Владикавказский математический журнал
2025, Том 27, Выпуск 4, С. 38–45

УДК 517.53
DOI 10.46698/m9533-0085-1293-h

ОЦЕНКА ВЕРХНЕЙ ПЛОТНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМЫ ГАБОРА[#]

К. П. Исаев[1], З. Ю. Фазуллин[1], Р. С. Юлмухаметов[2]

[1] Уфимский университет науки и технолологий,
Россия, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32;
[2] Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
Россия, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112

E-mail: orbit81@list.ru, fazullinzu@mail.ru, yulmukhametov@mail.ru

Аннотация. В работе [1] было показано, что верхняя плотность дискретного множества Λ, для которого система Габора G_Λ полна в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, не может быть меньше $\frac{1}{3\pi}$. Из более ранних работ известно также, что при регулярности распределения показателей верхняя плотность не менее $\frac{2}{\pi}$. В данной статье мы уточняем оценку при отсутствии условия регулярности распределения: верхняя плотность дискретного множества Λ, для которого система Габора G_Λ полна в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, не может быть меньше $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. Улучшение оценок достигнуто за счет более методичного применения симметризации данного множества показателей системы Габора с использованием известного эффекта уменьшения роста модуля целой функции при более симметричном расположении ее нулей. На конкретных примерах обсуждается также возможность улучшения полученной оценки в пределах предлагаемого метода.

Ключевые слова: целые функции, система Габора, гильбертовы пространства, полнота, минимальность, множества единственности.

AMS Subject Classification: 42C15, 30D15.

Образец цитирования: *Исаев К. П., Фазуллин З. Ю., Юлмухаметов Р. С.* Оценка верхней плотности показателей системы Габора // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, вып. 4.—С. 38–45. DOI: 10.46698/m9533-0085-1293-h.

1. Введение

Для функции $\varphi(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x^2}$ и для множества $\Lambda = \{(t, w) \in \mathbb{R}^2\}$ рассмотрим систему Габора G_Λ, состоящую из функций

$$\rho_{t,w}\varphi(x) = e^{2i\pi wx}\varphi(x - t), \quad (t, w) \in \Lambda.$$

Подробный обзор исследований по теме систем Габора приведен, например, в работе [2]. Далее мы будем отождествлять $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. *Верхней плотностью* (Бьерлинга — Ландау) дискретного множества $\Lambda \subset \mathbb{C}$ называется величина

$$D_+(\Lambda) = \lim_{r \longrightarrow \infty} \frac{\operatorname{card}(\Lambda \cap B(0, r))}{\pi r^2},$$

[#]Исследование первых двух авторов выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1637. Исследование третьего автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 25-21-00044, https://rscf.ru/project/25-21-00044/.

© 2025 Исаев К. П., Фазуллин З. Ю., Юлмухаметов Р. С.

где через $B(a,r)$ обозначен круг радиуса r с центром в точке a. Соответственно, величина

$$D_-(\Lambda) = \underline{\lim}_{r\longrightarrow\infty} \frac{\operatorname{card}(\Lambda \cap B(0,r))}{\pi r^2}$$

называется *нижней плотностью*. В работе [3] показано, что если система G_Λ полна и минимальна в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и множество Λ имеет регулярное распределение, то плотность множества находится между числами $\frac{2}{\pi}$ и 1. Регулярность распределения множества Λ означает, что за исключением, возможно, счетного множества точек θ_1, θ_2 существует угловая плотность

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{\operatorname{card}(\Lambda \cap \{\lambda :\ |\lambda| < r,\, \theta_1 < \arg\,\lambda < \theta_2\})}{\pi r^2}$$

и существует конечный предел

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \sum_{|\lambda|<r,\,\lambda\in\Lambda} \frac{1}{\lambda^2}.$$

Условие регулярности распределения, таким образом, является серьезным ограничением.

В работе [1] авторы рассматривают вопрос об оценке плотностей в случае отказа от условия регулярности распределения множества Λ. Доказана следующая теорема.

Теорема. (a) *Существует дискретное подмножество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ такое, что $D_+(\Lambda) = \frac{1}{\pi}$ и система G_Λ полна и минимальна в $L^2(\mathbb{R})$.*

(b) *Если подмножество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ таково, что система G_Λ полна в $L^2(\mathbb{R})$, то $D_+(\Lambda) \geqslant \frac{1}{3\pi}$.*

В данной заметке, мы намерены показать, что нижняя оценка $D_+(\Lambda) \geqslant \frac{1}{3\pi}$ допускает уточнение.

