Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 1, С. 98–107

УДК 517.98
DOI 10.46698/o1056-6445-9027-m

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ СЕЛЕКТОРОВ#

З. А. Кусраева[1], **А. А. Саадулаева**[1]

[1] Владикавказский научный центр РАН,
Россия, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: zali13@mail.ru, gelieva00@mail.ru

Светлой памяти профессора С. С. Кутателадзе

Аннотация. Рассматривается секвенциально полное топологическое векторное пространство Y и линейно инвариантное семейство $\mathscr{E}$ выпуклых подмножеств Y. Будем говорить, что: $\mathscr{E}$ обладает счетным свойством бинарного пересечения, если всякое счетное подсемейство попарно пересекающихся множеств имеет непустое пересечение; пара $(Y, \mathscr{E})$ допускает счетное продолжение линейных операторов, если для любых сепарабельного метризуемого топологического векторного пространства, его подпространства, нечетного замкнутозначного полунепрерывного сверху веера (субаддитивное положительное однородное многозначное отображение) и линейного оператора, определенного на подпространстве, и являющегося селектором данного веера, существует линейный селектор, продолжающий линейный оператор с подпространства на все пространство. Основной результат утверждает, что пара $(Y, \mathscr{E})$ допускает счетное продолжение линейных непрерывных операторов, если $\mathscr{E}$ обладает счетным свойством бинарного пересечения. Обращение этого результата также имеет место при том дополнительном предположении, что рассматриваемое топологическое векторное пространство локально ограничено.

Ключевые слова: веер, продолжение линейных операторов, свойство счетного бинарного пересечения, сепарабельность, векторная решетка.

AMS Subject Classification: 46G25, 47A40, 47H60, 47L07.

Образец цитирования: *Кусраева З. А., Саадулаева А. А.* О продолжении линейных селекторов // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 1.—С. 98–107. DOI: 10.46698/o1056-6445-9027-m.

1. Введение

Пространством Канторовича[2] (или, короче, *K-пространством*) называют порядково полную векторную решетку. Известно, что пространство Канторовича допускает мажорированное продолжение линейных операторов, см. [1]. Этот результат, установленный в 1935 г. и ставший первой теоремой теории K-пространств, принято называть *теоремой Хана — Банаха — Канторовича*. Обращение, утверждающее, что если упорядоченное векторное пространство допускает мажорированное продолжение линейных операторов, то оно является K-пространством, было получено спустя тридцать с лишним лет независимо Бонайсом и Сильверманом в [2] и Ту в [3]; подробности можно найти в [4]. Новое и весьма изящное доказательство эквивалентности свойства мажорированного продолжения линейных операторов и порядковой полноты упорядоченного векторного пространства образов нашел А. Д. Иоффе в [5, теорема B]. Детальное изложение представлено в книге [6].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-10094, https://rscf.ru/project/24-71-10094/.

[2] В англоязычной литературе чаще используют термин «Дедекиндово полная векторная решетка».

Дальнейшие исследования показали, что в некоторых случаях возможно ослабить требование порядковой полноты пространства образов за счет предъявления к области определения оператора некоторых дополнительных требований. Так, например, Ю. А. Абрамович и Э. Викстед обнаружили в [7, теорема 3.5], что σ-интерполяционное свойство, существенно более слабое, чем порядковая полнота, обеспечивает мажорированное продолжение непрерывных линейных операторов, определенных на сепарабельном банаховом пространстве. Н. Данет распространил этот результат на непрерывные линейные операторы, действующие из метризуемого сепарабельного топологического векторного пространства в топологическое векторное пространство, упорядоченное замкнутым конусом и обладающее сильным σ-интерполяционным свойством, см. [8, теорема 1]. В работе авторов [9, теорема 2] показана необходимость σ-интерполяционного свойства для мажорированного продолжения непрерывных линейных операторов, определенных на сепарабельном и метризуемом топологическом векторном пространстве. Этот результат был доказан в рамках теории множеств Цермело — Френкеля, используя лишь аксиому счетного выбора.

Цель настоящей заметки показать, что теорема Иоффе остается в силе, если заменить в пространстве образов *свойство бинарного пересечения* более слабым — *счетным свойством бинарного пересечения.* Такое ослабление вновь оказывается возможным за счет дополнительных требований метризуемости и сепарабельности, предъявляемых к области определения рассматриваемых операторов. В качестве приложения показывается как из этого результата выводится основной результат статьи [9, теорема 2].

Всюду в тексте символом := обозначаем «равно по определению», $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, а $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел. Все встречающиеся ниже пространства вещественны.

2. Предварительные сведения

Так же, как и в [5], при доказательстве теоремы о продолжении мы используем однородные субаддитивные выпуклозначные отображения, называемые веерами. По-видимому, этот объект впервые появился в [10]. Начнем с соответствующих определений.

