Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 2, С. 80–90

УДК 517.982.22
DOI 10.46698/d4220-2436-3949-r

ОБЩИЕ ОПЕРАТОРЫ УСРЕДНЕНИЯ И БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ#

Р. Е. Зволинский[1], **А. С. Усачев**[2]

[1] Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1;
[2] Центральный южный университет,
Китай, 410085, Чанша, Хунань

E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com, dr.alex.usachev@gmail.com

Нашему учителю Евгению Михайловичу Семёнову
по случаю его 85-летия

Аннотация. В работе исследуются общие операторы усреднения, определенные на пространстве ограниченных вещественных последовательностей. Доказаны достаточные условия того, что эти операторы отображают пространство почти сходящихся последовательностей в себя и в подпространство сходящихся последовательностей. В качестве следствия из этих результатов получены достаточные условия существования банаховых пределов, инвариантных относительно этих операторов усреднения. Исследованы свойства множеств таких банаховых пределов, в частности, вычислен их диаметр. Для нескольких конкретных операторов усреднения установлена функциональная характеристика. Во всех случаях она оказалась непрерывной, но отличной от функциональной характеристики банаховых пределов, инвариантных относительно оператора Чезаро. Таким образом, показано, что множества банаховых пределов, инвариантных относительно этих операторов усреднения, дизъюнктны и между собой, и с множеством банаховых пределов, инвариантных относительно оператора Чезаро. В противоположном направлении получены достаточные условия совпадения множеств банаховых пределов, инвариантных относительно разных операторов усреднения.

Ключевые слова: банаховы пределы, оператор усреднения, инвариантные подмножества.

AMS Subject Classification: 46B45.

Образец цитирования: *Зволинский Р. Е., Усачев А. С.* Общие операторы усреднения и банаховы пределы // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 2.—С. 80–90. DOI: 10.46698/d4220-2436-3949-r.

1. Введение и предварительные сведения

Через ℓ_∞ обозначается пространство вещественных ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с обычной полуупорядоченностью и нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Через c обозначается подпространство сходящихся последовательностей, а через c_s — подпространство последовательностей, сходящихся к $s \in \mathbb{R}$.

#Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 24-21-00220.
© 2026 Зволинский Р. Е., Усачев А. С.

Определение 1. Линейный функционал ω на ℓ_∞ называется *обобщенным пределом*, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(x) \geqslant 0$, если $x \geqslant 0$,

2) $\omega(x) = a$, если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Обобщенные пределы, инвариантные относительно оператора сдвига, называются банаховыми пределами. Более формально это понятие вводится в следующем определении.

Определение 2. Линейный функционал B на ℓ_∞ называется *банаховым пределом*, если

1) $Bx \geqslant 0$, если $x \geqslant 0$,

2) $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots)$,

3) $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига влево, т. е. $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром [1], а доказательство было опубликовано в книге С. Банаха [2, глава II, § 2]. Множество банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Легко видеть, что $\mathfrak{B}$ есть замкнутое (в слабой* топологии) выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^*.

Как следует из определения, все банаховы пределы совпадают со значением классического предела на пространстве сходящихся последовательностей. Г. Г. Лоренц показал, что таким свойством обладают не только сходящиеся последовательности. В работе [3] он доказал, что для заданных $x \in \ell_\infty$, $s \in \mathbb{R}$, равенство $Bx = s$ справедливо для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = s$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. В этом случае говорят, что последовательность x почти сходится к s. Подпространство всех последовательностей, почти сходящихся к s, обозначается через ac_s, а пространство всех почти сходящихся последовательностей обозначается через ac. Легко видеть, что эти пространства являются замкнутыми подпространствами в ℓ_∞.

В работе [4] Л. Сачестон дополнил результат Лоренца, показав, что

$$q(x) \leqslant Bx \leqslant p(x)$$

для любых $x \in \ell_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$, где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

В этом случае почти сходимость к числу s последовательности x эквивалентна равенству $q(x) = p(x) = s$.