2. Основные результаты

Мы намерены доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Если подмножество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ таково, что система G_Λ полна в $L^2(\mathbb{R})$, то $D_+(\Lambda) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.*

Так же, как в работе [1] мы эквивалентным образом переформулируем теорему 1 в виде утверждения о множествах единственности для классических пространств Фока $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F} := \left\{ F \in H(\mathbb{C}) :\ \|F\|^2 := \int |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2}\, dm(z) < \infty \right\},$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Множество Λ называется множеством единственности для пространства Фока, если

$$(F \in \mathscr{F},\, F(\lambda) = 0,\, \lambda \in \Lambda) \Rightarrow (F(z) = 0,\, z \in \mathbb{C}).$$

В пространстве Фока точечные функционалы $F \longrightarrow f(z)$ непрерывны, поэтому в нем существует порождающее ядро $k_\lambda(z)$:

$$(F, k_\lambda) = F(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},\ F \in \mathscr{F}.$$

Теорема 2. *Если множество $\Lambda \subset \mathbb{C}$ является множеством единственности для пространства Фока, то $D_+(\Lambda) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$.*

Эквивалентность этих двух теорем обосновывается с помощью преобразования Баргмана

$$\mathscr{B}f(x) = e^{-i\pi xy+\frac{\pi|z|^2}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\rho_{x,-y}\varphi(t)}\,dt = 2^{\frac{1}{4}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\pi t^2}e^{2\pi tz}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dt,$$

где $z = x + iy$. Это преобразование изометрически отображает пространство $L^2(\mathbb{R})$ на пространство Фока, причем $\mathscr{B}\rho_{(\operatorname{Re}\lambda,-\operatorname{Im}\lambda)}\varphi = e^{-\frac{\pi|\lambda|^2}{2}}k_{\overline{\lambda}}$ (см. [4]). Поэтому полнота системы G_Λ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ равносильна полноте системы k_λ, $\lambda \in \Lambda$, в пространстве Фока. А полнота системы из воспризводящих ядер, в свою очередь, очевидным образом эквивалентна тому, что Λ является множеством единственности.

Как известно, чем больше нулей у многочлена, тем больше его рост. Эта простая связь нарушается для трансцендентных целых функций. Например, целая функция $\frac{1}{\Gamma(z)}$, где $\Gamma(z)$ — Гамма-функция Эйлера, с нулями в точках πn, $n \in \mathbb{N}$, имеет бесконечный экспоненциальный тип, а функция $\sin z$ — конечный. В рассматриваемой задаче заданное множество Λ характеризируется только плотностью, о его распределении ничего не известно. Поэтому представляется возможным лишь конструировать большее множество $\Lambda' \supseteq \Lambda$ таким образом, чтобы целая функция с множеством нулей Λ' имела как можно меньший рост. В работе [1] эта идея реализована с помощью множества $\Lambda' = \Lambda \cup i\Lambda$. Мы воспользуемся множеством $\Lambda \cup \alpha\Lambda \cup \overline{\alpha}\Lambda$, где $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$, и покажем, что такой вариант оптимальный при данном подходе.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ — множество единственности для пространства Фока и $D_+(\Lambda) < C$ для некоторого $C > 0$. Через δ_λ обозначим единичную атомарную меру в точке λ и положим

$$\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} \delta_\lambda,$$

$$\mu(t) := \mu(B(0,t)) = \operatorname{card}(\Lambda \cap B(0,r)).$$

Поскольку нас будет интересовать лишь верхняя плотность множества Λ, то не уменьшая общности можем считать, что $\mu(1) = 0$ и для некоторого $C' < C$ имеет место соотношение

$$\mu(t) \leqslant C'\pi t^2, \quad t > 0. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть $p > 0$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ определено из уравнений*

$$\alpha + \overline{\alpha} = -p,$$

$$\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 = -p. \tag{2}$$

Положим

$$v_p(w) = p\ln|1-w| + \ln|1-\alpha w| + \ln|1-\overline{\alpha}w|, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Тогда функция

$$u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

субгармонична на всей плоскости и при некоторой постоянной $C(p)$, зависящей от p, удовлетворяет оценке

$$u(z) \leqslant C'\pi C(p)|z|^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$\lhd$ В ходе доказательства не уменьшая общности будем считать, что $\mu(1) = 0$.