Рассмотрим векторные пространства X и Y. Как обычно, $\mathscr{P}(Y)$ — множество всех подмножеств пространства Y. Всюду ниже $\mathscr{E}$ обозначает некоторое семейство непустых выпуклых подмножеств векторного пространства Y, т. е. $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(Y)$ и $\mathscr{E}$ состоит из непустых выпуклых множеств.

Определение 1. Семейство $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(Y)$ называют *линейно инвариантным*, если $\mathscr{E}$ замкнуто относительно алгебраической суммы, сдвигов и умножения на вещественные числа, т. е. таково, что для любых $C, C_1, C_2 \in \mathscr{E}$, $y \in Y$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $C_1 + C_2 \in \mathscr{E}$, $y + C \in \mathscr{E}$ и $\lambda C_1 \in \mathscr{E}$.

Определение 2. Отображение Φ из X в $\mathscr{E}$ называют *веером*, если для любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ выполнены следующие условия:

(1) $0 \in \Phi(0)$;

(2) $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$;

(3) $\Phi(x_1 + x_2) \subset \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$.

Веер называют *нечетным*, если $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 3. Пусть X и Y — топологические векторные пространства. Веер $\Phi : X \to \mathscr{E} \subset \mathscr{P}(Y)$ называют *полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности нуля $V \subset Y$ существует такая окрестность нуля U в X, что $\Phi(x_0 + U) \subset$

$\Phi(x_0)+V$, где $\Phi(A)=\bigcup_{x\in A}\Phi(x)$. Веер *полунепрерывен сверху*, если он полунепрерывен сверху в каждой точке. Говорят, что веер *замкнут*, если его график $\mathrm{Gr}(\Phi):=\{(x,y)\in X\times Y : y\in\Phi(x)\}$ является замкнутым подмножеством $X\times Y$, и *замкнутозначен*, если $\Phi(x)$ — замкнутое подмножество Y для всех $x\in X$.

Определение 4. Линейный оператор $T:X\to Y$ называют *селектором* (или *опорным оператором*) веера Φ, если $Tx\in\Phi(x)$ для всех $x\in X$. Совокупность всех линейных селекторов веера Φ обозначают символом $\partial\Phi$.

Лемма 1. *Для веера $\Phi:X\to\mathscr{E}$ имеют место утверждения:*

(1) *Φ полунепрерывен сверху тогда и только тогда, когда он полунепрерывен сверху в нуле;*

(2) *если Φ полунепрерывен сверху, то любой оператор из $\partial(\Phi)$ непрерывен;*

(3) *если Φ полунепрерывен сверху и замкнутозначен, то Φ замкнут.*

$\lhd$ Полунепрерывность сверху веера Φ в нуле означает, что для любой окрестности нуля $V\subset Y$ существует такая окрестность нуля $U\subset X$, что $\Phi(U)\subset V$. Для произвольного $x_0\in X$ имеем $\Phi(x_0+U)\subset\Phi(x_0)+\Phi(U)\subset\Phi(x_0)+V$, значит, веер Φ полунепрерывен сверху в точке x_0. Если $T\in\partial(\Phi)$, то по определению $T(U)\subset\Phi(U)\subset V$, т. е. T непрерывен. В то же время, предполагая, что $(x_0,y_0)\notin\mathrm{Gr}(\Phi)$, т. е. $y_0\notin\Phi(x_0)$, в силу замкнутости $\Phi(x_0)$ можно подобрать окрестность нуля $V\subset Y$ так, чтобы $(y_0+V)\cap(\Phi(x_0)+V)=\varnothing$. Далее, ввиду определения 3 найдется окрестность нуля $U\subset X$ такая, что $\Phi(x_0+U)\subset\Phi(x_0)+V$, следовательно, $(y_0+V)\cap\Phi(x_0+U)=\varnothing$. Но последнее означает, что $(x_0+U)\times(y_0+V)\cap\mathrm{Gr}(\Phi)=\varnothing$, откуда вытекает замкнутость $\mathrm{Gr}(\Phi)$. Т. е. веер Φ замкнут. $\rhd$

Пусть $\Phi|_{X_0}$ обозначает ограничение веера Φ на подпространство $X_0\subset X$.

Определение 5. Скажем, что пара $(Y,\mathscr{E})$ допускает *продолжение линейных операторов*, если для любых векторного пространства X, подпространства $X_0\subset X$, нечетного веера $\Phi:X\to\mathscr{E}$ и линейного оператора $T_0:X_0\to Y$, являющегося селектором веера $\Phi|_{X_0}$, существует линейный селектор $T:X\to Y$ веера Φ, продолжающий оператор T_0. Если в этом определении X — сепарабельное метризуемое топологическое векторное пространство, а веер Φ замкнутозначен и полунепрерывен сверху, то будем говорить, что пара $(Y,\mathscr{E})$ допускает *счетное продолжение линейных операторов.*

Определение 6. Подмножество $\mathscr{E}_0\subset\mathscr{E}$ называют *сцепленным*, если любая пара множеств из $\mathscr{E}_0$ имеет непустое пересечение. Будем говорить, что $\mathscr{E}$ обладает *свойством бинарного пересечения* (*счетным свойством бинарного пересечения*), если всякое сцепленное подмножество (соответственно, всякое счетное сцепленное подмножество) $\mathscr{E}_0\subset\mathscr{E}$ имеет непустое пересечение.

