Владикавказский математический журнал
2024, Том 26, Выпуск 1, С. 100–105

УДК 512.54, 512.74
DOI 10.46698/b0710-6173-7852-i

О НАДГРУППАХ ЦИКЛА, БОГАТЫХ ТРАНСВЕКЦИЯМИ[#]

Р. Ю. Дряева[1]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46

E-mail: dryaeva-roksana@mail.ru

Аннотация. Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $GL(n,R)$ порядка n над кольцом R богата трансвекциями, если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha)=e+\alpha e_{ij}$ на всех позициях (i,j), $i\neq j$, для некоторых $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$. Это понятие ввел З. И. Боревич, рассматривая задачу описания подгрупп линейных групп, содержащих фиксированную подгруппу. Известно, что надгруппа нерасщепимого максимального тора, содержащая элементарную трансвекцию на некоторой одной позиции, богата трансвекциями. Для коммутативной области R с единицей и цикла $\pi=(1\ 2\ \ldots n)\in S_n$ длины n доказано следующее утверждение. Для того чтобы подгруппа $\langle t_{ij}(\alpha),(\pi)\rangle$ полной линейной группы $GL(n,R)$, порожденная матрицей-перестановкой (π) и трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$, была богата трансвекциями, необходимо и достаточно, чтобы число $i-j$ было взаимно просто с n. Система аддитивных подгрупп $\sigma=(\sigma_{ij})$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, кольца R называется сетью (ковром) над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj}\subseteq\sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j (З. И. Боревич, В. М. Левчук). Такая же система, но без диагонали, называется элементарной сетью. Полную или элементарную сеть $\sigma=(\sigma_{ij})$ мы называем неприводимой, если все аддитивные подгруппы σ_{ij} отличны от нуля. В работе определяются слабо насыщенные сети, которые играют важную роль в доказательстве основного результата.

Ключевые слова: подгруппы богатые трансвекциями, трансвекция, цикл, сеть, сетевая группа.

AMS Subject Classification: 20G15.

Образец цитирования: *Дряева Р. Ю.* О надгруппах цикла, богатых трансвекциями // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 100–105. DOI: 10.46698/b0710-6173-7852-i.

1. Введение

Говорят, что подгруппа H полной линейной группы $G=GL(n,R)$ порядка n над кольцом R *богата трансвекциями*, если она содержит элементарные трансвекции $t_{ij}(\alpha)=e+\alpha e_{ij}$ на всех позициях (i,j), $i\neq j$, для некоторых $\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$ [1]. Работа связана с тематикой, предложенной в [1], и посвящена вопросам, связанным с подгруппами, богатыми трансвекциями.

Пусть R — коммутативная область с 1, в которой существует обратимый элемент θ такой, что элемент $\theta-1$ также обратим. Пусть, далее, $H=\langle t_{ij}(\alpha),(\pi)\rangle$ — подгруппа полной линейной группы $GL(n,R)$ порядка n над R, порожденная матрицей-перестановкой (π), соответствующей циклу $\pi\in S_n$ длины n, и элементарной трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$.

Основным результатом является следующая теорема.

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2024-1447.

Теорема. *Пусть* $\pi = (1\ 2\ \dots\ n) \in S_n$ *— цикл длины* n, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. *Для того чтобы подгруппа* $\langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle$ *полной линейной группы* $GL(n, R)$, *порожденная матрицей-перестановкой* (π) *и трансвекцией* $t_{ij}(\alpha)$, *была богата трансвекциями, необходимо и достаточно, чтобы число* $i - j$ *было взаимно просто с* n.

Следствие. *Подгруппы* $\langle t_{21}(\alpha), (\pi)\rangle$ *и* $\langle t_{n1}(\alpha), (\pi)\rangle$ *богаты трансвекциями.*

В работе определяются слабо насыщенные сети, которые играют важную роль в доказательстве теоремы.