Нам понадобится следующее подпространство пространства ℓ_∞:

$$bs = \left\{ x \in \ell_\infty : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| < \infty \right\}.$$

Легко видеть, что $bs = (T - I)\ell_\infty \subset ac_0$, где I — тождественный оператор в ℓ_∞.

Обозначим через Γ множество линейных ограниченных операторов H в ℓ_∞, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $Hx \geqslant 0$, если $x \geqslant 0$ и $H\mathbb{1} = \mathbb{1}$,

(ii) $Hc_0 \subset c_0$,

(iii) $\limsup_{j\to\infty}(A(I - T)x)_j \geqslant 0$ для всех $x \in \ell_\infty$ и $A \in R(H) = \operatorname{conv}\{H^k : k = 1, 2, \ldots\}$, где conv обозначает выпуклую оболочку.

В [5, теорема 4] доказано, что для любого $H \in \Gamma$ существует H-инвариантный банахов предел, т. е. такой $B \in \mathfrak{B}$, что $Bx = BHx$ для всех $x \in \ell_\infty$. Множество таких банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}(H)$.

Условиям (i)–(iii) удовлетворяют оператор Чезаро

$$(Cx)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

и операторы растяжения

$$\sigma_n x = (\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \ldots, x_2}_{n}, \ldots), \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$$

Поэтому множества $\mathfrak{B}(C)$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ непусты для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Кроме того, $\mathfrak{B}(C) \subset \mathfrak{B}(\sigma_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ [6, теорема 3] и $\mathfrak{B}(\sigma_m) \subset \mathfrak{B}(\sigma_{m^k})$ для всех $m, k \in \mathbb{N}$, $m, k \geqslant 2$, и это вложение строгое [7, теорема 9]. В работе [8] было доказано, что $\mathfrak{B}(C) \subset \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathfrak{B}(\sigma_n)$ и это вложение также строгое.

Каждому $B \in \mathfrak{B}$ поставим в соответствие функцию

$$\gamma_B(t) = B\left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^n, 2^{n+t})}\right),$$

определенную на $[0, 1]$, где χ_A — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{N}$. Эта функция была введена в статье [9] в качестве функциональной характеристики, позволяющей описывать свойства банаховых пределов в терминах неубывающих на отрезке $[0, 1]$ функций.

Нам понадобится следующий простой результат (см. также [10]).

Лемма 1. *Пусть $\omega \in \ell_\infty^*$ такой, что $\omega \geqslant 0$ и $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Для любых $x, y \in \ell_\infty$ таких, что $\omega(x) = s$ и либо $x \geqslant s \cdot \mathbb{1}$, либо $x \leqslant s \cdot \mathbb{1}$, справедливо равенство*

$$\omega(xy) = s \cdot \omega(y).$$

$\triangleleft$ Используя свойства функционала ω, получаем

$$0 \leqslant |\omega((x - s \cdot \mathbb{1})y)| \leqslant \omega(|x - s \cdot \mathbb{1}|\|y\|_{\ell_\infty}) \leqslant \pm\|y\|_{\ell_\infty} \cdot \omega(x - s \cdot \mathbb{1}) = 0.$$

Утверждение следует из линейности ω. $\triangleright$

2. Основные результаты

Для последовательностей $0 \leqslant a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$ определим общий оператор усреднения $D_{a,b} : \ell_\infty \to \ell_\infty$ по формуле

$$(D_{a,b}x)_n = \frac{x_{a_n+1} + x_{a_n+2} + \ldots + x_{b_n}}{b_n - a_n}.$$

В литературе также встречаются названия «общий оператор Чезаро» и «отложенный (deferred) оператор Чезаро». Легко видеть, что при $b_n = n$ и $a_n = 0$, имеем $D_{a,b} = C$. В работе [11] изучалась связь между операторами $D_{a,b}$ и классическим оператором Чезаро C. В данной работе мы исследуем множества банаховых пределов, инвариантных относительно операторов $D_{a,b}$.

