 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t} + T_0 \gamma_3 \frac{\partial^2 \hat{u}_3}{\partial x_3 \partial t} - T_0 g_3 \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_3 \partial t}, \quad (13)$$

$$-i\omega e_{15} \hat{u}_{1,3} - \omega^2 e_{15} \hat{u}_3 + \omega^2 M_1 \hat{\varphi} + (e_{33} \hat{u}_{3,3})_{,3} - i\omega (e_{13} \hat{u}_1)_{,3} - (M_3 \hat{\varphi}_{,3})_{,3} + (g_3 \hat{\theta})_{,3} = 0, \quad (14)$$

$$\hat{u}_1(\omega, 0, t) = \hat{u}_3(\omega, 0, t) = \hat{\theta}(\omega, 0, t) = \hat{\varphi}(\omega, 0, t) = 0, \quad (15)$$

$$-k_3 \hat{\theta}_{,3}(\omega, h, t) = \hat{q}(\omega, t),$$

$$c_{44}(h) (\hat{u}_{1,3}(\omega, h, t) - i\omega \hat{u}_3(\omega, h, t)) - i\omega e_{15}(h) \hat{\varphi}(\omega, h, t) = 0, \quad (16)$$

$$-i\omega c_{13}(h) \hat{u}_1(\omega, h, t) + c_{33}(h) \hat{u}_{3,3}(\omega, h, t) + e_{33}(h) \hat{\varphi}_{,3}(\omega, h, t) - \gamma_3(h) \hat{\theta}(\omega, h, t) = 0,$$

$$e_{33}(h) \hat{u}_{3,3}(\omega, h, t) - i\omega e_{13} \hat{u}_1(\omega, h, t) - M_3(h) \hat{\varphi}_{,3}(\omega, h, t) + g_3(h) \hat{\theta}(\omega, h, t) = 0,$$

$$\hat{\theta}(\omega, x_3, 0) = \hat{u}_1(\omega, x_3, 0) = \hat{u}_3(\omega, x_3, 0) = \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial t}(\omega, x_3, 0) = \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial t}(\omega, x_3, 0) = 0, \quad (17)$$

$$\hat{\theta}(\omega, h, t) = \hat{f}(\omega, t), \quad t \in [T_1, T_2], \quad (18)$$

$$\hat{u}_i(\omega, h, t) = \hat{g}_i(\omega, t), \quad i = 1, 3, \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (19)$$

Для удобства дальнейших построений обезразмерим задачу (11)–(19) по формулам: $x = \frac{x_1}{h}$, $z = \frac{x_3}{h}$, $U_1 = \frac{\hat{u}_1}{h}$, $U_3 = \frac{\hat{u}_3}{h}$, $W = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0}$, $\theta_0 = \sqrt{\frac{T_0 c_{33}^0}{c_\varepsilon^0}}$, $\Phi = \frac{\hat{\varphi}}{\varphi_0}$, $\varphi_0 = \sqrt{\frac{c_{33}^0}{\epsilon_3^0}} h$, $Q = \frac{\hat{q}}{q^*}$, $q^* = \frac{k_3^0 c_{33}^0}{\gamma_3^0 h}$, $\bar{c}(z) = \frac{c_\varepsilon(x_3)}{c_\varepsilon^0}$, $\bar{k}_i(z) = \frac{k_i(x_3)}{k_3^0}$, $\bar{\rho}(z) = \frac{\rho(x_3)}{\rho_0}$, $\bar{c}_{ij}(z) = \frac{c_{ij}(x_3)}{c_{33}^0}$, $\bar{\epsilon}_i(z) = \frac{\epsilon_i(x_3)}{\epsilon_3^0}$, $\bar{e}_{ij}(z) = \frac{e_{ij}(x_3)}{e_{33}^0}$, $\bar{g}_i(z) = \frac{g_i(x_3)}{g_3^0}$, $\bar{\gamma}_i(z) = \frac{\gamma_i(x_3)}{\gamma_3^0}$, $F = \frac{\hat{f}}{\theta_0}$, $G_i = \frac{\hat{g}_i}{c_{33}^0}$, $P_i = \frac{\hat{p}_i}{c_{33}^0}$, $v = \sqrt{\frac{c_{33}^0}{\rho_0}}$, $t_1 = \frac{h^2 c_\varepsilon^0}{k_3^0}$, $t_2 = \frac{h}{v}$, $\varepsilon_0 = \frac{t_1}{t_2}$, $\tau_1 = \frac{t}{t_1}$, $\tau_2 = \frac{t}{t_2}$, где c_{33}^0 , ϵ_3^0 , e_{33}^0 , ρ_0 , γ_3^0 , k_3^0 , c_ε^0 , g_3^0 — максимальные значения соответствующих термомеханических характеристик.

В результате обезразмеривания возникают следующие малые параметры: δ_1 — параметр электромеханической связанности, δ_2 — параметр термомеханической связанности, δ_3 — параметр теплоэлектрической связанности, ε_0 — отношение характерных времен звуковых t_2 и тепловых t_1 возмущений.

Функции U_1 , U_3 , W , Φ , F , Q , G_i , P_i представляют собой аналитические функции параметра преобразования Фурье ω , поэтому при малых значениях этого параметра их можно представить в виде разложения по степеням ω :

$$\begin{aligned} U_1(\omega, z, \tau_1) &= u_0(z, \tau_1) + i\omega u_1(z, \tau_1) + \omega^2 u_2(z, \tau_1) + \dots, \\ U_3(\omega, z, \tau_1) &= v_0(z, \tau_1) + i\omega v_1(z, \tau_1) + \omega^2 v_2(z, \tau_1) + \dots, \\ W(\omega, z, \tau_1) &= w_0(z, \tau_1) + i\omega w_1(z, \tau_1) + \omega^2 w_2(z, \tau_1) + \dots, \\ \Phi(\omega, z, \tau_1) &= \Phi_0(z, \tau_1) + i\omega \Phi_1(z, \tau_1) + \omega^2 \Phi_2(z, \tau_1) + \dots, \\ F(\omega, \tau_1) &= F_0(\tau_1) + i\omega F_1(\tau_1) + \omega^2 F_2(\tau_1) + \dots, \\ Q(\omega, \tau_1) &= Q_0(\tau_1) + i\omega Q_1(\tau_1) + \omega^2 Q_2(\tau_1) + \dots, \\ G_i(\omega, \tau_2) &= G_i^{(0)}(\tau_2) + i\omega G_i^{(1)}(\tau_2) + \omega^2 G_i^{(2)}(\tau_2) + \dots, \\ P_i(\omega, \tau_2) &= P_i^{(0)}(\tau_2) + i\omega P_i^{(1)}(\tau_2) + \omega^2 P_i^{(2)}(\tau_2) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Коэффициенты разложений в формулах (20) — это осредненные функции компонент физических полей и их моменты различных порядков, например, $w_0 = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, z, \tau_1) dx$, $w_1 = i \int_{-\infty}^{\infty} W(x, z, \tau_1) x dx$, $w_2 = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, z, \tau_1) x^2 dx$.

Ограничимся в разложениях (20) только тремя слагаемыми. Подставим разложения (20) в (11)–(19), составим начально-краевые задачи при одинаковых степенях ω , далее применим к ним преобразование Лапласа по времени. Тогда получим 6 упрощенных обратных задач. Задачи 1а, 2а, 3а аналогичны задаче для упругого стержня. Задачи 1б, 2б, 3б аналогичны задаче для термоупругого стержня с модифицированными коэффициентами, которые появляются после исключения электрического потенциала из постановок задач. Задачи такого типа хорошо изучены в [19, 20].