Приняты следующие обозначения: $e = e_n$ — единичная матрица порядка n; e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит $1 \in R$, а на остальных местах нули; $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$ — элементарная трансвекция, $\xi \in R$, $\xi \neq 0$, $i \neq j$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, аддитивных подгрупп кольца R называется *сетью* [1–2] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — отрезок натурального ряда; для произвольной перестановки $\omega \in S_n$ через (ω) обозначается матрица-перестановка, элементы которой определяются формулой $(\omega)_{ij} = \delta_{i\omega(j)}$, где δ_{rs} — символ Кронекера. Так, например, для цикла

$$\pi = (1\ 2\ \dots\ n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

длины n матрица-перестановка (π) имеет вид

$$(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $a = (a_{ij})$ и перестановки $\omega \in S_n$ справедливы формулы:

$$\left(\omega^{-1}\right)_{ij} = \delta_{\omega(i)j}, \quad \left((\omega)^{-1} a (\omega)\right)_{ij} = a_{\omega(i)\omega(j)}.$$

2. Сети, заданные в клеточной форме

Пусть $n = k \cdot m$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть аддитивных подгрупп коммутативного кольца R с 1 порядка n [1–2]. С разбиением $n = m + \ldots + m$ (k слагаемых) числа n связана запись сети σ в клеточной форме:

$$\sigma = [\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \dots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \dots & \sigma^{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \dots & \sigma^{kk} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\sigma = [\sigma] = (\sigma^{ij})$, σ^{ij} — квадратные $m \times m$-таблицы аддитивных подгрупп кольца R, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Ясно, что при $m = 1$, $k = n$, мы получаем сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$.

Если $S = (s_{ij})$, $L = (l_{ij})$ — две квадратные $m \times m$-таблицы аддитивных подгрупп s_{ij}, l_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, кольца R, то мы определяем их сумму и произведение естественным способом:

$$(S + L)_{ij} = s_{ij} + l_{ij}, \quad (S \cdot L)_{ij} = \sum_{r=1}^{m} s_{ir} \cdot l_{rj}.$$

Определим произведение двух $k\times k$-таблиц $[\sigma] = (\sigma^{ij})$ и $[\tau] = (\tau^{ij})$ вида (1) следующим естественным способом:

$$([\sigma][\tau])^{ij} = \sum_{r=1}^{k} \sigma^{ir}\tau^{rj}.$$

В частности, тогда при $m = 1$, $k = n$, мы получаем произведение двух сетей $\sigma = (\sigma_{ij})$ и $\tau = (\tau_{ij})$ аддитивных подгрупп порядка n:

$$(\sigma\tau)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \sigma_{ir}\tau_{rj}.$$

Ясно, что $\sigma = (\sigma_{ij})$ — сеть $\Longleftrightarrow \sigma\cdot\sigma \subseteq \sigma$.

Далее, клеточную таблицу (1) $\sigma = [\sigma] = (\sigma^{ij})$ назовем сетью порядка k, если $\sigma^{ir}\sigma^{rj} \subseteq \sigma^{ij}$ при всех $1 \leqslant i, r, j \leqslant k$. Ясно, что $[\sigma] = (\sigma^{ij})$ является сетью $\Longleftrightarrow [\sigma]\cdot[\sigma] \subseteq [\sigma]$.

Из формулы $[\sigma\cdot\sigma] = [\sigma]\cdot[\sigma]$ (см. [3, гл. 1, § 1]) вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $n = k\cdot m$. Таблица $\sigma = (\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп σ_{ij} кольца R порядка n является сетью тогда и только тогда, когда таблица*

$$[\sigma] = ([\sigma]_{rs}) = (\sigma^{rs}), \quad 1 \leqslant r,\ s \leqslant k,$$

квадратных $m\times m$-таблиц σ^{ij} является сетью порядка k (см. (1)).

3. Слабо насыщенные сети

Приступим теперь к определению блочных сетей, которые мы будем рассматривать в нашей работе.

Итак, пусть $n = km$, $k, m \geqslant 2$. Представим таблицу $\tau = (\tau_{ij})$ аддитивных подгрупп τ_{ij} кольца R порядка n в виде блочной таблицы порядка k вида (1), на каждой позиции которой стоит квадратная таблица τ^{ij} порядка m, в которой на диагонали стоит R, а на остальных местах 0.