Следующий пример показывает, что класс операторов $D_{a,b}$ достаточно широк.

Пример 1. 1) Если $b_n = n$ и $a_n = n-1$, то $D_{a,b} = I$. Следовательно, множество $\mathfrak{B}(D_{a,b})$ банаховых пределов, инвариантных относительно оператора $D_{a,b}$, совпадает с множеством $\mathfrak{B}$ всех банаховых пределов.

2) Если $b_n = 2n$ и $a_n = 2n-1$, то $(D_{a,b}x)_n = x_{2n}$ для любого $x \in \ell_\infty$. В таком случае для почти сходящейся к нулю последовательности $x = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ имеем $D_{a,b}x = -\mathbb{1}$. Тогда

$$0 = B(x) \neq B(D_{a,b}x) = -1$$

для любого $B \in \mathfrak{B}$ и, следовательно, $\mathfrak{B}(D_{a,b}) = \varnothing$.

Нам понадобится понятие сильно регулярных операторов, введенное Г. Г. Лоренцем [3, § 5]: линейный ограниченный оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ называется сильно регулярным, если $H : ac_s \to c_s$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

Утверждение 1. *Пусть $0 \leqslant a_n < b_n$ и $b_n \to \infty$, $n \to \infty$. Оператор $D_{a,b}$ является сильно регулярным тогда и только тогда, когда $b_n - a_n \to \infty$.*

$\lhd$ Как доказано в [3, теорема 7], оператор $H = (h_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ является сильно регулярным тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |h_{nk} - h_{n,k+1}| = 0. \tag{1}$$

Так как оператор $D_{a,b}$ имеет матричное представление $D_{a,b} = (h_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$, где

$$h_{nk} = \frac{1}{b_n - a_n}, \quad a_n < k \leqslant b_n,\ n \in \mathbb{N},$$

то выражение (1) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |h_{nk} - h_{n,k+1}| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{b_n - a_n}.$$

Следовательно, оператор $D_{a,b}$ является сильно регулярным тогда и только тогда, когда $b_n - a_n \to \infty$. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть $0 \leqslant a_n < b_n$ и $b_n \to \infty$, $n \to \infty$. Если $b_n - a_n \to \infty$, то $\mathfrak{B}(D_{a,b}) \neq \varnothing$.*

$\lhd$ Проверим принадлежность оператора $D_{a,b}$ множеству Γ. Легко видеть, что условия (i) и (ii) выполнены. Проверим условие (iii). Из утверждения 1 следует, что $D_{a,b} : ac_0 \to c_0$. Так как $(T - I)\ell_\infty = bs \subset ac_0$, то

$$\limsup_{j\to\infty} (D_{a,b}(I - T)x)_j = \lim_{j\to\infty} (D_{a,b}(I - T)x)_j = 0$$

для всех $x \in \ell_\infty$. Так как $c_0 \subset ac_0$, то эти равенства справедливы и для степеней $D_{a,b}^k$ оператора $D_{a,b}$, а, следовательно, и для любого $A \in R(D_{a,b}) = \operatorname{conv}\left\{D_{a,b}^k : k = 1, 2, \ldots\right\}$. Таким образом, выполнено условие (iii) и $D_{a,b} \in \Gamma$. Утверждение следует из [5, теорема 4]. $\rhd$

Следующий результат показывает, что в условиях теоремы 1 множество $\mathfrak{B}(D_{a,b})$ достаточно велико.