Задача 1а.

$$\left(\bar{c}_{44} \tilde{u}'_0 \right)' = p^2 \bar{\rho} \tilde{u}_0, \quad (21)$$

$$\tilde{u}_0(0, p) = 0, \quad \bar{c}_{44}(1) \tilde{u}'_0(1, p) = \tilde{P}_1^{(0)}, \quad (22)$$

$$\tilde{u}_0(1, p) = \tilde{G}_1^{(0)}. \quad (23)$$

Здесь p — параметр преобразования Лапласа, знак «штрих» обозначает производную по координате z .

ЗАДАЧА 1б. В случае теплового способа нагружения постановка задачи имеет вид:

$$\left(\bar{c}_{33}^* \tilde{v}'_0\right)' - \delta_2 (\bar{\gamma}_3^* \tilde{w}_0)' - \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{v}_0 = 0, \quad (24)$$

$$\left(\bar{k}_3 \tilde{w}'_0\right)' - p \bar{c}^* \tilde{w}_0 - p \delta_2 \bar{\gamma}_3^* \tilde{v}'_0 = 0, \quad (25)$$

$$\tilde{v}_0(0, p) = 0, \quad \tilde{w}_0(0, p) = 0, \quad (26)$$

$$-\bar{k}_3(1) \tilde{w}'_0(1, p) = \tilde{Q}_0(p), \quad \bar{c}_{33}^*(1) \tilde{v}'_0(1, p) - \delta_2 \bar{\gamma}_3^*(1) \tilde{w}'_0(1, p) = 0, \quad (27)$$

$$\tilde{w}_0(1, p) = \tilde{F}_0, \quad (28)$$

где $\bar{c}_{33}^* = \bar{c}_{33} + \delta_1^2 \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\varepsilon}_3}$, $\bar{\gamma}_3^* = \bar{\gamma}_3 - \delta_1 \delta_3 \frac{\bar{e}_{33} \bar{g}_3}{\bar{\varepsilon}_3}$, $\bar{c}^* = \bar{c} + \delta_3^2 \frac{\bar{g}_3^2}{\bar{\varepsilon}_3}$.

В случае механического нагружения в постановке задачи (24)–(28) изменятся граничные и дополнительные условия (27), (28), которые примут вид

$$\tilde{w}'_0(1, p) = 0, \quad \bar{c}_{33}^*(1) \tilde{v}'_0(1, p) - \delta_2 \bar{\gamma}_3^*(1) \tilde{w}'_0(1, p) = \tilde{P}_3^{(0)}(p), \quad (29)$$

$$\tilde{v}_0(1, p) = \tilde{P}_3^{(0)}. \quad (30)$$

Если функция \tilde{w}_0 известна из решения задачи 1а, а пара функций $(\tilde{v}_0, \tilde{w}_0)$ из решения задачи 1б, тогда можно сформулировать постановки обратных задач 2а и 2б.

ЗАДАЧА 2а.

$$\left(\bar{c}_{44} \tilde{u}'_1\right)' - p^2 \bar{\rho} \tilde{u}_1 = s_1, \quad (31)$$

$$\tilde{u}_1(0, p) = 0, \quad \bar{c}_{44}(1) \tilde{u}'_1(1, p) = P_1^{(1*)}(p), \quad (32)$$

$$\tilde{u}_1(1, p) = \tilde{G}_1^{(1)}, \quad (33)$$

где $\tilde{P}_1^{(1*)} = \tilde{P}_1^1 + \bar{c}_{44}(1) \tilde{v}_0(1, p)$, $s_1 = (\bar{c}_{44} \tilde{v}_0)' + \bar{c}_{13}^* \tilde{v}'_0 - \delta_2 \bar{\gamma}_1^* \tilde{w}_0$, $\bar{c}_{13}^* = \bar{c}_{13} + \delta_1^2 \frac{(\bar{e}_{31} + \bar{e}_{15}) \bar{e}_{33}}{\bar{\varepsilon}_3}$, $\bar{\gamma}_1^* = \bar{\gamma}_1 - \frac{\delta_1 \delta_3 (\bar{e}_{31} + \bar{e}_{15}) \bar{g}_3}{\bar{\varepsilon}_3}$.

ЗАДАЧА 2б. В случае механического способа нагружения постановка задачи имеет вид:

$$\left(\bar{c}_{33}^* \tilde{v}'_1\right)' - \delta_2 (\bar{\gamma}_3^* \tilde{w}_1)' - p^2 \bar{\rho} \tilde{v}_1 = s_2, \quad (34)$$

$$\left(\bar{k}_{33} \tilde{w}'_1\right)' - p \bar{c}^* \tilde{w}_1 - p \delta_2 \bar{\gamma}_3^* \tilde{v}'_1 = s_3, \quad (35)$$

$$\tilde{v}_1(0, p) = 0, \quad \tilde{w}_1(0, p) = 0, \quad (36)$$

$$\tilde{w}'_1(1, p) = 0, \quad \bar{c}_{33}^*(1) \tilde{v}'_1(1, p) - \delta_2 \bar{\gamma}_3^*(1) \tilde{w}'_1(1, p) = \tilde{P}_3^{(1*)}, \quad (37)$$

$$\tilde{v}_1(1, p) = \tilde{G}_3^{(1)}, \quad (38)$$

где $s_2 = \bar{c}_{44} \tilde{u}'_0 + (\bar{c}_{13}^* \tilde{u}_0)' + \delta_1^2 (\bar{e}_{13} + \bar{e}_{15}) \bar{e}_{33} \tilde{u}_0$, $s_3 = p \delta_2 \bar{\gamma}_1^* \tilde{u}_0$, $\tilde{P}_3^{(1*)} = \tilde{P}_3^{(1)} + \bar{c}_{13}^*(1) \tilde{u}_0(1, p)$.

Если функция \tilde{u}_1 известна из решения задачи 2а, а пара функций $(\tilde{v}_1, \tilde{w}_1)$ из решения задачи 2б, тогда можно сформулировать постановки обратных задач 3а и 3б.

ЗАДАЧА 3а.

$$\left(\bar{c}_{44} \tilde{u}'_2\right)' - p^2 \bar{\rho} \tilde{u}_2 = s_4, \quad (39)$$

$$\tilde{u}_2(0, p) = 0, \quad \bar{c}_{44}(1) \tilde{u}'_2(1, p) = \tilde{P}_1^{(2*)}, \quad (40)$$

$$\tilde{u}_2(1, p) = \tilde{G}_1^{(2)}, \quad (41)$$

где $s_4 = \bar{c}_{11}^* \tilde{u}_0 + \bar{\gamma}_1^* \tilde{w}_1 - (\bar{c}_{44} \tilde{v}_1)'$, $\bar{c}_{11}^* = \bar{c}_{11} + \delta_1^2 \frac{(\bar{e}_{13} + \bar{e}_{15})^2}{\bar{e}_3}$, $\tilde{P}_1^{(2*)} = \tilde{P}_1^{(2)} - \bar{c}_{44}(1) \tilde{v}_1(1, p)$.