Пример. Рассмотрим пример этой конструкции, таблица τ_1 для $n = 6$, $m = 2$, $k = 3$ и τ_2 для $n = 6$, $m = 3$, $k = 2$:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} R & 0 & R & 0 & R & 0\\ 0 & R & 0 & R & 0 & R\\ R & 0 & R & 0 & R & 0\\ 0 & R & 0 & R & 0 & R\\ R & 0 & R & 0 & R & 0\\ 0 & R & 0 & R & 0 & R \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & R & 0 & 0\\ 0 & R & 0 & 0 & R & 0\\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & R\\ R & 0 & 0 & R & 0 & 0\\ 0 & R & 0 & 0 & R & 0\\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & R \end{pmatrix}.$$

Предложение 1. *Построенная таблица τ является сетью порядка n.*

$\lhd$ Доказательство вытекает из леммы 1. Действительно, таблица τ имеет клеточный вид $[\tau] = (\tau^{ij})$: это квадратная таблица порядка k, у которой на каждой позиции (i, j) стоит $m\times m$-таблица τ^{ij}, в которой на диагонали стоит кольцо R, а на остальных местах 0. Ясно тогда, что для любых i, r, j мы имеем $\tau^{ir}\tau^{rj} = \tau^{ij}$. Следовательно, клеточная таблица $[\tau] = (\tau^{ij})$ является сетью порядка k, а потому по лемме 1 $\tau = (\tau_{ij})$ является сетью порядка n. $\rhd$

Сеть из предложения 1 будем называть *слабо насыщенной*.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — произвольная сеть аддитивных подгрупп σ_{ij} коммутативного кольца R. В кольце $M(n,R)$ всех квадратных матриц порядка n над R рассмотрим подкольцо $M(\sigma) = \{a = (a_{ij}) \in M(n,R) : a_{ij} \in \sigma_{ij}\}$. Множество $e + M(\sigma) = \{e + a : a \in M(\sigma)\}$ является мультипликативной системой. Максимальная подгруппа $G(\sigma)$ полной линейной группы $GL(n,R)$, содержащаяся в $e+M(\sigma)$, называется *сетевой группой* [2]. Через $N(\sigma)$ обозначим нормализатор сетевой подгруппы $G(\sigma)$ в полной линейной группе $GL(n,R)$.

Предложение 2 [4, теорема 1]**.** *Пусть $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n)$ — цикл длины $n = km$ и $\tau = (\tau_{ij})$ — слабо насыщенная сеть порядка n. Тогда циклическая матрица-перестановка (π) нормализует сетевую группу $G(\tau)$.*

Лемма 2 [2, предложение 5]**.** *Пусть R — произвольное кольцо, в котором существует обратимый элемент θ такой, что $\theta - 1$ также обратим, и σ — некоторая D-сеть идеалов в R. Всякая трансвекция, содержащаяся в $N(\sigma)$, содержится в $G(\sigma)$.*

4. Группа, порожденная циклом и трансвекцией

Пусть $n = mk$, $m \geqslant 2$, $k \geqslant 2$. Мы рассматриваем позицию $(mr+1, 1)$ $(1 \leqslant r \leqslant k-1)$. В группе $G = GL(mk,R)$, $n = mk \geqslant 4$, рассмотрим подгруппу $\langle t_{mr+1,1}(\alpha), (\pi)\rangle$, где $\pi = (1\ 2\ 3\ \ldots\ mk)$ — цикл длины $n = mk$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Мы вновь рассматриваем слабо насыщенную сеть τ. А именно, представим таблицу $\tau = (\tau_{ij})$ аддитивных подгрупп τ_{ij} кольца R порядка n в виде блочной таблицы порядка k вида (1), на каждой позиции которой стоит квадратная таблица τ^{ij} порядка m, в которой на диагонали стоит R, а на остальных местах 0.

