Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 1, С. 73–81

УДК 517.982
DOI 10.46698/i0132-3339-6227-v

ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БАНАХОВЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[#]

К. К. Кудайбергенов[1], П. Р. Орынбаев[1]
[1] Владикавказский научный центр РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: karim20061@yandex.ru, paraxatorinbaev@gmail.com

Посвящается памяти профессора
Семёна Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. Задача описания линейных операторов, представимых в виде интегральных, была поставлена Дж. фон Нейманом в середине 30-х годов XX века и долгое время оставалась одной из центральных в теории операторов и функционального анализа. Существенный вклад в ее решение был внесен в 1974 г. Бухваловым, который установил критерий интегральной представимости линейных операторов в идеальных функциональных пространствах. В последующих исследованиях данная тематика получила дальнейшее развитие: в недавней работе Орынбаева и Тасоева был предложен критерий частичной интегральной представимости положительных L_∞-однородных операторов на сигма-конечных пространствах. В настоящей работе вводится новое понятие модульной равноизмеримости, основанное на концепции циклической компактности. С использованием этого подхода доказывается, что всякий частично интегральный оператор, действующий в банаховых идеальных функциональных пространствах, переводит порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества, что существенно дополняет и обобщает ранее известные результаты в данной области.

Ключевые слова: частично интегральный оператор, интегральный оператор, банаховы идеальные функциональные пространства.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

Образец цитирования: *Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р.* Частично интегральные операторы в банаховых идеальных функциональных пространствах // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 73–81. DOI: 10.46698/i0132-3339-6227-v.

1. Введение

В работе [1] Романовским были введены частично интегральные операторы — класс операторов, в которых интегрирование осуществляется лишь по одной переменной, а именно операторы вида

$$Mx(\omega, s) = \int_a^b m(\omega, s, t)x(\omega, t)\, dt, \tag{1}$$

где ядро $m : D \times [a, b] \to \mathbb{R}$ является непрерывной, либо измеримой функцией. Особенностью оператора (1) является то, что интегрирование ведется лишь по одной переменной.

[#]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 24-71-10094, https://rscf.ru/project/24-71-10094/.

Операторы такого вида называются *частично интегральными.* Теория частично интегральных операторов имеет многочисленные приложения в различных областях математики (см. [1–3]). Различные свойства этих операторов изучались в работах [4–6].

В работе [7] Бухвалов привел критерий интегральной представимости линейных операторов в идеальных функциональных пространствах. В работе Орынбаева и Тасоева [8] был получен критерий частично интегральной представимости положительных L_∞-однородных операторов на σ-конечных пространствах. В работе [9] исследована порядковая структура пространства частично интегральных операторов: показано, что пространство абсолютно частично интегральных операторов образует полосу в порядково полной векторной решетке порядково ограниченных операторов, действующих в порядково плотных идеальных пространствах измеримых функций.

В настоящей работе мы вводим новое понятие модульно-равноизмеримости через понятие циклической компактности и доказываем, что всякий частично интегральный оператор, действующий в банаховых идеальных функциональных пространствах, переводит порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества.

Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть $(\Omega, \Sigma_\Omega, m)$, (T, Σ_T, μ) и (S, Σ_S, ν) — измеримые пространства с конечными мерами m, μ и ν соответственно, E и F — банаховы идеальные функциональные пространства в $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$ и $L^0(\Omega \times S, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S, m \otimes \nu)$ соответственно. Всякий частично интегральный оператор $U : E \to F$ переводит порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества.*

2. Предварительные сведения

Необходимые сведения из теории векторных решеток и операторов можно найти в монографиях [10–12].

Всюду далее $(\Omega, \Sigma_\Omega, m)$, (T, Σ_T, μ) и (S, Σ_S, ν) — измеримые пространства с конечными мерами m, μ и ν соответственно; $(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$ и $(\Omega \times S, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S, m \otimes \nu)$ — произведения этих пространств. Символом $\mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ будем обозначать пространство всех действительных измеримых μ-почти всюду конечных функций, а $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Как обычно, функции $f, g \in \mathscr{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ называются эквивалентными, если они равны μ-почти всюду.