ЗАДАЧА 3b. В случае теплового способа нагружения постановка задачи имеет вид:

$$\left(\bar{c}_{33}^* \tilde{v}'_2 \right)' - \delta_2 (\bar{\gamma}_3^* \tilde{w}_2)' - p^2 \bar{\rho} \tilde{v}_2 = s_5, \quad (42)$$

$$-\bar{k}_1 \tilde{w}_0 + \left(\bar{k}_3 \tilde{w}'_2 \right)' - p \bar{c}^* \tilde{w}_2 - p \delta_2 \bar{\gamma}_3^* \tilde{v}'_2 = s_6, \quad (43)$$

$$\tilde{v}_2(0, p) = 0, \quad \tilde{w}_2(0, p) = 0, \quad (44)$$

$$-\bar{k}_3(1) \tilde{w}'_2(1, p) = \tilde{Q}_2, \quad \bar{c}_{33}^*(1) \tilde{v}'_2(1, p) - \delta_2 \bar{\gamma}_3^*(1) \tilde{w}'_2(1, p) = 0, \quad (45)$$

$$\tilde{w}_2(1, p) = \tilde{F}_2. \quad (46)$$

Здесь $s_5 = -\bar{c}_{44} \tilde{u}'_1 + \bar{c}_{44} \tilde{v}_0 - (\bar{c}_{13}^* \tilde{u}_1)'$, $s_6 = p \delta_2 \bar{\gamma}_1^* \tilde{u}_1$.

Решение прямых задач 1a, 2a, 3a сводится к решению ИУФ 2-го рода в трансформантах Лапласа и обращении трансформант на основе теории вычетов. Например, ИУФ 2-го рода для решения задачи 3a имеет вид

$$\tilde{J}_2(z, p) = \tilde{P}_1^{(2*)} + \int_0^1 K_1(z, \eta, p) \tilde{J}_2(\eta, p) d\eta - \int_z^1 s_4(\eta) d\eta, \quad (47)$$

где $K_1(z, \eta, p) = -\frac{p^2}{\bar{c}_{44}(\eta)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\xi) d\xi$.

После нахождения момента второго порядка от напряжения $\tilde{J}_2(z, p)$ из решения интегрального уравнения (47) далее вычисляется момент второго порядка от продольного перемещения по формуле: $\tilde{u}_2(z, p) = \int_0^z \frac{1}{\bar{c}_{44}(\eta)} \tilde{J}_2(\eta, p) d\eta$.

Решение прямых задач 1b, 2b, 3b сводится к решению системы ИУФ 2-го рода в трансформантах Лапласа и обращении трансформант на основе теории вычетов. Например, система ИУФ 2-го рода для решения задачи 2b имеет вид:

$$\tilde{w}_1(z, p) = \int_0^1 K_2(z, \varsigma, p) \tilde{w}_1(\varsigma, p) d\varsigma + \int_0^1 K_3(z, \varsigma, p) \tilde{\Omega}_1(\varsigma, p) d\varsigma + \int_0^z K_0(z, \varsigma) s_3(\varsigma) d\varsigma, \quad (48)$$

$$\tilde{\Omega}_1(z, p) = \int_0^1 K_4(z, \varsigma, p) \tilde{w}_1(\varsigma, p) d\varsigma + \int_0^1 K_5(z, \varsigma, p) \tilde{\Omega}_1(\varsigma, p) d\varsigma + \tilde{P}_3^{(1*)}(p) - \int_z^1 s_2(\varsigma) d\varsigma, \quad (49)$$

где $K_0(z, \varsigma) = \int_0^{\min\{z, \varsigma\}} \frac{d\eta}{k_{33}(\eta)}$, $K_2(z, \varsigma, p) = -p \left(\bar{c}^*(\varsigma) + \delta_2 \frac{\bar{\gamma}_3^2(\varsigma)}{\bar{c}_{33}^*(\varsigma)} \right) \int_0^{\min\{z, \varsigma\}} \frac{d\eta}{k_{33}(\eta)}$, $K_3(z, \varsigma, p) = -\delta_2 p \frac{\bar{\gamma}_3^*(\varsigma)}{\bar{c}_{33}^*(\varsigma)} \int_0^{\min\{z, \varsigma\}} \frac{d\eta}{k_{33}(\eta)}$, $K_4(z, \varsigma, p) = -p^2 \frac{\bar{\gamma}_3^*(\varsigma)}{\bar{c}_{33}^*(\varsigma)} \int_{\min\{z, \varsigma\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta$, $K_5(z, \varsigma, p) = -\frac{p^2}{\bar{c}_{33}^*(\varsigma)} \int_{\min\{z, \varsigma\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta$.

После решения системы (48), (49) далее находится момент первого порядка от вертикального перемещения по формуле $\tilde{u}_1(z, p) = \int_0^z \left(\frac{1}{\bar{c}_{33}^*(\varsigma)} \tilde{\Omega}_1(\varsigma, p) + \frac{\bar{\gamma}_3^*(\varsigma)}{\bar{c}_{33}^*(\varsigma)} \tilde{w}_1(\varsigma, p) \right) d\varsigma$.

4. Решение упрощенных обратных задач термоэлектроупругости

Реконструкция неоднородных свойств термоэлектроупругого слоя осуществляется в три этапа.

На первом этапе находятся функции \bar{c}_{44} , $\bar{\rho}$, u_0 из решения обратной задачи 1a, а также функции \bar{c}_{33}^* , $\bar{\gamma}_3^*$, \bar{c}^* , \bar{k}_3 , v_0 , w_0 из решения обратной задачи 1b.

Схема исследования нелинейных задач такого типа подробно исследовалась в [20, 26, 27] и основывается на построении итерационного процесса. Итерационный процесс стартует с начального приближения $\bar{a}^0(z)$, которое определяется в классе положительных ограниченных линейных функций путем минимизации функционала невязки, вид которого зависит от способа нагружения тела:

а) в случае теплового способа нагружения

$$J_1 = \int_{a_1}^{a_2} (F_0(\tau_1) - w_0(1, \tau_1))^2 d\tau_1; \quad (50)$$

б) в случае механического способа нагружения

$$J_2 = \int_{b_1}^{b_2} (G_1^{(0)}(\tau_2) - u_0(1, \tau_2))^2 d\tau_2; \quad (51)$$

$$J_3 = \int_{c_1}^{c_2} (G_3^{(0)}(\tau_2) - v_0(1, \tau_2))^2 d\tau_2. \quad (52)$$

Далее находятся поправки к начальному приближению путем решения ИУФ 1-го рода, полученных методом линеаризации обратных задач 1а и 1б.