Теорема 1 (Иоффе)**.** *Пусть Y — векторное пространство и $\mathscr{E}$ — линейно инвариантное семейство выпуклых подмножеств Y. Равносильны утверждения:*

(1) *$\mathscr{E}$ обладает свойством бинарного пересечения;*

(2) *пара $(Y,\mathscr{E})$ допускает продолжение линейных операторов.*

Теорема 1 установлена в [5, теорема B]. Импликацию (1) $\Longrightarrow$ (2) доказали ранее Родригес-Салинас и Бо в работе [10]. Свойство бинарного пересечения для замкнутых шаров банахова пространства выделил Нахбин в [11].

Рассмотрим пример веера в случае, когда Y — упорядоченное векторное пространство, т. е. вещественное векторное пространство, снабженное таким отношением порядка, что неравенства можно складывать и умножать на положительные числа.

Определение 7. Упорядоченное векторное пространство Y обладает *декомпозиционным свойством Рисса*, если $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$ для всех $a,b,c,d\in Y$ при $a\leqslant b$, $c\leqslant d$. Здесь, как обычно, $[a,b]:=\{y\in Y: a\leqslant y\leqslant b\}$ — *порядковый отрезок* в Y. Нетрудно заметить, что декомпозиционное свойство Рисса равносильно следующему правилу сложения порядковых отрезков: $[0,a+b]=[0,a]+[0,b]$ $(a,b\in Y_+)$, где $Y_+=\{y\in Y: x\geqslant 0\}$ — *положительный конус.*

Следующее утверждение, дающее пример веера, см. в [6, утверждение 1.4.5.(2)].

Лемма 2. *Пусть Y — упорядоченное векторное пространство и $\mathscr{E}$ — множество всех порядковых отрезков в Y. Если Y обладает декомпоционным свойством Рисса, то эквивалентны следующие утверждения:*

(a) Φ — *нечетный $\mathscr{E}$-значный веер из X в $\mathscr{E}$;*

(b) $\Phi=\Phi_p$ *для некоторого сублинейного оператора $p: X\to Y$, где по определению $\Phi_p(x):=[-p(-x),\,p(x)]$ для всех $x\in X$.*

Сублинейность p означает, что $p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)$ и $p(\lambda x)=\lambda p(x)$ для всех $x,x_1,x_2\in X$ и $0\leqslant\lambda\in\mathbb{R}$.

Для установления основных результатов настоящей заметки нам понадобится еще один вспомогательный факт о сепарабельных пространствах.

Лемма 3. *Подмножество сепарабельного метрического пространства сепарабельно.*

$\lhd$ Доказательство см., например, в [12, гл. 1, п. 4.4]. Это утверждение выводится из аксиомы счетного выбора (и даже равносильно ей), см. [13, теорема 1.12]. $\rhd$

3. Основной результат

В этом параграфе покажем, что в теореме Иоффе можно ослабить свойство бинарного пересечения, если в качестве области определения операторов взять сепарабельное метризуемое топологическое векторное пространство. Понятие линейно инвариантного семейства, приведенное в определении 1, всюду далее будем понимать в смысле инвариантности относительно сдвига и умножения на вещественное число.

Теорема 2. *Пусть Y — секвенциально полное топологическое векторное пространство и $\mathscr{E}$ — линейно инвариантное семейство выпуклых подмножеств Y. Если $\mathscr{E}$ обладает счетным свойством бинарного пересечения, то пара $(Y,\mathscr{E})$ допускает счетное продолжение линейных операторов.*

$\lhd$ Пусть $\mathscr{E}$ обладает счетным свойством бинарного пересечения и докажем, что пара $(Y,\mathscr{E})$ допускает счетное продолжение линейных операторов.

Шаг 1. Рассмотрим произвольный полунепрерывный сверху нечетный веер $\Phi: X\to\mathscr{E}$ и линейный оператор $T_0: X_0\to Y$ такой, что $T_0x\in\Phi(x)$ для всех $x\in X_0$. В силу леммы 1 оператор T_0 непрерывен. Предположим, что $X_0\neq X$, так как в противном случае доказывать нечего. Возьмем $x_1\in X\setminus X_0$ и обозначим через X_1 подпространство в X, состоящее из всех элементов вида $x':=x+\lambda x_1$, где $x\in X_0$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Покажем, что существует оператор $T_1\in\partial(\Phi|_{X_1})$, который продолжает T_0 на X_1. Если предположить, что искомое продолжение $T_1: X_1\to Y$ существует, и обозначить $y_1:=T_1x_1$, то для любого $x\in X_0$ будет $y_1+T_0x=T_1x_1+T_1x=T_1(x_1+x)\in\Phi(x_1+x)$ или $y_1\in -T_0x+\Phi(x_1+x)$. Таким образом, для существования продолжения T_1 с указанными свойствами необходимо, чтобы все множества вида $-T_0x+\Phi(x_1+x)$, где $x\in X_0$, имели общую точку y_1. Последнее условие является также и достаточным. В самом деле, если какой-либо элемент $y_1\in Y$ содержится в пересечении указанного семейства, то можем положить $T_1x_1:=y_1$. Очевидно, что оператор $T_1: X_1\to Y$, определенный для каждого $x':=\lambda x_1+x$, где $x\in X_0$,