Утверждение 2. *Пусть $0 \leqslant a_n < b_n$ и $b_n \to \infty$, $n \to \infty$. Если $b_n - a_n \to \infty$, то диаметр множества $\mathfrak{B}(D_{a,b})$ равен 2, т. е.*

$$\operatorname{diam}\mathfrak{B}(D_{a,b}) = \sup_{B_1,B_2\in\mathfrak{B}(D_{a,b})} \|B_1 - B_2\|_{\ell_\infty^*} = 2.$$

$\lhd$ Помимо условий (i)–(iii) из раздела 1 оператор $D_{a,b}$ удовлетворяет следующим условиям:

(iv) для любых $x, x_k \in \ell_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, условие $x_k \downarrow x$ (в том смысле, что $(x_k)_j$ монотонно убывает и сходится к x_j при $k \to \infty$ для любого $j \in \mathbb{N}$) влечет $D_{a,b}x_k \downarrow D_{a,b}x$. Действительно, если $(x_k)_j > (x_{k+1})_j$ и $(x_k)_j \to x_j$ при $k \to \infty$, то

$$(D_{a,b}x_k)_j = \frac{1}{b_j - a_j} \sum_{i=a_j+1}^{b_j} (x_k)_i > \frac{1}{b_j - a_j} \sum_{i=a_j+1}^{b_j} (x_{k+1})_i = (D_{a,b}x_{k+1})_j$$

и $(D_{a,b}x_k)_j \to (D_{a,b}x)_j$ при $k \to \infty$;

(v) оператор $D_{a,b}(I - T)$ отображает ℓ_∞ в c_0. Действительно, так как $(I - T)\ell_\infty = bs \subset ac_0$, то из утверждения 1 следует, что $D_{a,b}(I - T) : \ell_\infty \to c_0$.

Утверждение следует из [5, теорема 9]. $\rhd$

Условие в теореме 1 можно ослабить. Для этого нам потребуется следующее определение [12]: линейный ограниченный оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ называется $\mathfrak{B}$-регулярным, если $BH \in \mathfrak{B}$ для любого $B \in \mathfrak{B}$.

В работе [12, утверждение 3.2] приводится следующее необходимое и достаточное условие $\mathfrak{B}$-регулярности: линейный ограниченный оператор $H : \ell_\infty \to \ell_\infty$ является $\mathfrak{B}$-регулярным тогда и только тогда, когда

(i′) $q(Hx) \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$,

(ii′) $H\mathbb{1} \in ac_1$,

(iii′) $H : ac_0 \to ac_0$.

Следующий результат описывает условия на последовательности $0 < a_n < b_n$, при которых для оператора $D_{a,b}$ выполнено (iii′).

Лемма 2. *Пусть $0 \leqslant a_n < b_n$ и $b_n \to \infty$, $n \to \infty$. Если последовательность $\left\{\frac{1}{b_n - a_n}\right\}$ принадлежит ac_0, то оператор $D_{a,b}$ отображает ac_0 в ac_0. Если интервалы $[a_n + 1, b_n]$ попарно дизъюнктны для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, то верно и обратное.*

$\lhd$ Для любого $y \in bs$ существует $x \in \ell_\infty$ такой, что $y = Tx - x$. Тогда

$$(D_{a,b}y)_n = (D_{a,b}Tx)_n - (D_{a,b}x)_n = \frac{x_{b_n+1} - x_{a_n+1}}{b_n - a_n}.$$

Так как $B\left\{\frac{1}{b_n - a_n}\right\} = 0$ для любого $B \in \mathfrak{B}$ и $\frac{1}{b_n - a_n} \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, то из леммы 1 следует, что $B(D_{a,b}y) = 0$ для любых $B \in \mathfrak{B}$ и $y \in bs$. Т. е. $D_{a,b}y \in ac_0$ для любого $y \in bs$.

Пусть $y \in ac_0$. Так как множество ac_0 совпадает с замыканием множества bs в пространстве ℓ_∞ [13, теорема 3], то существует последовательность $\{y_k \in bs\}_{k=1}^\infty$ такая, что $\|y - y_k\|_{\ell_\infty} \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку $\|D_{a,b}\|_{\ell_\infty \to \ell_\infty} = 1$, то

$$\|D_{a,b}y - D_{a,b}y_k\|_{\ell_\infty} \leqslant \|y - y_k\|_{\ell_\infty} \to 0.$$

Так как $D_{a,b}y_k \in ac_0$ и множество ac_0 замкнуто, то $D_{a,b}y \in ac_0$.