Рассмотрим операторные уравнения в трансформантах Лапласа, полученные в ходе решения обратных задач 1а и 1б, когда восстанавливалась одна характеристика при известных остальных:

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{44}^{*(n-1)} (\tilde{u}'_0)^{(n-1)} dz = \tilde{P}_1^{(0)} (\tilde{G}_1^{(0)}(p) - \tilde{u}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (53)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{33}^{*(n-1)} (\tilde{v}'_0)^{(n-1)} dz = \tilde{P}_3^{(0)} (\tilde{G}_3^{(0)}(p) - \tilde{v}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (54)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{k}_3^{(n-1)} (\tilde{w}'_0)^{(n-1)} dz = \tilde{Q}_0 (\tilde{F}_0 - \tilde{w}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (55)$$

$$p \int_0^1 \delta \bar{c}^{*(n-1)} (\tilde{w}'_0)^{(n-1)} dz = \tilde{Q}_0 (\tilde{F}_0 - \tilde{w}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (56)$$

$$-\delta_2 p \int_0^1 \delta \bar{\gamma}_3^{*(n-1)} \tilde{v}'_0^{(n-1)} \tilde{w}'_0^{(n-1)} dz = \tilde{Q}_0 (\tilde{F}_0 - \tilde{w}_0(1, p)), \quad p \in [0, \infty). \quad (57)$$

После нахождения характеристик \bar{c}_{44} , $\bar{\rho}$, \bar{c}_{33}^* , γ_3^* , \bar{c}^* , \bar{k}_3 , из решения прямых задач (21), (22) и (24)–(28) находятся функции u_0 , v_0 , w_0 , которые необходимы для решения обратных задач 2а и 2б.

На втором этапе находятся функции \bar{c}_{13}^* , u_1 из решения обратной задачи 2а, а также функций $\bar{\gamma}_1^*$, v_1 , w_1 из решения обратной задачи 2б.

Для нахождения функции \bar{c}_{13}^* уравнение (21) умножим на \tilde{u}_1 , а уравнение (31) на \tilde{u}_0 , проинтегрируем произведения на $[0, 1]$, и, рассмотрев их разность, с учетом граничных и дополнительных условий, получим следующее ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{13}^* \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{v}'_0^{(n-1)} dz = \tilde{P}_1^{(0)} \tilde{G}_1^{(1)} - \tilde{P}_1^{(1*)} \tilde{G}_1^{(0)} + \int_0^1 \bar{c}_{44} \tilde{u}'_0^{(n-1)} \tilde{v}_0^{(n-1)} dz, \quad p \in [0, \infty). \quad (58)$$

Аналогичным способом получено ИУФ 1-го рода для нахождения функции $\bar{\gamma}_1^*$, которое имеет вид

$$p \delta_2 \int_0^1 \delta \bar{\gamma}_1^{*(n-1)} \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{w}_0^{(n-1)} dz = \tilde{Q}_0 \tilde{F}_1 - \tilde{Q}_1 \tilde{F}_0, \quad p \in [0, \infty). \quad (59)$$

На третьем этапе осуществляется идентификация \bar{c}_{11}^* , u_2 из решения обратной *обратной задачи* 3а, а также функций \bar{k}_1 , v_2 , w_2 из решения обратной *обратной задачи* 3б.

Проводя действия, аналогичные второму этапу, получим следующие ИУФ 1-го рода с гладким ядром:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \delta \bar{c}_{11}^* \left(\tilde{u}_0^{(n-1)} \right)^2 dz &= \tilde{P}_1^{(0)} \tilde{G}_1^{(2)} - \tilde{P}_1^{(2*)} \tilde{G}_1^{(0)} - \delta_2 \int_0^1 \bar{\gamma}_1^* \tilde{u}_0^{(n-1)} \tilde{w}_1^{(n-1)} dz \\ &\quad - \int_0^1 \bar{c}_{44} \tilde{u}'_0^{(n-1)} \tilde{w}_1^{(n-1)} dz + \int_0^1 \bar{c}_{13}^* \tilde{v}'_1 \tilde{u}_0^{(n-1)} dz, \quad p \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (60)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{k}_1 \left(\tilde{w}_0^{(n-1)} \right)^2 dz = \tilde{Q}_0 \tilde{F}_2 - \tilde{Q}_2 \tilde{F}_0 - p \delta_2 \int_0^1 \bar{\gamma}_1^* \tilde{u}_1^{(n-1)} \tilde{w}_0^{(n-1)} dz, \quad p \in [0, \infty). \quad (61)$$

Операторные уравнения на конечном временном отрезке получаются путем обращения операторных уравнений в трансформантах на основе теорем операционного исчисления. Например, при нагрузках $P_1(\tau_2) = H(\tau_2)$, $Q_0(\tau_1) = H(\tau_1)$ после обращения уравнений (53), (57) получим следующие операторные уравнения в оригиналах:

$$\int_0^1 \delta \bar{c}_{44}^{(n-1)} D_1(z, \tau_2) dz = - \left(G_1^{(0)}(\tau_2) - u_0^{(n-1)}(1, \tau_2) \right), \quad \tau_2 \in [b_1, b_2], \quad (62)$$

$$\int_0^1 \delta \bar{\gamma}_3^{(n-1)} D_2(z, \tau_1) dz = - \left(Q_0(\tau_1) - w_0^{(n-1)}(1, \tau_1) \right), \quad \tau_1 \in [a_1, a_2], \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} D_1(z, \tau_2) &= \int_0^\tau \frac{\partial^2 u_0^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial^2 u_0^{(n-1)}(z, \tau - \tau_2)}{\partial z} d\tau_2, \\ D_2(z, \tau_1) &= \delta_2 \int_0^\tau \frac{\partial^2 v_0^{(n-1)}(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \frac{\partial w_0^{(n-1)}(z, \tau - \tau_1)}{\partial \tau} d\tau_1. \end{aligned}$$

Решение ИУФ 1-го рода является некорректной проблемой, для регуляризации которой применялся метод Тихонова А. Н. с выбором параметра регуляризации по обобщенной невязке [29].

5. Результаты вычислительных экспериментов

Проведены вычислительные эксперименты по поэтапной реконструкции термомеханических характеристик слоя.

На первом этапе термомеханические характеристики \bar{c}_{44} , $\bar{\rho}$, \bar{c}_{33}^* , γ_3^* , \bar{c}^* , \bar{k}_3 восстанавливались путем решение обратных задач 1а и 1б на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого для нахождения поправок решались ИУФ 1-го рода вида (62). В качестве условий выхода из итерационного процесса выступали: 1) ограничение по количеству итераций ($n = 20$); 2) достижение соответствующим функционалом невязки (50)–(52) предельного значения, равного 10^{-6} .

В расчетах принято: $P_1(\tau_2) = P_3(\tau_2) = H(\tau_2)$, $Q_0(\tau_1) = H(\tau_1)$, $\delta_1 = 0.6$, $\delta_2 = 0.05$, $\delta_3 = 0.04$. При решении ИУФ 1-го и 2-го рода методом коллокаций отрезок $z \in [0, 1]$ разбивался на $m = 20$ равных частей. В случае теплового нагружения измерение дополнительной информации проводилось в 4-х точках внутри выбранных временных отрезков, а в случае механического нагружения — в 5 точках.

Выяснено, что погрешность реконструкции монотонных функций, восстановленных на первом этапе, во внутренних точках не превосходит 4%; при этом для достижения функционалом невязки (50)–(52) порогового значения требуется не более 6 итераций. В то же время погрешность реконструкции функций γ_3^* , \bar{c}^* в окрестности $z = 0$ значительно больше, чем во внутренних точках в связи с тем, что ядра соответствующих операторных уравнений обращаются в нуль при $z = 0$.

На рисунках ниже представлены результаты реконструкции функций, характеризующие неоднородные термомеханические свойства слоя. При этом сплошной линией изображены точные функции, точками — восстановленные функции.