$\lambda \in \mathbb{R}$, равенством $T_1x' := \lambda y_1 + T_0x$, линеен. Кроме того, на основании простейших свойств веера и способа выбора y_1, при $\lambda \neq 0$ выводим

$$T_1x' = \lambda(y_1 + T_0(x/\lambda)) \in \lambda\big(- T_0(x/\lambda) + \Phi(x_1 + x/\lambda) + T_0(x/\lambda)\big) \\ = \lambda\Phi(x_1 + x/\lambda) = \Phi(\lambda x_1 + x) = \Phi(x'). \qquad (1)$$

Отсюда следует, что $T_1 \in \partial(\Phi|_{X_1})$.

Шаг 2. Остается обосновать возможность указанного выбора y_1, т. е. убедиться, что

$$y_1 \in \bigcap\{-T_0x + \Phi(x_1 + x) : x \in X_0\} \neq \varnothing. \qquad (2)$$

Так как по условию X сепарабельно, то по лемме 3 сепарабельным будет и подпространство X_0, следовательно, существует счетное всюду плотное подмножество $D \subset X_0$. Обозначим $C_x := -T_0x + \Phi(x_1 + x)$ и покажем, что счетное множество $\{C_u : u \in D\}$ является сцепленным. Действительно, ввиду линейной инвариантности $\mathscr{E}$ множество C_u входит в $\mathscr{E}$ для любого $u \in D$, и, вновь привлекая определение веера, для $u, v \in D$ выводим

$$0 \in -T_0(u - v) + \Phi(u - v) = -T_0(u - v) + \Phi\big(u + x_1 - (x_1 + v)\big) \\ \subset -T_0u + \Phi(x_1 + u) - \big(- T_0v + \Phi(x_1 + v)\big) = C_u - C_v. \qquad (3)$$

Отсюда видно, что $C_u \cap C_v \neq \varnothing$, следовательно, счетное множество $(C_u)_{u\in D}$ является сцепленным ввиду произвола в выборе u и v. Тем самым, можно выбрать $y_1 \in \bigcap_{u\in D} C_u \neq \varnothing$, так как по условию $\mathscr{E}$ обладает счетным свойством бинарного пересечения. Для произвольного $x \in X_0$ подберем последовательность (u_n) в D, сходящуюся к x. Тогда $y_1 + T_0u_n$ сходится к $y_1 + T_0x$ и $y_1 + T_0u_n \in \Phi(x_1 + u_n)$, следовательно, $y_1 + T_0x \in \Phi(x_1 + x)$ ввиду замкнутости веера Φ (лемма 1). Итак, $y_1 \in -T_0x + \Phi(x_1 + x)$ для любого $x \in X_0$, и мы приходим к требуемому соотношению $T_1 \in \partial(\Phi|_{X_1})$.

Шаг 3. Доказательство можно завершить стандартным применением леммы Куратовского — Цорна, однако мы приведем рассуждения, опирающиеся лишь на аксиому счетного выбора.

Возьмем счетное всюду плотное множество $V := \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ в X. Пусть n_1 — наименьший номер, для которого $v_{n_1} \notin X_0$. Если в приведенных выше рассуждениях возьмем $x_1 := v_{n_1}$, то дополнительно будет $v_1, \dots, v_{n_1} \in X_1$. Далее, пусть n_2 обозначает наименьший номер, для которого $v_{n_2} \notin X_1$. Повторив для $x_2 := v_{n_2}$ те же рассуждения, что и для x_1, найдем подпространство $X_2 \subset X$ и непрерывный линейный оператор $T_2 : X_2 \to Y$ такие, что $v_1, \dots, v_{n_2} \in X_2$, $T_2|_{X_1} = T_1$ и T_2 — непрерывный селектор ограничения веера Φ на X_2, т. е. $T_2x \in \Phi(x)$ для всех $x \in X_2$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность подпространств (X_k) и непрерывных линейных операторов (T_k) из X_k в Y таких, что $v_1, \dots, v_{n_k} \in X_k$, $X_k \subset X_{k+1}$, $T_k = T_{k+1}|_{X_k}$ и $T_k \in \partial(\Phi|_{X_k})$. Положим $X_\sigma := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ и $T_\sigma(x) := T_k(x)$ при $x \in X_k$. Как видно, X_σ — подпространство X, содержащее V, а $T_\sigma : X_\sigma \to Y$ — линейный оператор, продолжающий T_0 и являющийся селектором веера Φ на X_σ. Более того, оператор T_σ непрерывен в силу полунепрерывности сверху веера Φ (см. лемму 1).