Всюду далее E и F — банаховы идеальные функциональные пространства в $L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$ и $L^0(\Omega \times S, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S, m \otimes \nu)$ соответственно. Напомним, что решеточные и алгебраические операции в E и F вычисляются почти всюду поточечно. Банаховы идеальные пространства обладают следующими свойствами:

1. Пространство E является идеальным: если $|y| \leqslant |x|$ и $x \in E$, то $y \in E$.
2. Пространство E является модулем над $L_\infty(\Omega, m)$, т. е.

$$\|hx\|_E \leqslant \|h\|_{L_\infty(\Omega,m)} \|x\|_E.$$

Типичными примерами таких пространств являются пространства L_p, пространства Орлича и пространства Лоренца.

Будем говорить, что оператор $U : E \to F$ является *частично интегральным,* если существует измеримое ядро $k \in \mathscr{L}^0(\Omega \times S \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S \otimes \Sigma_T, m \otimes \nu \otimes \mu)$ такое, что выполняется представление

$$(U(x))(\omega, s) = \int_T k(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t)$$

для всех $x \in E$.

Оператор U называется L_∞-*однородным*, если для всех $h \in L_\infty(\Omega, m)$ и $x \in E$ выполняется равенство

$$U(hx) = hU(x).$$

3. Доказательство основной теоремы

Предложение 3.1. *Пусть E и F — банаховы идеальные функциональные пространства в $L^0(\Omega\times T, \Sigma_\Omega\otimes\Sigma_T, m\otimes\mu)$ и $L^0(\Omega\times S, \Sigma_\Omega\otimes\Sigma_S, m\otimes\nu)$ соответственно, $U : E \to F$ — частично интегральный оператор. Предположим, что U регулярен, и пусть $U = U^+ - U^-$ — его разложение на положительную и отрицательную части. Тогда операторы U^+ и U^- также являются частично интегральными.*

$\lhd$ Поскольку U — частично интегральный оператор, тогда существует измеримая функция $k(\omega, s, t)$ такая, что для любого $x \in E$ и почти всех (ω, s) выполнено

$$(Ux)(\omega, s) = \int\limits_T k(\omega, s, t)\, x(\omega, t)\, d\mu(t).$$

Определим функции

$$k^+(\omega, s, t) = \max\big\{k(\omega, s, t), 0\big\}, \quad k^-(\omega, s, t) = \max\big\{-k(\omega, s, t), 0\big\}.$$

Тогда $k = k^+ - k^-$ и $|k| = k^+ + k^-$. Обе функции k^+ и k^- измеримы.

Зафиксируем произвольный неотрицательный элемент $x \in E$. По определению положительной части оператора U^+ имеем

$$(U^+x)(\omega, s) = \sup\big\{(U(y))(\omega, s) : 0 \leqslant y \leqslant x\big\},$$

где супремум берется в решетке F (и, следовательно, для почти всех (ω, s) как поточечный супремум).

Для любого y, удовлетворяющего $0 \leqslant y \leqslant x$, и почти всех (ω, s)

$$(Uy)(\omega, s) = \int\limits_T k(\omega, s, t) y(\omega, t)\, d\mu(t) \leqslant \int\limits_T k^+(\omega, s, t) y(\omega, t)\, d\mu(t) \leqslant \int\limits_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t).$$

Следовательно,

$$(U^+x)(\omega, s) \leqslant \int\limits_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t). \tag{2}$$

С другой стороны, для фиксированного s рассмотрим функцию

$$y_0(\omega, t) = x(\omega, t) \cdot \chi_{\{(\omega,t)\in\Omega\times T:\, k(\omega,s,t)\geqslant 0\}}.$$

Ясно, что $0 \leqslant y_0 \leqslant x$. Тогда

$$(Uy_0)(\omega, s) = \int\limits_T k(\omega, s, t) y_0(\omega, t)\, d\mu(t) = \int\limits_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t).$$

Поскольку y_0 входит в множество, по которому берется супремум, то

$$(U^+x)(\omega, s) \geqslant \int\limits_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t). \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) получаем равенство для почти всех (ω, s):

$$(U^+x)(\omega, s) = \int\limits_T k^+(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t).$$

Аналогично, для отрицательной части имеем

$$(U^{-}x)(\omega,s)=\sup\big\{(-Uy)(\omega,s)\,:\,0\leqslant y\leqslant x\big\}$$