На первых двух этапах восстанавливались законы неоднородности в виде степенных и экспоненциальных функций, моделирующие реальные свойства ФГ пироматериала. В качестве примера рассмотрен ФГ пироматериал, свойства которого принимают свойства титаната циркония на нижней грани $z = 0$ и свойства селенида кадмия на верхней грани $z = 1$. Эффективные безразмерные материальные характеристики слоя определяются по степенному закону вида [30]:

$$\bar{a}(z) = \bar{a}^{(1)} + (\bar{a}^{(2)} - \bar{a}^{(1)}) z^s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (64)$$

Здесь $\bar{a}^{(1)}$ — безразмерные свойства титаната циркония, $\bar{a}^{(2)}$ — безразмерные свойства селенида кадмия, представленные в [31], s — параметр неоднородности.

На рис. 1 показаны результаты реконструкции на первом этапе следующих характеристик: а) $\bar{c}_{44}(z) = 2.5 - 1.7z^3$; б) $\bar{k}_3(z) = 4 - e^{z^2}$ при $[a_1, a_2] = [0.04, 0.48]$, $[b_1, b_2] = [0.06, 0.88]$, $\bar{c}_{44}^0(z) = 2.45 - 1.60z$, $\bar{k}_3^0(z) = 3.05 - 1.55z$.

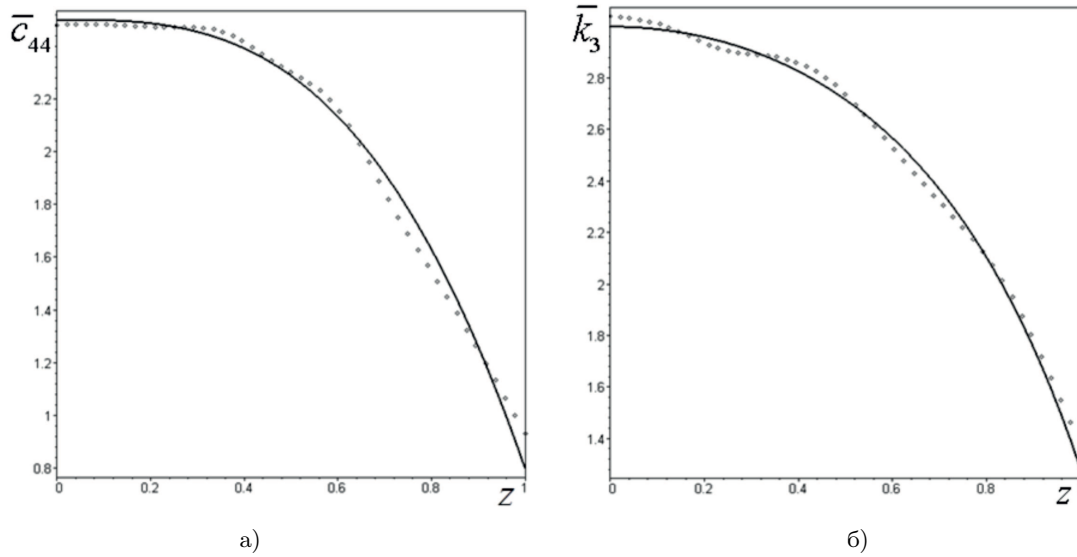


Рис. 1. Результаты первого этапа реконструкции термомеханических характеристик слоя:

$$\text{а) } \bar{c}_{44}(z) = 2.5 - 1.7z^3; \text{ б) } \bar{k}_3(z) = 4 - e^{z^2}.$$

На рис. 2 изображены результаты восстановления на первом этапе следующих характеристик: а) $\bar{k}_3(z) = 1 - 0.74z^2$; б) $\bar{c}_{33}^*(z) = 1 - 0.25 * z^4$.

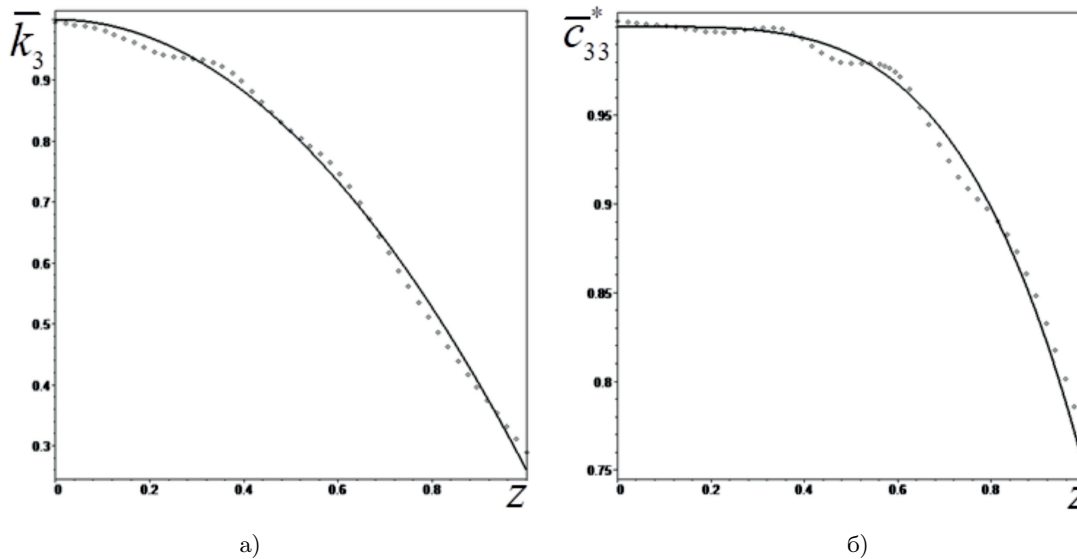


Рис. 2. Результаты первого этапа реконструкции термомеханических характеристик слоя:

$$\text{а) } \bar{k}_3(z) = 1 - 0.74z^2; \text{ б) } \bar{c}_{33}^*(z) = 1 - 0.25z^4.$$

Для оценки устойчивости предложенного подхода решения КОЗ к измерительной ошибке определения входной информации проведено ее зашумление, которое моделируется по формуле

$$f_\beta(\tau) = f(\tau)(1 + \beta\gamma_0), \quad (65)$$

где β — амплитуда зашумления, γ_0 — случайная величина с равномерным законом распределения на отрезке $[-1, 1]$.

Выяснено, что с увеличением амплитуды зашумления погрешность реконструкции всех функций возрастает. Однако даже при 1%-м шуме погрешность реконструкции характеристик на первом этапе не превышает 10%.

На втором этапе восстанавливались функции \bar{c}_{13}^* , $\bar{\gamma}_1^*$ из решения ИУФ 1-го рода, полученных путем обращения уравнений (58), (59). При этом при решении ИУФ 1-го и 2-го рода методом коллокаций сетка по сравнению с первым этапом измельчалась, а отрезок $z \in [0, 1]$ разбивался на $m = 100$ равных частей.