Для завершения доказательства стоит лишь заметить, что оператор T_σ допускает продолжение по непрерывности на все X, оставаясь селектором веера Φ. В самом деле, если последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ из X_σ сходится к некоторому $x \in X$, то эта последовательность фундаментальна, а ввиду непрерывности T_σ фундаментальной будет и последовательность $(T_\sigma x_n)$. В силу секвенциальной полноты Y существует предел $\lim_n T_\sigma x_n \in Y$, который обозначим через Tx. Нетрудно проверить, что тем самым корректно определен линейный оператор $T : X \to Y$, причем $T|_{X_\sigma} = T_\sigma$. Так как $Tx_n \in \Phi(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то в силу леммы 1 выполняется также $Tx \in \Phi(x)$ и, тем самым, $T \in \partial\Phi$. $\rhd$

Определение 8. Говорят, что упорядоченное векторное пространство Y обладает *σ-интерполяционным свойством*, если для любых двух последовательностей (x_n) и (z_n) в Y, удовлетворяющих неравенству $x_n \leqslant z_m$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, существует $y \in Y$ такой, что $x_n \leqslant y \leqslant z_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, см. [14, определение 146.6]. Если данное определение выполняется лишь для последовательностей вида $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{u_1, u_2\}$ и $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = \{v_1, v_2\}$, где $u_1, u_2, v_1, v_2 \in Y$, то говорят, что Y обладает *интерполяционным свойством Рисса*.

Следствие 1. *Пусть X и Y — топологические векторные пространства, причем X сепарабельно и метризуемо, а Y секвенциально полно и упорядочено замкнутым и нормальным конусом Y_+. Предположим, что на подпространстве $X_0 \subset X$ задан линейный непрерывный оператор $T_0 : X_0 \to Y$, удовлетворяющий неравенству $T_0x_0 \leqslant p(x_0)$ для всех $x_0 \in X_0$. Если Y обладает сильным σ-интерполяционным свойством, то существует линейный непрерывный оператор $T : X \to Y$ такой, что $Tx_0 = T_0x_0$ для всех $x_0 \in X_0$ и $Tx \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.*

$\lhd$ Нужно применить теорему 2 к вееру Φ_p из леммы 2. При этом нужно принять во внимание следующие факты. В произвольном упорядоченном векторном пространстве интерполяционное свойство Рисса равносильно декомпозиционному свойству Рисса, сильное σ-интерполяционное свойство для Y равносильно справедливости свойства счетного бинарного пересечения для порядковых интервалов в Y. Веер Φ_p будет полунепрерывным сверху тогда и только тогда, когда сублинейный оператор p непрерывен. $\rhd$

Замечание 1. Следствие 1 доказано в [9] и является вариантом теоремы Хана — Банаха — Канторовича, установленной Данетом в [8, теорема 1]. Разница состоит в том, что в [8] используется лемма Цорна, а значит, и аксиома выбора, а в [9] — лишь аксиомой счетного выбора. В то же время в доказательстве из [9] используется продолжение по непрерывности, что требует дополнительного предположения о секвенциальной полноте пространства Y.

4. Обращение основного результата

Обращение теоремы 2 будет доказано при некоторых дополнительных ограничениях на пару $(Y, \mathscr{E})$. Введем соответствующее определение.

Определение 9. Топологическое векторное пространство называют *локально ограниченным*, если в нем имеется ограниченная окрестность нуля. *Квазинормой* на векторном пространстве X называют функцию $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ такую, что для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются условия $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ и $\|x + y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|)$, где C — некоторая константа, не зависящая от x и y. Если квазинорма удовлетворяет условию $\|x+y\|^p \leqslant \|x\|^p+\|y\|^p$ для всех $x, y \in X$, где p — некоторое фиксированное число, $0 < p \leqslant 1$, то ее называют *p-нормой*. *Квазинормированное (p-нормированное) пространство* — пара $(X, \|\cdot\|)$, где $\|\cdot\|$ — квазинорма (соответственно, p-норма) на векторном пространстве X.

Лемма 4. *Для отделимого топологического векторного пространства X равносильны следующие утверждения:*

(1) *X — локально ограниченное пространство;*

(2) *X — p-нормированное пространство для некоторого $0 < p \leqslant 1$;*

(3) *X — квазинормированное пространство.*

$\lhd$ Эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (2) установили Аоки [15] и Ролевич [16], а (1) $\Longleftrightarrow$ (3) — Бурген [17] и Хайерс [18]. $\rhd$

Определение 10. Семейство $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(Y)$ называют *насыщенным*, если $\mathscr{E}$ замкнуто относительно замыкания алгебраической суммы и умножения на вещественные числа, т. е. таково, что для любых $C, C_1, C_2 \in \mathscr{E}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\mathrm{cl}(C_1 + C_2) \in \mathscr{E}$ и $\lambda C \in \mathscr{E}$.