При $|w| \leqslant q < \min\left(\frac{1}{|\operatorname{Re}\alpha|}, 1\right)$ функция v_p по соотношению (2) представляется в виде ряда

$$v_p(w) = \operatorname{Re}\sum_{j=3}^{\infty} \frac{p + 2(\operatorname{Re}\alpha)^n}{n} w^n.$$

По определению $\operatorname{Re}\alpha = -\frac{p}{2}$, значит, при $|w| \leqslant q < \min\left(\frac{2}{p}, 1\right)$ выполняется оценка

$$v_p(w) \leqslant |w|^3 \sum_{j=1}^{\infty} \left(p + 2\left(\frac{p}{2}\right)^n\right) \frac{|w|^n}{n} \leqslant C(p,q)|w|^3,$$

где $C(p,q) = -p\ln(1-q) - 2\ln\left(1 - \frac{pq}{2}\right)$. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $|z| \leqslant R$ для некоторого $R > 0$. Тогда для всех $T > \frac{R}{q}$

$$\sum_{|\lambda_j| \geqslant T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant C(p,q) \sum_{|\lambda_j| \geqslant T} \frac{|z|^3}{|\lambda_j|^3} = |z|^3 \int_T^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t^3}.$$

Отсюда, интегрируя по частям, для $z \in B(0,R)$, учитывая предположение (1), получим

$$\sum_{|\lambda_j| \geqslant T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant 3C(p,q)R^3 \int_T^{\infty} \frac{\mu(t)d(t)}{t^4} \leqslant \frac{3C(p,q)R^3}{T}.$$

Значит,

$$\sum_{|\lambda_j| \geqslant T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \longrightarrow 0$$

равномерно по $|z| \leqslant R$ при $T \longrightarrow \infty$. Полагая в этой оценке $T = \frac{2|z|}{q}$, имеем

$$\sum_{|\lambda_j| \geqslant \frac{2|z|}{q}} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant \frac{3}{2} C' C(p,q)|z|^2. \tag{3}$$

Для оценки суммы по $|\lambda_j| \leqslant T$ положим

$$a(t) = (1+t)^p\left(1 + pt + |\alpha|^2\right)t^2.$$

Тогда, как легко проверить,

$$v_p(w) \leqslant \ln a(|w|), \quad w \in \mathbb{C},$$

и с учетом предположения $\mu(1) = 0$ имеем

$$\sum_{|\lambda_j| < T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant \int_1^T \ln a\left(\frac{|z|}{t}\right) d\mu(t).$$

Отсюда, интегрируя по частям, получим

$$\sum_{|\lambda_j| < T} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant \mu(T)\ln a\left(\frac{|z|}{T}\right) + |z| \int_1^T \frac{a'\left(\frac{|z|}{t}\right)\mu(t)dt}{t^2 a\left(\frac{|z|}{t}\right)}.$$

Заменой переменных $\frac{|z|}{t} = x$ в интеграле эту оценку запишем в виде

$$\sum_{|\lambda_j|<\frac{2|z|}{q}} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant \mu\left(\frac{2|z|}{q}\right) \ln a\left(\frac{q}{2}\right) + \int\limits_{\frac{2}{q}}^{|z|} \frac{a'(x)}{a(x)} \mu\left(\frac{|z|}{x}\right) dx$$

и используем предположение (1):

$$\sum_{|\lambda_j|<\frac{2|z|}{2}} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant C'\pi|z|^2 \left(\frac{4}{q^2} \ln a\left(\frac{q}{2}\right) + \int\limits_{\frac{2}{q}}^{|z|} \frac{a'(x)\,dx}{x^2 a(x)}\right). \tag{4}$$

Непосредственно вычисляя логарифмическую производную $a(t)$, имеем

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{p}{1+t} + \frac{p+2|\alpha|^2 t}{1+pt+|\alpha|^2 t^2}.$$

Поскольку $|\alpha|^2 = \frac{p(p+1)}{2}$ и в интервале интегрирования можно считать выполненным неравенство $2|\alpha|^2 x \geqslant p$, то

$$\frac{a'(t)}{a(t)} \leqslant \frac{5p}{x},$$

тем самым,

$$\int\limits_{\frac{2}{q}}^{|z|} \frac{a'(x)dx}{x^2 a(x)} \leqslant \frac{q}{128}.$$

Учитывая оценку (4), имеем

$$\sum_{|\lambda_j|<2|z|/2} v_p\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant C'\pi C_1(p,q)|z|^2,$$