и

$$(U^{-}x)(\omega,s)=\int\limits_T k^{-}(\omega,s,t)x(\omega,t)\,d\mu(t).$$

Таким образом, для неотрицательных $x\in E$ операторы U^{+} и U^{-} представляются в виде частично интегральных операторов с ядрами k^{+} и k^{-} соответственно. Для произвольного $x\in E$ представление получается по линейности: $x=x^{+}-x^{-}$, где $x^{+}=\max\{x,0\}$, $x^{-}=\max\{-x,0\}$. Итак, U^{+} и U^{-} — частично интегральные операторы. $\rhd$

Теперь напомним определение циклически компактного множества (см. [7]). Пусть ∇ — булева алгебра всех идемпотентов в $L_\infty(\Omega,m)$. Если $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ — сеть в $L^0(\Omega\times T,\Sigma_\Omega\otimes\Sigma_T,m\otimes\mu)$ и $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$ — разбиение единицы в ∇, то ряд $\sum_{\alpha\in A}\pi_\alpha x_\alpha$ (o)-сходится в $L^0(\Omega\times T,\Sigma_\Omega\otimes\Sigma_T,m\otimes\mu)$, и сумма этого ряда называется *перемешиванием* $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ относительно $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$. Эта сумма обозначается через $\operatorname{mix}(\pi_\alpha x_\alpha)$. Для $K\subset L^0(\Omega\times T,\Sigma_\Omega\otimes\Sigma_T,m\otimes\mu)$ через $\operatorname{mix}K$ обозначается множество всех перемешиваний произвольных семейств элементов из K. Множество K называется *циклическим*, если $\operatorname{mix}K=K$.

Для направленного множества A через $\nabla(A)$ обозначается множество всех разбиений единицы в ∇, заиндексированных элементами A. Отношение порядка на $\nabla(A)$ определяется следующим образом:

$$\upsilon_1\leqslant\upsilon_2\Longleftrightarrow\forall\,\alpha,\beta\in A\ (\upsilon_1(\alpha)\wedge\upsilon_2(\beta)\neq 0\Longrightarrow\alpha\leqslant\beta)\ (\upsilon_1,\upsilon_2\in\nabla(A)).$$

Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ — сеть в $L^0(\Omega\times T,\Sigma_\Omega\otimes\Sigma_T,m\otimes\mu)$. Для каждого $\upsilon\in\nabla(A)$ положим $x_\upsilon=\operatorname{mix}(\upsilon(\alpha)x_\alpha)$ и получим новую сеть $(x_\upsilon)_{\upsilon\in\nabla(A)}$. Произвольная подсеть сети $(x_\upsilon)_{\upsilon\in\nabla(A)}$ называется *циклической подсетью* сети $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Подмножество $K\subset L^0(\Omega\times T,\Sigma_\Omega\otimes\Sigma_T,m\otimes\mu)$ называется *циклически компактным*, если оно циклично и всякая сеть в K имеет циклическую подсеть, (o)-сходящуюся к некоторой точке из K. Циклическое множество называется *относительно циклически компактным*, если оно содержится в некотором циклически компактном множестве [7]. Для подмножества K в банаховом идеальном функциональном пространстве E, в определении циклической компактности будем рассматривать сходимость по норме $\|\cdot\|_E$ вместо (o)-сходимости.

Линейный оператор $U:E\to F$ называется *циклически компактным*, если для всякого ограниченного по норме множества B в E множество $U(B)$ относительно циклически компактно [7].

Пусть $a\in L_\infty(S,\nu)$ и $b\in L_\infty(T,\mu)$. Поскольку порядковый интервал в $L_\infty(\Omega\times S,m\otimes\nu)$ является циклически компактным множеством (см. [13, теорема 1.3.7(2)]), то оператор

$$x(\omega,s)\in L_\infty(\Omega\times T,m\otimes\mu)\mapsto a(s)\int\limits_T b(t)x(\omega,t)\,d\mu(t)\in L_\infty(\Omega\times S,m\otimes\nu)\tag{4}$$

является циклически компактным.