Заметим, что по построению на позиции $(mr+1, 1)$ $(1 \leqslant r \leqslant k-1)$ сети $\tau = (\tau_{ij})$ стоит кольцо R: $\tau_{mr+1,1} = R$, поэтому элементарная трансвекция $t_{mr+1,1}(\alpha)$ содержится в сетевой группе $G(\tau)$: $t_{mr+1,1}(\alpha) \in G(\tau)$. Тогда

$$\langle (\pi), t_{mr+1,1}(\alpha)\rangle \subseteq \langle (\pi), G(\tau)\rangle. \tag{2}$$

Предложение 3. *Пусть R — коммутативная область с 1, в которой существует обратимый элемент θ такой, что элемент $\theta - 1$ также обратим, $n = mk$, $k, m \geqslant 2$. Тогда группа $\langle G(\tau), (\pi)\rangle = \langle (\pi)\rangle G(\tau)$ не богата трансвекциями. В частности, группа $\langle (\pi), t_{mr+1,1}(\alpha)\rangle$ не богата трансвекциями.*

$\lhd$ В силу предложения 2 мы имеем $\langle G(\tau), (\pi)\rangle = \langle (\pi)\rangle \cdot G(\tau) \subseteq N(\tau)$. Пусть $t_{12}(\xi) \in \langle (\pi)\rangle \cdot G(\tau) \subseteq N(\tau)$ для некоторого $\xi \in R$. Тогда согласно лемме 2 мы имеем $t_{12}(\xi) \in G(\tau)$, поэтому $\xi \in \tau_{12}$, однако (по построению) $\tau_{12} = 0$, поэтому $\xi = 0$. Таким образом, в группе $\langle G(\tau), (\pi)\rangle$ нет нетривиальных элементарных трансвекций на позиции $(1,2)$. Следовательно, группа $\langle G(\tau), (\pi)\rangle$ не богата трансвекциями. $\rhd$

Лемма 3 [5, предложение 1]**.** *Пусть $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n)$, $H = \langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle$, $n \geqslant j \geqslant 2$. Положим $k = n - j + 2$, $\sigma = \pi^{k-1}$. Тогда имеет место формула*

$$(\sigma) t_{ij}(\alpha) (\sigma)^{-1} = t_{\sigma(i)1}(\alpha),$$

где $\sigma(j) = 1$, $i - j \equiv (\sigma(i) - 1) (\mathrm{mod}\, n)$. В частности, если $t_{ij}(\alpha) \in H$ для некоторых $i \neq j$, $j \geqslant 2$, то $t_{r1}(\alpha) \in H$ для $r = \sigma(i)$, причем

$$\text{НОД}\,(i - j, n) = \text{НОД}\,(\sigma(i) - 1, n) = \text{НОД}\,(r - 1, n).$$

5. Доказательство теоремы

Достаточность. По условию перестановка имеет вид $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n) \in S_n$ — цикл длины n, далее, для позиции элементарной трансвекции $t_{ij}(\alpha)$ мы имеем НОД$\,(i-j,n)=1$. Тогда подгруппа $\langle t_{ij}(\alpha),(\pi)\rangle$ богата трансвекциями [5, теорема 1].

Необходимость. Предположим, что НОД$\,(i-j,n) = m \geqslant 2$. Нам нужно показать тогда, что для $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n) \in S_n$ подгруппа $\langle t_{ij}(\alpha),(\pi)\rangle$ не богата трансвекциями. Согласно лемме 3 мы можем считать, что $j=1$, $i \geqslant 2$ и НОД$\,(i-1,n) = m \geqslant 2$ (ясно тогда $3 \leqslant i \leqslant n-1$).

Так как НОД$\,(i-1,n) = m \geqslant 2$, то положим $i-1 = mr$, $n = mk$. Заметим, что так как $m \geqslant 2$, то $3 \leqslant i \leqslant n-1$ и, очевидно, $k \geqslant 2$.

Для $n = km$, $k, m \geqslant 2$ построим слабо насыщенную сеть (см. §§ 3 и 4) $\tau = (\tau_{ij})$. А именно, представим таблицу $\tau = (\tau_{ij})$ аддитивных подгрупп τ_{ij} кольца R порядка n в виде блочной таблицы порядка k вида (1), на каждой позиции которой стоит квадратная таблица τ^{ij} порядка m, в которой на диагонали стоит R, а на остальных местах 0. Тогда по построению $\tau_{mr+1,1} = R$, но $mr+1 = i$, поэтому $\tau_{i1} = R$. Согласно предложению 3 группа $\langle(\pi), t_{mr+1,1}(\alpha)\rangle$ не богата трансвекциями. Следовательно, группа $\langle(\pi), t_{i1}(\alpha)\rangle$ не богата трансвекциями. Теорема доказана.