где

$$C_1(p,q) = \frac{4}{q^2} \ln a\left(\frac{q}{2}\right) + \frac{q}{128}.$$

Последнее соотношение вместе с (3) доказывает утверждение леммы 1. ▷

◁ Доказательство теоремы 2. Применим лемму при $p = 1$. В этом случае $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ — кубический корень от 1 и

$$v_3(w) = (1 - w^3), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Постоянную $C(p)$ в лемме 1 можно определить более точно. Полагая $a(t) = (1 + t^3)$, получим оценку

$$u(z) = \sum_j v_3\left(\frac{z}{\lambda_j}\right) \leqslant \int\limits_1^\infty \ln\left(1 + \frac{|z|^3}{t^3}\right) d\mu(t).$$

Проинтегрируем по частям, с учетом условия $\mu(1) = 0$ и предположения (1) получим

$$u(z) \leqslant -\int\limits_1^\infty \mu(t) \frac{\partial}{\partial t} \ln\left(1 + \frac{|z|^3}{t^3}\right) dt \leqslant 3C'\pi|z|^3 \int\limits_0^\infty \frac{t\,dt}{t^3 + |z|^3}.$$

После замены переменных $t = |z|y$ имеем

$$u(z) \leqslant 3C'\pi|z|^2 \int\limits_0^\infty \frac{y\,dy}{y^3+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^2 C'|z|^2, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Рассмотрим бесконечное произведение

$$F(z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)\left(1 - \frac{\alpha z}{\lambda_j}\right)\left(1 - \frac{\overline{\alpha} z}{\lambda_j}\right).$$

Поскольку

$$\ln|F(z)| = u(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

то $F(z)$ — целая функция, причем в силу (5) она удовлетворяет оценке

$$|F(z)| \leqslant e^{\frac{2}{\sqrt{3}}C'\pi^2|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если допустим, что $C' < \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, то для некоторого $\beta < 1$ имеем

$$|F(z)|^2 \leqslant e^{\beta\pi|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

и эта функция, обращающаяся в 0 в точках Λ, принадлежит пространству $\mathscr{F}$, и множество Λ не является множеством единственности. Таким образом, $C' \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, следовательно, $D_+(\Lambda) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. Теорема 2 доказана. $\triangleright$

Заметим, что оценка (5) — точная в классе всех множеств Λ, удовлетворяющих условию (1). В самом деле, если $\Lambda \in \mathbb{R}_+$, то

$$u(-x) = \int\limits_0^\infty \ln\left(1 + \frac{x^3}{t^3}\right) d\mu(t) = 3\int\limits_1^\infty \frac{\mu(ry)\,dy}{y(y^3+1)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Если взять $\Lambda = \left\{\sqrt{(C'\pi)^{-1}n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$, то $\mu(t) = [C'\pi t^2] \leqslant C'\pi t^2$ ($[x]$ означает целую часть x) и $\mu(t) \geqslant C'\pi t^2 - 1$. Значит,

$$u(-x) \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^2 C' x^2 - A, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$A = 3\int\limits_1^\infty \frac{dy}{y(y^3+1)}.$$

Замечание. С применением функции v_p, $p = 2$, целой функции

$$F_2(z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha z}{\lambda_j}\right)\left(1 - \frac{\overline{\alpha} z}{\lambda_j}\right)$$

и аппроксимационной теоремы из [5] можно получить оценку $D_+(\Lambda) \geqslant 0,279/\pi$, которая хуже, чем оценка, полученная в теореме 2.

С применением функции v_p, $p = \frac{1}{2}$, и целой функции

$$F_{\frac{1}{2}}(z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)\left(1 - \frac{\alpha z}{\lambda_j}\right)^2 \left(1 - \frac{\overline{\alpha} z}{\lambda_j}\right)^2$$

можно получить оценку $D_+(\Lambda) \geqslant 0,243/\pi$, которая хуже, чем предыдущая.

Литература

1. *Belov Yu., Borichev A., Kuznetsov A.* Upper and lower densities of Gabor Gaussian systems // Applied and Computational Harmonic Analysis.—2020.—Vol. 49, № 2.—P. 438–450. DOI: 10.1016/j.acha.2020.05.003.
2. *Heil C.* History and evolution of the density theorem for Gabor frames // Journal of Fourier Analysis and Applications.—2007.—№ 13.—P. 113–166. DOI: 10.1007/s00041-006-6073-2.
3. *Ascensi G., Lyubarskii Yu., Seip K.* Phase space distribution of Gabor expansions // Applied and Computational Harmonic Analysis.—2009.—Vol. 26, № 2.—P. 277–282. DOI: 10.1016/j.acha.2008.07.005.
4. *Gröchenig K.* Foundations of Time-Frequency Analysis.—Boston: Birkhäuser, 2001.—115 p.—(Applied and Numerical Harmonic Analysis).
5. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Mathematica.—1985.—Vol. 11, № 3.—P. 257–282. DOI: 10.1007/BF01907421.