Множество $K\subset L^0(T,\Sigma_T,\mu)$ называется *равноизмеримым*, если для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $T_\varepsilon\subset T$ такое, что $\mu(T\setminus T_\varepsilon)<\varepsilon$, и множество $\{x\chi_{T_\varepsilon}:x\in K\}$ является относительно компактным в пространстве $L_\infty(T,\mu)$ по sup-норме.

Это понятие играет фундаментальную роль в теории компактных операторов в банаховых идеальных пространствах. Однако в пространствах типа $L_{p,r}$ ситуация существенно меняется. Как показано в [5, предложение 3], частично интегральные операторы в этих пространствах оказываются компактными лишь в тривиальном случае нулевого ядра. В то же время такие операторы остаются циклически компактными [5, теорема 3].

Это наблюдение показывает, что классическое понятие равноизмеримости оказывается жестким для адекватного описания компактоподобных свойств в модульных (булевозначных) моделях и векторнозначных пространствах. Поэтому естественно искать его обобщение, согласованное с циклической компактностью. Исходя из этого, введем следующее определение.

Циклическое подмножество $K \subset L^0(\Omega \times T, \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_T, m \otimes \mu)$ назовем *модульно-равноизмеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $A_\varepsilon \subset \Omega \times T$ такое, что $(m \otimes \mu)(\Omega \times T \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, и множество $\{x\chi_{A_\varepsilon} : x \in K\}$ является относительно циклически компактным в пространстве $L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu)$ по sup-норме.

Лемма 3.1. *Пусть $U : L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu) \to L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$ — частично интегральный оператор. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $A_\varepsilon \in \Sigma_\Omega \otimes \Sigma_S$ такое, что $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ и оператор $P_0 \circ U$ является циклически компактным, где P_0 означает оператор $P_0(x) = \chi_{A_\varepsilon} x$, $x \in L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$.*

$\lhd$ Покажем, что U является ограниченным оператором. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность в $L_\infty(\Omega \times T,\, m \otimes \mu)$, равномерно сходящаяся к нулю, и пусть

$$U(x_n) \to y \in L_\infty(\Omega \times S,\, m \otimes \nu)$$

равномерно. Тогда по теореме Лебега о мажорированной сходимости имеем

$$(Ux_n)(\omega, s) \to 0 \quad \text{почти всюду на } \Omega \times S.$$

Следовательно, $y = 0$. Тем самым график оператора U замкнут, и по теореме о замкнутом графике заключаем, что U является ограниченным оператором.

По [14, гл. IV, теорема 1.5] U регулярен. Предложение 3.1 влечет, что $|U|$ также является частично интегральным оператором. Пусть $k(\omega, s, t)$ — ядро U. Тогда $|U|$ также является частично интегральным оператором с ядром $|k(\omega, s, t)|$, и поэтому

$$\int\limits_T |k(\omega, s, t)|\, d\mu(t) \in L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu).$$

Следовательно, в силу [4, лемма 2, с. 409] существует последовательность простых функций

$$k_n(\omega, s, t) = \sum_{k=1}^{m_n} a_{k,n} \chi_{A_{k,n}}(\omega) \chi_{B_{k,n}}(s) \chi_{C_{k,n}}(t)$$

такая, что

$$k_n \to k \quad \text{в} \quad L_1(\Omega \times S \times T, m \otimes \nu \otimes \mu).$$

Переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $k_n(\omega, s, t) \to k(\omega, s, t)$ почти всюду на $\Omega \times S \times T$. Положим

$$h_n(\omega, s) = \int\limits_T \big|k_n(\omega, s, t) - k(\omega, s, t)\big|\, d\mu(t).$$

По теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{\Omega \times S} h_n(\omega, s)\, dm \otimes \nu(\omega, s) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Вновь, при необходимости переходя к подпоследовательности, можем считать $h_n(\omega, s) \to 0$ почти всюду на $\Omega \times S$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $m \otimes \nu$ — конечная мера, то по теореме Егорова существует измеримое множество $A_0 \subset \Omega \times S$ такое, что $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_0) < \varepsilon$ и $h_n(\omega, s) \to 0$ равномерно на A_0. Для каждого n определим оператор

$$U_n x(\omega, s) = \chi_{A_0}(\omega, s) \int\limits_T k_n(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t), \quad x \in L_\infty(\Omega \times T, m \otimes \mu).$$

Поскольку k_n — функция с разделяющимися переменными, то каждый оператор U_n является суммой операторов вида (4), и поэтому циклически компактным.