Теорема 3. *Пусть Y — полное локально ограниченное топологическое векторное пространство и $\mathscr{E}$ — насыщенное семейство выпуклых ограниченных подмножеств Y. Если пара $(Y, \mathscr{E})$ допускает счетное продолжение линейных операторов, то $\mathscr{E}$ обладает счетным свойством бинарного пересечения.*

$\lhd$ Пусть B_0 — фиксированная замкнутая ограниченная окрестность нуля в Y. Подберем последовательность замкнутых окрестностей нуля B_k в Y так, чтобы $B_{k+1} + B_{k+1} \subset B_k$ для всех $k = 0, 1, \dots$ Как видно, $\sum_{k=1}^{n} B_k \subset B_0$ для всех $n \geqslant 1$.

Предположим теперь, что пара $(Y, \mathscr{E})$ допускает счетное продолжение линейных операторов. Возьмем сцепленную последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в $\mathscr{E}$ и покажем, что она имеет непустое пересечение. Положим $\gamma'_n := \sup\{\gamma \in \mathbb{R}_+ : \gamma C_n \subset B_n\}$ и $\gamma_n := \min\{1, \gamma'_n\}$. Непосредственно из определений видно, что $\gamma_n > 0$ и $\gamma_n C_n \subset B_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В качестве пространства X возьмем множество всех вещественных последовательностей, имеющих лишь конечное число ненулевых членов, с нормой

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n|}{\gamma_n}, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X.$$

Подпространство $X_0 \subset X$ определим следующей формулой:

$$X_0 := \Big\{ x := (x_n) \in X : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0 \Big\}.$$

Определим теперь отображение $\Phi : X \to \mathscr{E}$ соотношением

$$\Phi : x \mapsto \mathrm{cl} \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n C_n \quad (x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X),$$

где $\mathrm{cl}\, A$ — замыкание множества A. Как видно, $\Phi(x) \in \mathscr{E}$ ввиду насыщенности $\mathscr{E}$ и отображение Φ является нечетным и замкнутозначным веером. Покажем, что Φ также полунепрерывен сверху.

Рассмотрим произвольную симметричную окрестность нуля V (т. е. $V = -V$) в Y. В силу ограниченности B_0 можно подобрать число $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon B_0 \subset V$. Если $x = (x_n) \in X$ и $N(x)$ обозначает наименьшее натуральное число такое, что $x_n = 0$ для всех $n \geqslant N(x)$, то имеем

$$\Phi(x) = \mathrm{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} x_n C_n = \mathrm{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} \frac{x_n}{\gamma_n} \gamma_n C_n \subset \mathrm{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} \|x\|\, \mathrm{cl}\, B_n = \|x\|\, \mathrm{cl} \sum_{n=1}^{N(x)} B_n \subset \|x\| B_0 \subset \frac{\|x\|}{\varepsilon} V.$$

Отсюда видно, что если $\|x\| \leqslant \varepsilon$, то $\Phi(x) \subset V$. Следовательно, $\Phi(U) \subset V$, где U — это шар радиуса ε в X. Тем самым, веер Φ полунепрерывен сверху.

Покажем, что нулевой оператор является селектором ограничения веера Φ на X_0. Если $x \in X_0$, то по определению подпространства X_0 выполнено равенство $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+ = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^-$, где $x_n^+ := \max\{x_n, 0\}$ и $x_n^- := \max\{-x_n, 0\}$. По лемме о двойном разбиении существует матрица $(x_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ с положительными элементами $0 \leqslant x_{nk} \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} x_{nk} = x_n^+, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{nk} = x_k^- \quad (n, k \in \mathbb{N}).$$

По определению веера Φ имеет место следующая цепочка равенств:

$$\Phi(x) = \mathrm{cl}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^+ C_n - \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k^- C_k\right) = \mathrm{cl}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{nk}C_k - \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} x_{nk}C_n\right)$$
$$= \mathrm{cl}\left(\sum_{n,k\in\mathbb{N}} x_{nk}(C_k - C_n)\right) \quad (x \in X_0).$$

В силу сцепленности последовательности (C_n) имеем $C_n \cap C_k \neq \varnothing$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$, что равносильно $0 \in C_k - C_n$. А из последнего следует, что $0 \in \Phi(x)$ при $x \in X_0$. По условию этот селектор допускает распространение до линейного селектора T, заданного на всем X. Подробнее, существует линейный оператор $T : X \to Y$, для которого $Tx \in \Phi(x)$ при каждом $x \in X$, а также $Tx_0 = 0$ для всех $x_0 \in X_0$.