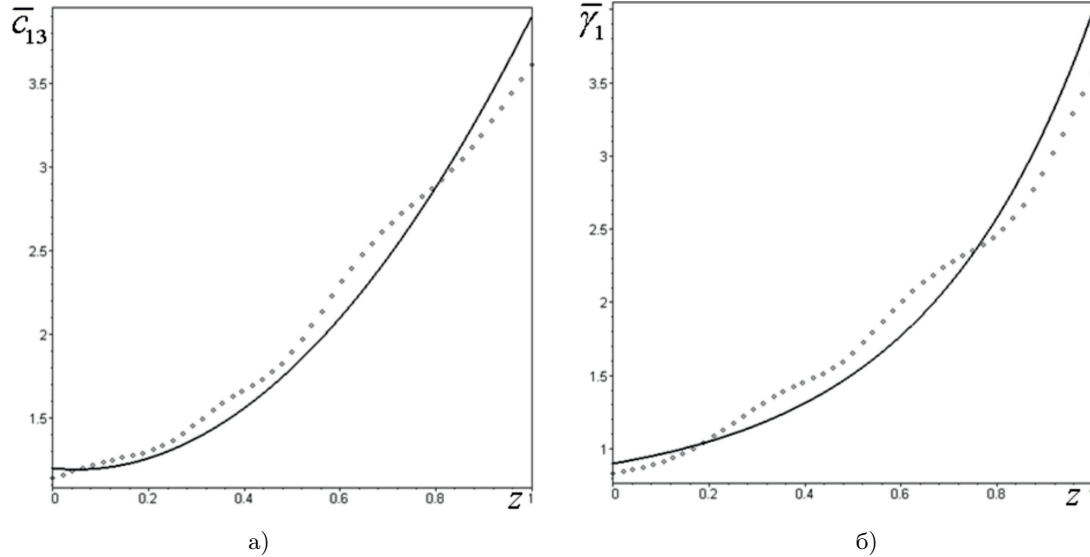


Рис. 3. Результаты второго этапа реконструкции термомеханических характеристик слоя:
а) $\bar{c}_{13}^*(z) = 1.2 - 0.3z + 3z^2$; б) $\bar{\gamma}_1^*(z) = 0.7 + 0.2e^{2.8z}$.

На рис. 3 изображены результаты реконструкции следующих характеристик на втором этапе: а) $\bar{c}_{13}^*(z) = 1.2 - 0.3z + 3z^2$; б) $\bar{\gamma}_1^*(z) = 0.7 + 0.2e^{2.8z}$. При этом максимальная погрешность реконструкции увеличивалась до 11%, что связано с влиянием накопленной погрешности идентификации на первом этапе.

На третьем этапе восстанавливались гипотетические законы неоднородности \bar{c}_{11}^* , \bar{k}_1 из решения обращенных ИУФ 1-го рода (60), (61) на измельченной сетке при $m = 140$.

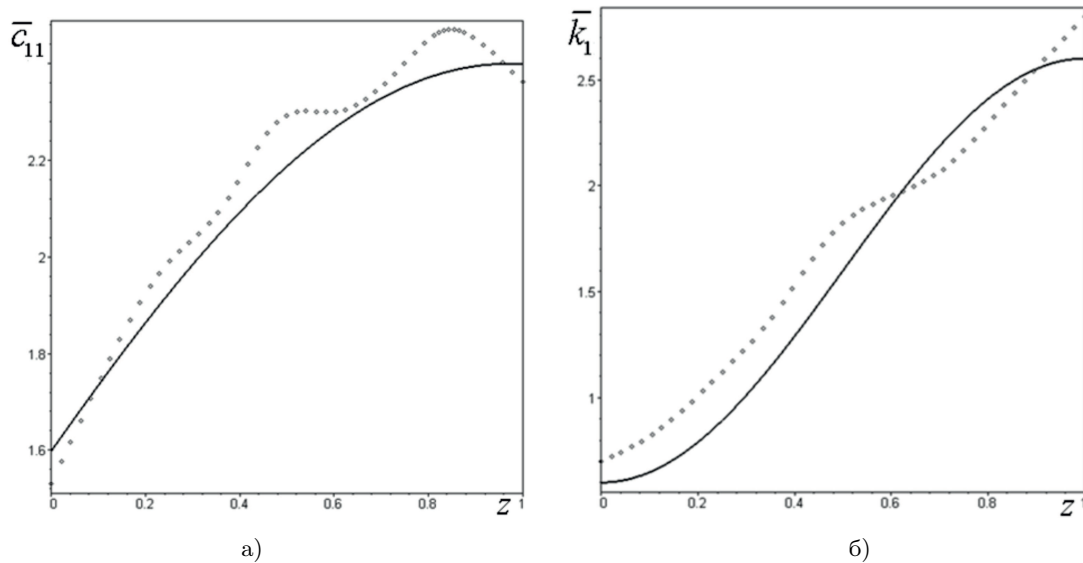


Рис. 4. Результаты третьего этапа реконструкции термомеханических характеристик слоя:
а) $\bar{c}_{11}^*(z) = 1.4 + \sin(0.45\pi z + 0.2)$; б) $\bar{k}_1(z) = 1.6 - \cos(\pi z)$.

На рис. 4 представлены результаты восстановления на третьем этапе следующих характеристик: а) $\bar{c}_{11}^*(z) = 1.4 + \sin(0.45\pi z + 0.2)$; б) $\bar{k}_1(z) = 1.6 - \cos(\pi z)$. При этом максимальная погрешность реконструкции увеличивалась до 24%. Это связано с накоплением погрешности идентификации на предыдущих этапах.

6. Заключение

Исследована обратная задача об идентификации материальных характеристик поперечно-неоднородного термоэластичного слоя. С помощью преобразования Фурье двумерная обратная задача для слоя сведена к ряду одномерных задач термоэластичности относительно усредненных характеристик и их моментов. Представлен трехэтапный подход по идентификации материальных характеристик. После исключения электрического потенциала получено три набора обратных задач, аналогичных задачам для упругого и термоупругого стержня с модифицированными характеристиками. На первом этапе идентификация построена на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого определяются поправки законов изменения термомеханических характеристик путем решения ИУФ 1-го рода. Выявлены эффективные для идентификации временные отрезки измерения дополнительной информации. Операторные уравнения для решения обратной задачи на втором и третьем этапах получены методом линеаризации. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции материальных характеристик термоэластичного слоя, как при отсутствии зашумления входной информации, так и при 1%-м шуме. Даны рекомендации по вычислительным аспектам решения обратных задач на каждом этапе. Выяснено, что: 1) погрешность реконструкции монотонных функций во внутренних точках на первом этапе не превосходит 4%; 2) на последующих этапах погрешность реконструкции заметно возрастает, что связано с накоплением погрешности идентификации на предыдущих этапах.

Литература

1. Казарян А. А. Тонкопленочный датчик давления и температуры // Датчики и системы.—2016.—Т. 58, № 3 (201).—С. 50–56.
2. Tauchert T. R., Ashida F., Noda N. Developments in thermopiezoelectricity with relevance to smart composite structures // Compos. Struct.—2000.—Vol. 48, № 1–3.—P. 31–38. DOI: 10.1016/S0263-8223(99)00070-7.
3. Rao S. S., Sunar M. Analysis of distributed thermopiezoelectric sensors and actuators in advanced intelligent structures // AIAA Journal.—1993.—Vol. 31, № 7.—P. 1280–1286. DOI: 10.2514/3.11764.
4. Mindlin R. D. On the equations of motion of piezoelectric crystals // Probl. Contin. Mech. SIAM.—1961.—P. 282–290. DOI: 10.1007/978-1-4613-8865-4_60.
5. Mindlin R. D. Equations of high frequency, vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // Int. J. Solid. Struct.—1974.—Vol. 10, № 6.—P. 625–637. DOI: 10.1016/0020-7683(74)90047-X.
6. Ватульян А. О., Кирютенко А. Ю., Наседкин А. В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэластичности // Прикл. мех. и техн. физика.—1996.—Т. 37, № 5.—С. 135–142.
7. Ватульян А. О. Тепловой удар по термоэластичному слою // Вестн. Донского гос. техн. ун-та.—2001.—Т. 1 (7), № 1.—С. 82–89.
8. Соловьев А. Н., Чебаненко В. А., Германчук М. С. Прикладная теория изгибных колебаний пьезоактивного биморфа в рамках несвязной краевой задачи термоэластичности // Соврем. мат. фундам. направл.—2023.—Т. 69, № 2.—С. 364–374. DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374.
9. Zhao X., Iegaink F. J. N., Zhu W. D., Li Y. H. Coupled thermo-electro-elastic forced vibrations of piezoelectric laminated beams by means of Green's functions // Int. J. Solid. Struct.—2019.—Vol. 156, № 9.—P. 355–369. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.04.011.
10. Shen S., Kuang Z. B. An active control model of laminated piezothermoelastic plate // Int. J. Solids and Struct.—1999.—Vol. 36, № 13.—P. 1925–1947. DOI: 10.1016/S0020-7683(98)00068-7.

11. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Расчет некоторых типов задач термоэлектроупругости с использованием пакетов ANSYS и ASELAN // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Спец. выпуск.—2004.—С. 52–55.
12. Wang B. L., Noda N. Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure // Smart Mater. Struct.—2001.—Vol. 10.—P. 189–193. DOI: 10.1088/0964-1726/10/2/303.
13. Ying C., Zhifei S. Exact Solutions of Functionally Gradient Piezothermoelastic Cantilevers and Parameter Identification // J. Intell. Mater. Syst. Struct.—2005.—Vol. 16, № 6.—P. 531–539. DOI: 10.1177/1045389X05053208.
14. Soloviev A. N., Chebanenko V. A., Oganessian P. A., Chao S. F., Liu Y. M. Applied theory for electroelastic plates with non-homogeneous polarization // Mater. Phys. Mech.—2019.—Vol. 42, № 2.—P. 242–255. DOI: 10.18720/MPM.4222019_11.
15. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред.—2017.—Т. 10, № 2.—С. 117–126. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.10.
16. Белянкова Т. И., Калинин В. В. К моделированию преднапряженного термоэлектроупругого полупространства с покрытием // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.—2017.—№ 1.—С. 117–135.
17. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Идентификация неоднородных характеристик преднапряженных пироматериалов // Чебышевский сб.—2018.—Т. 19, № 2.—С. 183–198. DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-183-198.
18. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics // Int. J. Heat Mass Transfer.—2019.—Vol. 128.—P. 1157–1167. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.084.
19. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. 2-е изд., исправ. и доп.—Ростов-н/Д.—Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2022.—178 с.
20. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных материалов // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, № 2.—С. 75–84. DOI: 10.46698/v3482-0047-3223-0.
21. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение обратной задачи об идентификации двух термомеханических характеристик функционально-градиентного стержня // Изв. Саратовского ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2022.—Т. 22, № 2.—С. 180–195. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195.
22. Ватульян А. О., Углич П. С. Реконструкция неоднородных характеристик поперечно-неоднородного слоя при антиплоских колебаниях // Прикладная механика и техническая физика.—2014.—Т. 55, № 3.—С. 149–153.
23. Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация неоднородных свойств ортотропного упругого слоя // Акустический журнал.—2013.—Т. 59, № 6.—С. 752–153. DOI: 10.7868/S0320791913060178.
24. Вестяк В. А., Земсков А. В., Эрихман Н. Н. Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины // Вестн. Московского авиационного ин-та.—2009.—Т. 16, № 6.—С. 244–249.
25. Lukaszewicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. Thermal Stresses.—2003.—Vol. 26, № 1.—P. 13–23. DOI: 10.1080/713855763.
26. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном подходе к идентификации термомеханических характеристик слоистой биологической ткани // Экологич. вест. науч. центров Черноморского экономического сотрудничества.—2016.—№ 2.—С. 29–36.
27. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Численная реализация итерационной схемы решения обратных задач термоупругости для неоднородных тел с покрытиями // Вычислительные технологии.—2017.—Т. 22, № 5.—С. 14–26.
28. Яхно В. Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1990.—304 с.
29. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач.—М: Наука, 1990.—230 с.
30. Raddy J. N., Chin C. D. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Thermal Stresses.—1998.—Vol. 21.—P. 593–626. DOI: 10.1080/01495739808956165.
31. Babaei M. H., Chen Z. T. The transient coupled thermo-piezoelectric hollow cylinder to dynamic loadings response of a functionally graded piezoelectric // Proc. R. Soc. A.—2010.—Vol. 466, № 2116.—P. 1077–1091. DOI: 10.1098/rspa.2009.0543.

Статья поступила 10 июля 2023 г.

ВАТУЛЯН АЛЕКСАНДР ОВАНЕСОВИЧ
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
заведующий отделом дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: aovatulyan@sfnu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0444-449>

НЕСТЕРОВ СЕРГЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ
Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: 1079@list.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 68–84

INVERSE PROBLEM OF THERMOELECTRICITY FOR A FUNCTIONALLY GRADED LAYER

Vatulyan, A. O.^{1,2} and Nesterov, S. A.²

¹ Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
² Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: aovatulyan@sfnu.ru, 1079@list.ru

Abstract. The formulation of the inverse problem of identification the variable material characteristics of a transversely inhomogeneous thermoelectroelastic layer, the lower face of which is rigidly pinched, shorted and maintained at zero temperature, and an unsteady load is applied on the upper non-electroded face. Using the Fourier transform, the two-dimensional inverse problem is reduced to a number of one-dimensional problems similar to those for an elastic and thermoelastic rod with modified characteristics. A step-by-step approach is proposed to identify the material characteristics of the layer. Dimensionless direct problems after applying the Laplace transform are solved on the basis of the apparatus of Fredholm integral equations of the 2nd kind and the conversion of transformants based on the theory of residues. Using the linearization method, operator equations of the 1st kind are obtained to solve the inverse problems at each stage. Computational experiments have been carried out to reconstruct the material characteristics of a thermoelectroelastic layer, both in the absence of noise input information and at 1% noise. Effective time intervals for the identification of additional information have been identified. The analysis of the results of the identification of the thermomechanical characteristics of the layer is carried out.

Keywords: coefficient inverse problem of thermoelectroelasticity, functionally graded pyromaterial, layer, identification, Fredholm integral equation of the 1st kind.

AMS Subject Classification: 74B05, 80A20, 80A23.