Пусть $\|x\|_{L_\infty(\Omega \times T, m\otimes\mu)} \leqslant 1$. Тогда почти для всех $(\omega, s) \in \Omega \times S$ выполняется

$$\bigl|U_n x(\omega, s) - P_0 U x(\omega, s)\bigr| \leqslant \chi_{A_0}(\omega, s) \int\limits_T |k_n(\omega, s, t) - k(\omega, s, t)|\, |x(\omega, t)|\, d\mu(t) \leqslant \chi_{A_0}(\omega, s) h_n(\omega, s).$$

Следовательно,

$$\bigl\|U_n - P_0 U\bigr\|_{L_\infty} \leqslant \bigl\|\chi_{A_0} h_n\bigr\|_{L_\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, оператор $P_0 U$ является пределом по норме циклически компактных операторов, и следовательно, циклически компактен[2]. ▷

Теперь мы можем привести доказательство теоремы 1.1.

◁ Доказательство теоремы 1.1. Пусть U является частично интегральным оператором. Зафиксируем $0 \leqslant x \in E$ и $\varepsilon > 0$. Так как U является частично интегральным оператором, существует ядро $k(\omega, s, t)$ такое, что

$$U x(\omega, s) = \int\limits_T k(\omega, s, t) x(\omega, t)\, d\mu(t) \in F.$$

Так как

$$(\omega, s) \in \Omega \times S \mapsto \int\limits_T |k(\omega, s, t) x(\omega, t)|\, d\mu(t)$$

— измеримая функция, то существуют число $M > 0$ и множество $A_1 \in \Sigma_\Omega \times \Sigma_S$ с $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_1) < \varepsilon/2$, для которых

$$\int\limits_T |k(\omega, s, t) x(\omega, t)|\, d\mu(t) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (\omega, s) \in A_1.$$

Введем следующее обозначение: $L_x = \{y \in E : \exists\, c > 0,\ |y| \leqslant cx\}$, и пусть P_1 обозначает оператор умножения на χ_{A_1}. Тогда оператор $P_1 \circ U : L_x \to F$ вновь является частично интегральным. По лемме 3.1 существует множество $A_2 \in \Sigma_\Omega \times \Sigma_S$ такое, что $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus A_2) < \varepsilon/2$ и оператор $P_2 P_1 U : L_x \to L_\infty(\Omega \times S, m \otimes \nu)$ циклически компактен, где P_2 — это оператор умножения на χ_{A_2}. Так как $(m \otimes \nu)(\Omega \times S \setminus (A_1 \cap A_2)) < \varepsilon$, получаем, что $U([-x, x])$ является модульно-равноизмеримым, что завершает доказательство. ▷

[2] Всякий циклически компактный оператор в пространстве Банаха — Канторовича допускает представление в виде измеримого расслоения компактных операторов (см. [15]). Поскольку равномерный предел компактных операторов является компактным, отсюда следует, что равномерный предел циклически компактных операторов также является циклически компактным.

В заключение отметим, что остается открытым вопрос о справедливости обратного утверждения к теореме 1.1: является ли всякий L_∞-однородный оператор, переводящий порядковые интервалы в модульно-равноизмеримые множества, частично интегральным? Положительный ответ на этот вопрос привел бы к модульному варианту теоремы Шахермайера и дал бы характеристическое описание класса частично интегральных операторов в терминах их действия на порядковые интервалы [16, 17].

Отметим также, что одним из ключевых инструментов настоящей работы является понятие циклической компактности, введенное более полувека назад профессором А. Г. Кусраевым [13]. Это понятие возникло естественным образом как булевозначный аналог классической компактности. Основы булевозначного анализа были заложены в совместных трудах С. С. Кутателадзе и А. Г. Кусраева [18, 19].

Благодарности. Авторы благодарят анонимного рецензента за тщательное прочтение рукописи и ценные замечания и рекомендации, которые позволили существенно улучшить изложение результатов и общую структуру статьи.