Теперь можем указать общую точку $y \in Y$ рассматриваемой сцепленной последовательности. Возьмем последовательность векторов $\mathbf{e}_n = (e_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ в X такую, что $e_{nk} = 0$ для всех $k \neq n$ и $e_{nn} = 1$. Обозначим $\mathbf{u}_{nk} := \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_k \in X_0$. Тогда $0 = T(\mathbf{u}_{nk}) = T\mathbf{e}_n - T\mathbf{e}_k$. Следовательно, $T\mathbf{e}_n = T\mathbf{e}_k =: y$ при любых $n, k \in \mathbb{N}$. Тем самым $y = T\mathbf{e}_n \in \Phi(\mathbf{e}_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Заметим, наконец, что $\Phi(\mathbf{e}_n) = \mathrm{cl}\sum_{k\in\mathbb{N}} e_{nk}C_k = C_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, пересечение семейства $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержит элемент y, что и завершает проверку наличия счетного свойства бинарного пересечения у семейства $\mathscr{E}$. $\rhd$

Следствие 2. *Пусть Y — квазибанахово пространство и $\mathscr{E}$ — насыщенное и линейно инвариантное семейство выпуклых ограниченных подмножеств Y. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) *$\mathscr{E}$ обладает счетным свойством бинарного пересечения;*

(2) *пара $(Y, \mathscr{E})$ обладает счетным свойством мажорированного продолжения.*

$\lhd$ При указанных условиях применимы теоремы 1 и 2. $\rhd$

Замечание 2. Обращение следствия 1 имеет место, если положительный конус является воспроизводящим, см. [9]. Однако этот результат не следует из теоремы 3, в формулировке которой имеется дополнительное требование локальной ограниченности. Нам неизвестно, можно ли в теореме 3 опустить условие локальной ограниченности.

Литература

1. *Канторович Л. В.* О полуупорядоченых линейных пространствах и их приложениях к теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1–2.—С. 11–14.
2. *Bonnice W., Silvermann R.* The Hahn–Banach extension and the least upper bound properties are equivalent // Proc. Amer. Math. Soc.—1967.—Vol. 18, № 5.—P. 843–849. DOI: 10.1090/S0002-9939-1967-0215050-9.
3. *To T.-O.* The equivalence of the least upper bound property in ordered vector spaces // Proc. Amer. Math. Soc.—1971.—Vol. 30, № 2.—P. 287–295. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0417746-3.
4. *Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.* Упорядоченные векторные пространства.—Новосибирск: Наука, 1978.
5. *Ioffe A. D.* A new proof of the equivalence of the Hanch–Banach extension and the least upper bound properties // Proc. of the Amer. Math.—1981.—Vol. 82, № 3.—P. 385–389. DOI: 10.1090/s0002-9939-1981-0612725-1.
6. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление: теория и приложения.—М.: Наука, 2007.
7. *Abramovich Yu. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford.—1993.—Vol. 44, № 3.—P. 257–270.
8. *Dănet N.* The space of regular operators with the Riesz decomposition property // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl.—2002.—Vol. 68.—P. 373–380.

9. *Кусраева З. А., Гелиева А. А.* О мажорированном продолжении линейных операторов // Матем. заметки.—2020.—Т. 108, № 2.—С. 190–199. DOI: 10.4213/mzm12580.
10. *Rodríguez-Salinas B., Bou L.* A Hahn–Banach theorem for arbitrary vector spaces // Boll. Un. Mat. Ital.—1974.—Vol. 4, № 10.—P. 390–393.
11. *Nachbin L.* A theorem of the Hahn–Banach type for linear transformations // Trans. Amer. Math. Soc.—1950.—Vol. 68, № 1.—P. 28–46. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0032932-3.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.
13. *Bentley H. L., Herrlich H.* Countable choice and pseudometric spaces // Topology and Its Applications.—1998.—Vol. 85, № 1–3.—P. 153–164. DOI: 10.1016/S0166-8641(97)00138-7.
14. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces II.—Amsterdam: North Holland, 1983.
15. *Aoki T.* Locally bounded linear topological spaces // Proc. Imp. Acad. Tokyo.—1942.—Vol. 18, issue 10.—P. 588–594. DOI: 10.3792/pia/1195573733.
16. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces.—Warszawa: Hafner Press, 1972.
17. *Bourgin T. H.* Linear topological spaces // Amer. J. Math.—1943.—Vol. 65, № 4.—P. 637–659. DOI: 10.2307/2371871.
18. *Hyers D. H.* Locally bounded linear topological spaces // Rev. Ci. Lima.—1939.—Vol. 41.—P. 555–574.