Статья поступила 10 июля 2025 г.

Исаев Константин Петрович
Уфимский университет науки и технологий,
заведующий кафедрой функционального анализа и программирования
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32
E-mail: orbit81@list.ru
https://orcid.org/0000-0002-3680-0048

Фазуллин Зиганур Юсупович
Уфимский университет науки и технологий,
профессор кафедры функционального анализа и программирования
РОССИЯ, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32
E-mail: fazullinzu@mail.ru

Юлмухаметов Ринад Салаватович
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела теории функций и функционального анализа
РОССИЯ, 450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112
E-mail: yulmukhametov@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-3592-7741

Vladikavkaz Mathematical Journal
2025, Volume 27, Issue 4, P. 38–45

ESTIMATE OF THE UPPER DENSITY OF GABOR SYSTEM

Isaev, K. P.[1], Fazullin, Z. Yu.[1] and Yulmukhametov, R. S.[2]

[1] Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia;
[2] Institute of Mathematics UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St., Ufa 450008, Russia

E-mail: orbit81@list.ru, fazullinzu@mail.ru, yulmukhametov@mail.ru

Abstract. In [1] it was shown that the upper density of a discrete set Λ for which the Gabor system G_Λ is complete in the space $L^2(\mathbb{R})$ cannot be less than $\frac{1}{3\pi}$. It is also known from earlier studies that with a regular distribution of indicators, the upper density is not less than $\frac{2}{\pi}$. In this paper, we refine the estimate in the absence of the regularity condition for the distribution: the upper density of a discrete set Λ for which the

Gabor system G_Λ is complete in the space $L^2(\mathbb{R})$ cannot be less than $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$. Improvement of the estimates is achieved by a more methodical application of symmetrization of this set of indicators of the Gabor system using the known effect of reducing the growth of the modulus of an entire function with a more symmetrical arrangement of its zeros. The possibility of improving the obtained estimate within the proposed method is also discussed using specific examples.

Keywords: completeness, Gabor system, frame, density, fock space, uniqueness set.

AMS Subject Classification: 42C15, 30D15.

For citation: *Isaev, K. P., Fazullin, Z. Yu. and Yulmukhametov, R. S.* Estimate of the Upper Density of Gabor System, *Vladikavkaz Math. J.*, 2025, vol. 27, no. 4, pp. 38–45. (in Russian). DOI: 10.46698/m9533-0085-1293-h.

References

1. *Belov, Yu., Borichev, A. and Kuznetsov, A.* Upper and Lower Densities of Gabor Gaussian Systems, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2020, vol. 49, no. 2, pp. 438–450. DOI: 10.1016/j.acha.2020.05.003.
2. *Heil, C.* History and Evolution of the Density Theorem for Gabor Frames, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2007, vol. 13, pp. 113–166. DOI: 10.1007/s00041-006-6073-2.
3. *Ascensi, G., Lyubarskii, Yu. and Seip, K.* Phase Space Distribution of Gabor Expansions, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, vol. 26, no. 2, pp. 277–282. DOI: 10.1016/j.acha.2008.07.005.
4. *Gröchenig, K. Foundations of Time-Frequency Analysis*, Boston, Birkhäuser, 2001, 115 p.
5. *Yulmukhametov, R. S.* Approximation of Subharmonic Functions, *Analysis Mathematica*, 1985, vol. 11, no. 3, pp. 257–282 (in Russian). DOI: 10.1007/BF01907421.

Received July 10, 2025

Konstantin P. Isaev
Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi St., Ufa 450074, Russia,
Head of Department of Functional Analysis and Programming
E-mail: orbit81@list.ru
https://orcid.org/0000-0002-3680-0048

Ziganur Yu. Fazullin
Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi St., Ufa 450074, Russia,
Professor of Department of Functional Analysis and Programming
E-mail: fazullinzu@mail.ru

Rinad S. Yulmukhametov
Institute of Mathematics UFRC RAS,
112 Chernyshevsky St. , Ufa 450008, Russia,
Chief Researcher of Department of Department of Function Theory and Functional Analysis
E-mail: yulmukhametov@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-3592-7741