Литература

1. *Romanovsky V. I.* Sur une classe d'equations intégrales linéaires // Acta Math.—1932.—Vol. 59.—P. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. *Appel J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.—New York etc.: Marcel Dekker, 2000. DOI: 10.1201/9781482270402.
3. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Линейные операторы и уравнения с частными интегралами // Тр. Крымской осенней матем. школы-симпозиума. Соврем. матем. Фундам. направления.—М.: Российский университет дружбы народов, 2019.—Т. 65, № 3.—С. 390–433. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
4. *Kudaybergenov K. K., Arziev A. D., Orinbaev P. R., Tanirbergen A. K.* The Mercer's theorem for partial integral operators // J. Math. Sci.—2023.—Vol. 271, № 6.—P. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
5. *Арзиев А. Д., Кудайбергенов К. К., Орынбаев П. Р., Танирберген А. К.* Частично интегральные операторы на пространствах Банаха — Канторовича // Мат. заметки.—2023.—Т. 114, № 1.—С. 18–37. DOI: 10.4213/mzm13703.
6. *Eshkabilov Yu. Kh., Kucharov R. R.* Partial integral operators of Fredholm type on Kaplansky–Hilbert module over L_0 // Vladikavkaz Math. J.—2021.—Vol. 23, № 3.—P. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.
7. *Бухвалов А. В.* Об интегральном представлении линейных операторов // Зап. науч. сем. ЛОМИ.—1974.—Т. 47.—С. 5–14.
8. *Орынбаев П. Р., Тасоев Б. Б.* О частично интегральном представлении линейных положительных операторов // Владикавк. мат. журн.—2025.—Т. 27, № 1.—С. 101–111. DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.
9. *Tasoev B. B.* Order structure of the space of partial integral operators // Сиб. матем. журн.—2026.—(В печати).
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
11. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—New York: Springer, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.
13. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.
14. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin, Heidelberg: Springer, 1974. DOI: 10.1007/978-3-642-65970-6.
15. *Kudaybergenov K. K., Ganiev I. G.* Measurable bundles of compact operators // Methods Funct. Anal. Topology.—2001.—Vol. 7, № 4.—P. 1–5.
16. *Schep A. R.* Compactness properties of an operator which imply that it is an integral operator // Trans. Amer. Math. Soc.—1981.—Vol. 265, № 1.—P. 111–119. DOI: 1090/S0002-9947-1981-0607110-7.
17. *Schachermayer W.* Integral operators on L^p-spaces, Part I // Indiana Univ. Math. J.—1981.—Vol. 30, № 1.—P. 123–140.

18. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—526 с.
19. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics / Ed. A. E. Gutman.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South of Russia. A Mathematical Monograph. Issue 6).

Статья поступила 2 января 2026 г.

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович
Владикавказский научный центр РАН,
главный научный сотрудник лаборатории нелинейных операторов в функцион. пространствах
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: karim20061@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-0311-9683

Орынбаев Парахатдиин Рахмат ули
Владикавказский научный центр РАН,
младший научный сотрудник лаборатории нелинейных операторов в функцион. пространствах
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com
https://orcid.org/0009-0001-8808-651X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 1, P. 73–81

PARTIAL INTEGRAL OPERATORS IN BANACH IDEAL FUNCTION SPACES

Kudaybergenov, K. K.[1] and Orinbaev, P. R.[1]
[1] Vladikavkaz Scientific Center of the RAS,
1 Williams St., Villige of Mikhailovskoye 363110, Russia
E-mail: karim20061@yandex.ru, paraxatorinbaev@gmail.com

Abstract. The problem of describing linear operators representable as integral operators was posed by J. von Neumann in the mid-1930s and for a long time remained one of the central problems in operator theory and functional analysis. A significant contribution to its solution was made in 1974 by Buchvalov, who established a criterion for the integral representability of linear operators in ideal function spaces. In subsequent studies, this topic has been further developed: in a recent work by Orynbayev and Tasoev, a criterion for partial integral representability of positive L_∞-homogeneous operators on sigma-finite spaces was obtained. In the present paper, a new notion of modular equimeasurability is introduced, based on the concept of cyclic compactness. Using this approach, it is proved that every partially integral operator acting in Banach ideal function spaces maps order intervals into modularly equimeasurable sets, which significantly extends and generalizes previously known results in this area.