Статья поступила 28 декабря 2025 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Владикавказский научный центр РАН,
ведущий научный сотрудник лаборатории нелинейных операторов в функцион. пространствах
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888

Саадулаева Алина Альбертовна
Владикавказский научный центр РАН,
младший научный сотрудник лаборатории нелинейных операторов в функцион. пространствах
РОССИЯ, 363110, с. Михайловское, ул. Вильямса, 1
E-mail: gelieva00@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 1, P. 98–107

ON EXTENSION OF LINEAR SELECTORS

Kusraeva, Z. A.[1] and Saadulaeva, A. A.[1]

[1] Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Mikhailovskoye Village 363110, Russia

E-mail: zali13@mail.ru, gelieva00@mail.ru

Abstract. We consider a sequentially complete topological vector space Y and a linearly invariant family $\mathscr{E}$ of convex subsets of Y. We say that: $\mathscr{E}$ has the countable binary intersection property if every countable subfamily of pairwise intersecting sets has a nonempty intersection; a pair $(Y, \mathscr{E})$ is said to admit a countable extension of linear operators if for any separable metrizable topological vector space, its subspace, odd closed-valued upper semicontinuous fan (subadditive positively homogeneous set-valued mapping), and a linear operator defined on the subspace and being a selector of the given fan, there exists a linear selector that extends given linear operator from a subspace to the entire space. The main result states that the pair $(Y, \mathscr{E})$ admits a countable extension of continuous linear operators if E has the countable binary intersection property. The inverse to this result also holds under the additional assumption that the topological vector space under consideration is locally bounded.

Keywords: fan, extension of linear operators, countable binary intersection property, separability, vector lattice.

AMS Subject Classification: 46G25, 47A40, 47H60, 47L07.

For citation: *Kusraeva, Z. A. and Saadulaeva, A. A.* On Extension of Linear Selectors, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 1, pp. 98–107 (in Russian). DOI: 10.46698/o1056-6445-9027-m.

References

1. *Kantorovich, L. V.* On Partially Ordered Linear Spaces and Their Applications to the Theory of Linear Operations, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1935, vol. 4, no. 1–2, pp. 11–14 (in Russian).
2. *Bonnice, W. and Silvermann, R.* The Hahn–Banach Extension and the Least Upper Bound Properties are Equivalent, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1967, vol. 18, no. 5, pp. 843–849. DOI: 10.1090/S0002-9939-1967-0215050-9.
3. *To, T.-O.* The Equivalence of the Least Upper Bound Property in Ordered Vector Spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1971, vol. 30, no. 2, pp. 287–295. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0417746-3.
4. *Akilov, G. P. and Kutateladze, S. S. Uporyadochennye vektornye prostranstva* [Ordered Vector Spaces], Novosibirsk, Nauka, 1978 (in Russian).
5. *Ioffe, A. D.* A New Proof of the Equivalence of the Hanch–Banach Extension and the Least Upper Bound Properties, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 82, no. 3, pp. 385–389. DOI: 10.1090/s0002-9939-1981-0612725-1.
6. *Kusraev, A. G. and Kutateladze, S. S. Subdifferentials. Theory and Applications*, Dordrecht, Kluwer, 1995.
7. *Abramovich, Yu. A. and Wickstead, A. W.* The Regularity of Order Bounded Operators into $C(K)$. II, *The Quarterly Journal of Mathematics. Oxford Second Series*, 1993, vol. 44, no. 3, pp. 257–270.
8. *Dănet, N.* The Space of Regular Operators with the Riesz Decomposition Property, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl.*, 2002, vol. 68, pp. 373–380.
9. *Kusraeva, Z. A. and Gelieva, A. A.* On Dominated Extension of Linear Operators, *Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, no. 2, pp. 171–178. DOI: 10.1134/S0001434620070184.
10. *Rodríguez-Salinas, B. and Bou, L.* A Hahn–Banach Theorem for Arbitrary Vector Spaces, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 1974, vol. 10, no. 4, pp. 390–393.
11. *Nachbin, L.* A Theorem of the Hahn–Banach Type for Linear Transformations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1950, vol. 68, no. 1, pp. 28–46. DOI: 10.1090/S0002-9947-1950-0032932-3.
12. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Funkcional'nyj analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
13. *Bentley, H. L. and Herrlich, H.* Countable Choice and Pseudometric Spaces *Topology and Its Applications*, 1998, vol. 85, no. 1–3, pp. 153–164. DOI: 10.1016/S0166-8641(97)00138-7.
14. *Zaanen, A. C. Riesz Spaces II*, Amsterdam, North Holland, 1983.
15. *Aoki, T.* Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Proceedings of the Imperial Academy*, 1942, vol. 18, no. 10, pp. 588–594. DOI: 10.3792/pia/1195573733.
16. *Rolewicz, S. Metric Linear Spaces*, Warszawa, Hafner Press, 1972.
17. *Bourgin, T. H.* Linear Topological Spaces, *American Journal of Mathematics*, 1943, vol. 65, no. 4, pp. 637–659. DOI: 10.2307/2371871.
18. *Hyers, D. H.* Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Revista de Ciencias* (*Lima*), 1939, vol. 41, pp. 555–574.

Received December 28, 2025

Zalina A. Kusraeva
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,
Leading Researcher
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888

Alina A. Saadulaeva
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
1 Williams St., Mikhaylovskoye Village 363110, Russia,
Junior Researcher, PhD Student
E-mail: gelieva00@mail.ru