Литература

1. *Боревич З. И.* О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семин. ЛОМИ.—1978.—Т. 75.—С. 22–31.
2. *Боревич З. И.* Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Зап. науч. семин. ЛОМИ.—1976.—Т. 64.—С. 12–29.
3. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.—Санкт-Петербург: Лань, 2009.—736 с.
4. *Джусоева Н. А., Икаев С. С., Койбаев В. А.* О подгруппах, богатых трансвекциями // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, № 4.—С. 50–55. DOI: 10.46698/o2081-1390-1031-t.
5. *Дряева Р. Ю., Койбаев В. А.* Элементарные трансвекции в надгруппах нерасщепимого максимального тора // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, № 4.—С. 11–17. DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5968.

Статья поступила 15 ноября 2023 г.

Дряева Роксана Юрьевна
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
старший преподаватель
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 46
E-mail: dryaeva-roksana@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2024, Volume 26, Issue 1, P. 100–105

ON OVERGROUPS OF A CYCLE RICH IN TRANSVECTIONS

Dryaeva, R. Y.[1]

[1] Khetagurov North-Ossetian State University,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
E-mail: `dryaeva-roksana@mail.ru`

Abstract. A subgroup H of the general linear group $G = GL(n, R)$ of order n over the ring R is said to be rich in transvections if it contains elementary transvections $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ at all positions (i, j), $i \neq j$, for some $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. This concept was introduced by Z. I. Borevich, considering the problem of describing subgroups of linear groups containing fixed subgroup. It is known that the overgroup of a nonsplit maximal torus containing an elementary transvection at some one position, is rich in transvections. For a commutative domain R with unit and a cycle $\pi = (1\ 2\ \ldots\ n) \in S_n$ of length n, the following proposition is proved. A subgroup $\langle t_{ij}(\alpha), (\pi)\rangle$ of the general linear group $GL(n, R)$ generated by the permutation matrix (π) and the transvection $t_{ij}(\alpha)$ is rich in transvections if and only if the numbers $i - j$ and n are coprime. A system of additive subgroups $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, of a ring R is called a net (carpet) over a ring R of order n, if $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ for all values of the indices i, r, j (Z. I. Borevich, V. M. Levchuk). The same system, but without the diagonal, called elementary net. We call a complete or elementary net $\sigma = (\sigma_{ij})$ irreducible if all additive subgroups of σ_{ij} are nonzero. In this note we define weakly saturated nets that play an important role in the proof of the main result.

Keywords: subgroups rich in transvections, transvection, cycle, net, net group.

AMS Subject Classification: 20G15.

For citation: *Dryaeva, R. Y.* On Overgroups of a Cycle Rich in Transvections, *Vladikavkaz Math. J.*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 100–105 (in Russian). DOI: 10.46698/b0710-6173-7852-i.

References

1. *Borevich, Z. I.* Subgroups of Linear Groups Rich in Transvections, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 2, pp. 928–934. DOI: 10.1007/BF01089083.
2. *Borevich, Z. I.* A Description of the Subgroups of the Complete Linear Group that Contain the Group of Diagonal Matrices, *Journal of Soviet Mathematics*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 1718–1730. DOI: 10.1007/BF01091757.
3. *Faddeev, D. K. and Faddeeva, V. N. Computational Methods of Linear Algebra*, St. Petersburg, Lan, 2009, 736 p. (in Russian).
4. *Dzhusoeva, N. A., Ikaev, S. S. and Koibaev, V. A.* About Subgroups Rich in Transvections, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 50–55 (in Russian). DOI: 10.46698/o2081-1390-1031-t.
5. *Dryaeva, R. Y. and Koibaev, V. A.* Elementary Transvections in the Overgroups of a Non-Split Maximal Torus, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2015, vol. 17, no. 4, pp. 11–17 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2015.4.5968.

Received November 15, 2023

Roksana Y. Dryaeva
Khetagurov North-Ossetian State University,
46 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: `dryaeva-roksana@mail.ru`