Keywords: partial integral operator, integral operator, Banach ideal function spaces.

AMS Subject Classification: 46B42, 46B04.

For citation: *Kudaybergenov, K. K. and Orinbaev, P. R.* Partial Integral Operators in Banach Ideal Function Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 73–81 (in Russian). DOI: 10.46698/i0132-3339-6227-v.

References

1. *Romanovsky, V. I.* Sur Une Classe D'Equations Intégrales Linéaires, *Acta Mathematica*, 1932, vol. 59, pp. 99–208. DOI: 10.1007/BF02546501.
2. *Appel, J. M., Kalitvin, A. S. and Zabrejko, P. P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, New York etc., Marcel Dekker, 2000. DOI: 10.1201/9781482270402.

3. *Kalitvin, A. S. and Kalitvin, V. A.* Linear Operators and Equations with Partial Integrals, *Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, Moscow, Peoples' Friendship University of Russia, 2019, vol. 65, no. 3, pp. 390–433 (in Russian). DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433.
4. *Kudaybergenov, K. K., Arziev, A. D., Orinbaev, P. R. and Tanirbergen, A. K.* The Mercer's Theorem for Partial Integral Operators, *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 271, no. 6, pp. 749–761. DOI: 10.1007/s10958-023-06747-w.
5. *Arziev, A. D., Kudaibergenov, K. K., Orynbayev, P. R. and Tanirbergen, A. K.* Partially Integral Operators on Banach–Kantorovich Spaces, *Mathematical Notes*, 2023, vol. 114, no. 1–2, pp. 15–29. DOI: 10.1134/S0001434623070027.
6. *Eshkabilov, Yu. Kh. and Kucharov, R. R.* Partial Integral Operators of Fredholm Type on Kaplansky–Hilbert Module over L_0, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol 23, no. 3, pp. 80–90. DOI: 10.46698/w5172-0182-0041-c.
7. *Bukhvalov, A. V.* On the Integral Representation of Linear Operators, *Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI*, 1974, vol. 47, pp. 5–14 (in Russian).
8. *Orinbayev, P. R. and Tasoev, B. B.* On Partial Integral Representation of Linear Positive Operators, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 101–111 (in Russian). DOI: 10.46698/s1056-5701-7829-j.
9. *Tasoev, B. B.* Order Structure of the Space of Partial Integral Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2026 (In Print).
10. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, Springer, Dordrecht, 2006. DOI: 10.1007/978-1-4020-5008-4.
11. *Kusraev, A. G. Dominated Operators*, New York, Springer, 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
12. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Functional Analysis*, Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
13. *Kusraev, A. G. Vector Duality and Its Applications*, Novosibirsk, Nauka, 1985 (in Russian).
14. *Schaefer, H. H. Banach Lattices and Positive Operators*, Berlin, Heidelberg, Springer, 1974. DOI: 10.1007/978-3-642-65970-6.
15. *Kudaybergenov, K. K. and Ganiev, I. G.* Measurable Bundles of Compact Operators, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2001, vol. 7, no. 4, pp. 1–5.
16. *Schep, A. R.* Compactness Properties of an Operator which Imply That It Is an Integral Operator, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 265, no. 1, pp. 111–119. DOI: 1090/S0002-9947-1981-0607110-7.
17. *Schachermayer, W.* Integral Operators on L^p-Spaces, Part I, *Indiana University Mathematics Journal*, 1981, vol. 30, no. 1, pp. 123–140.
18. *Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. Introduction to Boolean-Valued Analysis*, Moscow, Nauka, 2005, 526 p. (in Russian).
19. *Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. Boolean Valued Analysis: Selected Topics*, Trends in Science: The South of Russia. A Mathematical Monograph. Issue 6, Ed. A. E. Gutman, Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2014, iv+400 p.

Received January 2, 2026

Karimbergen K. Kudaybergenov
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,
Chief Researcher of the Laboratory of Nonlinear Operators in Functional Spaces
E-mail: karim20061@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0003-0311-9683

Parakhatdiin R. Orinbaev
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,
Junior Researcher of the Laboratory of Nonlinear Operators in Functional Spaces
E-mail: paraxatorinbaev@gmail.com
https://orcid.org/0009-0001-8808-651X