For citation: *Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Inverse Problem of Thermoelectricity for a Functionally Graded Layer, Vladikavkaz Math. J., 2024, vol. 26, no. 1, pp. 68–84 (in Russian). DOI: 10.46698/x5277-2885-8052-p.*

References

1. Kazaryan, A. A. Fine-Film Captive Pressure and Temperature, *Sensors and Systems*, 2016, vol. 58, no. 3 (201), pp. 50–56 (in Russian).
2. Tauchert, T. R., Ashida, F. and Noda, N. Developments in Thermopiezoelasticity with Relevance to Smart Composite Structures, *Composite Structures*, 2000, vol. 48, no. 1–3, pp. 31–38. DOI: 10.1016/S0263-8223(99)00070-7.
3. Rao, S. S. and Sunar, M. Analysis of Distributed Thermopiezoelectric Sensors and Actuators in Advanced Intelligent Structures, *AIAA Journal*, 1993, vol. 93, no. 7, pp. 1280–1286. DOI: 10.2514/3.11764.
4. Mindlin, R. D. On the Equations of Motion of Piezoelectric Crystals, *Problems of continuum Mechanics*, SIAM, 1961, no. 7, pp. 282–290. DOI:10.1007/978-1-4613-8865-4_60.
5. Mindlin, R. D. Equations of High Frequency, Vibrations of Thermopiezoelectric Crystal Plates, *International Journal of Solids and Structures*, 1974, vol. 10, no. 6, pp. 625–637. DOI: 10.1016/0020-7683(74)90047-X.
6. Vatul'yan, A. O., Kiryutenko, A. Y. and Nasedkin, A. V. Plane Waves and Fundamental Solutions in Linear Thermoelectroelasticity, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1996, vol. 37, pp. 727–733. DOI: 10.1007/BF02369312.
7. Vatulyan, A. O. Thermal Shock on the Thermoelectroelastic Layer, *Vestnik Donskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2001, vol. 1 (7), no. 1, pp. 82–89 (in Russian).
8. Solov'ev, A. N., Chebanenko, V. A. and Germanchuk, M. S. Applied Theory of Flexural Vibrations of a Piezoactive Bimorph in the Framework of an Uncoupled Boundary-Value Problem of Thermoelectroelasticity, *Contemporary Mathematics Fundamental Directions*, 2023, vol. 69, no. 2, pp. 364–374 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374.
9. Zhao, X., Iegaink, F. J. N., Zhu, W. D. and Li, Y. H. Coupled Thermo-Electro-Elastic Forced Vibrations of Piezoelectric Laminated Beams by means of Green's Functions, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, vol. 156, no. 9, pp. 355–369. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.04.011.
10. Shen, S. and Kuang, Z. B. An Active Control Model of Laminated Piezothermoelastic Plate, *International Journal of Solids and Structures*, 1999, vol. 36, no. 13, pp. 1925–1947. DOI: 10.1016/S0020-7683(98)00068-7.
11. Belokon, A. V. and Nasedkin, A. V. Calculation of Some Types of Thermoelectroelastic Problems Using the ANSYS and ASELAN Packages, *Izvestiya vuzov, Severo-Kavkazskiy region, spetsial'nyy vypusk*, 2004, pp. 52–55 (in Russian).
12. Wang, B. L. and Noda, N. Design of a Smart Functionally Graded Thermopiezoelectric Composite Structure, *Smart Materials and Structures*, 2001, vol. 10, pp. 189–193. DOI: 10.1088/0964-1726/10/2/303.
13. Ying, C. and Zhifei, S. Exact Solutions of Functionally Gradient Piezothermoelastic Cantilevers and Parameter Identification, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2005, pp. 531–539. DOI: 10.1177/1045389X05053208.
14. Soloviev, A. N., Chebanenko, V. A., Oganesyanyan, P. A., Chao, S. F. and Liu, Y. M. Applied Theory for Electroelastic Plates with Non-Homogeneous Polarization, *Materials Physics and Mechanics*, 2019, vol. 42, no. 2, pp. 242–255. DOI: 10.18720/MPM.4222019_11.
15. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Dynamic Problem of Thermoelectroelasticity for Functionally Graded Layer, *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.10.
16. Belyankova, T. I. and Kalinchuk, V. V. On the Modeling of a Prestressed Thermoelastic Half-Space with a Coating, *Mechanics of Solids*, 2017, vol. 52, no. 1, pp. 95–110. DOI: 10.3103/S0025654417010113.
17. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Identification of Inhomogeneous Characteristics of Prestressed Pyromaterials, *Chebyshevskii Sbornik*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 183–198 (in Russian). DOI: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-183-198.
18. Vatulyan, A., Nesterov, S. and Nedin, R. Some Features of Solving an inverse Problem on Identification of Material Properties of Functionally Graded Pyroelectrics, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, vol. 128, pp. 1157–1167. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.084.
19. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. *Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics. 2nd ed.], Rostov-on-Don, Taganrog, Southern Federal University Press, 2022, 178 p. (in Russian).
20. Vatul'yan, A. O. and Nesterov, S. A. Study of the Inverse Problems of Thermoelasticity for Inhomogeneous Materials, *Siberian Mathematical Journal*, 2023, vol. 64, no. 3, p. 699–706. DOI: 10.1134/S0037446623030175.

21. Vatul'yan, A. O. and Nesterov, S. A. Solution of the Inverse Problem of Two Thermomechanical Characteristics Identification of a Functionally Graded Rod, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 180–195 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-2-180-195.
22. Vatul'yan, A. O. and Uglich, P. S. Reconstruction of Inhomogeneous Characteristics of a Transverse Inhomogeneous Layer in Antiplane Vibrations, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, no. 3, pp. 499–505. DOI: 10.1134/S0021894414030122.
23. Vatul'yan, A. O., Bogachev, I. V. and Yavruyan, O. V. Identifying the Inhomogeneous Properties of an Orthotropic Elastic Layer, *Acoustical Physics*, 2013, vol. 59, no. 6, pp. 702–708. DOI: 10.1134/S106377101306016X.
24. Vestyak, V. A., Zemskov, A. V. and Erichman, N. N. Numerical-Analytical Solution of the Inverse Coefficient Problem of Thermoelasticity for a Plate, *Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2009, vol. 16, no. 6, pp. 244–249 (in Russian).
25. Lukasievicz, S. A., Babaei, R. and Qian, R. E. Detection of Material Properties in a Layered Body by Means of Thermal Effects, *Journal of Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23. DOI: 10.1080/713855763.
26. Vatul'yan, A. O. and Nesterov, S. A. On One Approach to Identifying the Thermomechanical Characteristics of a Layered Biological Tissue, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 2, pp. 29–36 (in Russian).
27. Vatul'yan, A. O. and Nesterov, S. A. Numerical Implementation of an Iterative Scheme for Solving Inverse Problems of Thermoelasticity for Inhomogeneous Bodies with Coatings, *Computational Technologies*, 2017, vol. 22, no. 5, pp. 14–26 (in Russian).
28. Yakhno, V. G. *Obratnyye koeffitsiyentnyye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy uprugosti* [Inverse Coefficient Problems for Differential Equations of Elasticity], Novosibirsk, Nauka, 1990, 304 p. (in Russian).
29. Tikhonov, A. N., Goncharskiy, A. V., Stepanov, V. V. and Yagola, A. G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems], Moscow, Nauka, 1990, 230 p. (in Russian).
30. Raddy, J. N. and Chin, C. D. Thermoelastic analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates, *Journal of Thermal Stresses*, 1998, vol. 21, pp. 593–626. DOI: 10.1080/01495739808956165.
31. Babaei, M. H. and Chen, Z. T. The Transient Coupled Thermo-Piezoelectric Hollow Cylinder to Dynamic Loadings Response of a Functionally Graded Piezoelectric, *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2010, vol. 466, no. 2116, pp. 1077–1091. DOI: 10.1098/rspa.2009.0543.

Received July 10, 2023

ALEXANDER O. VATULYAN
Southern Federal University,
8 a Milchakov St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of the Department of Theory of Elasticity;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Head of the Department of Differential Equations
E-mail: aovatul'yan@sfedu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

SERGEY A. NESTEROV
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Researcher of the Department of Differential Equations
E-mail: 1079@list.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>