Пусть интервалы $[a_n+1, b_n]$ попарно дизъюнктны для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Если $D_{a,b}y \in ac_0$ для любого $y \in ac_0$, то, в частности, $D_{a,b}(Tx-x) \in ac_0$ для любого $x \in \ell_\infty$. Полагая $x = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{b_n+1\}}$, имеем

$$(D_{a,b}(Tx-x))_n = \frac{1}{b_n - a_n}$$

для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{b_n-a_n}\right\}$ принадлежит ac_0. $\triangleright$

Следующий результат описывает достаточное условие существования банаховых пределов, инвариантных относительно оператора $D_{a,b}$.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant a_n < b_n$ и $b_n \to \infty$, $n \to \infty$. Если*

$$\left\{\frac{1}{b_n - a_n}\right\} \in ac_0, \tag{2}$$

то оператор $D_{a,b}$ является $\mathfrak{B}$-регулярным. В частности, $\mathfrak{B}(D_{a,b}) \neq \varnothing$.

$\triangleleft$ Проверим условия из критерия $\mathfrak{B}$-регулярности. Для произвольных $0 \leqslant a_n < b_n$ имеем

(i′) $q(D_{a,b}x) \geqslant 0$ для всех $x \geqslant 0$, так как оператор $D_{a,b}$ положителен,

(ii′) $D_{a,b}\mathbb{1} = \mathbb{1} \in ac_1$.

Условие (iii′) следует из леммы 2. Следовательно, оператор $D_{a,b}$ является $\mathfrak{B}$-регулярным, т. е. $D^*_{a,b}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}$. По теореме о неподвижной точке [14, следствие 17.56] множество $\mathfrak{B}(D_{a,b})$ всех $D_{a,b}$-инвариантных банаховых пределов не пусто. $\triangleright$

Замечание 1. 1) Отметим, что условие $\left\{\frac{1}{b_n-a_n}\right\} \in ac_0$ в лемме 2 и теореме 2 далеко от оптимального. Действительно, для тождественного оператора $D_{a,b} = I$ имеем $b_n - a_n \equiv 1$ (см. пример 1), однако $D_{a,b} : ac_0 \to ac_0$.

2) В работе [15] показано, что для $a_n = n_k$, $b_n = n_{k+1}$, $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ и произвольных $n_k < n_{k+1}$, $n_k \nearrow \infty$, оператор $D_{a,b}$ переводит ac_0 в себя. Используя этот результат, можно построить операторы $D_{a,b}$ (отличные от тождественного) такие, что $D_{a,b} : ac_0 \to ac_0$, но $\left\{\frac{1}{b_n-a_n}\right\} \notin ac_0$. Например, рассмотрим последовательность $n_1 = 4$,

$$n_{k+1} = \begin{cases} n_k + 2, & 2^{2n} \leqslant n_k < 2^{2n+1}, \\ n_k + 4, & 2^{2n+1} \leqslant n_k < 2^{2n+2}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

и определим $a_n = n_k$, $b_n = n_{k+1}$, $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Тогда $D : ac_0 \to ac_0$, но

$$q\left(\frac{1}{b_n - a_n}\right) = \frac{1}{4}, \quad p\left(\frac{1}{b_n - a_n}\right) = \frac{1}{2},$$

т. е. $\left\{\frac{1}{b_n-a_n}\right\} \notin ac_0$.

В следующем примере мы вычислим функциональную характеристику γ_B для нескольких операторов $D_{a,b}$ и покажем, что множества $\mathfrak{B}(D_{a,b})$ и $\mathfrak{B}(C)$ дизъюнктны.

Пример 2. Обозначим $x_t = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[2^n,\, 2^{n+t})}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

1. Если $a_n = 2^n - 1$, $b_n = 2^{n+1} - 1$, то

$$(D_{a,b}x_t)_n = \frac{\lfloor 2^{n+t} \rfloor - 2^n}{2^n} = \frac{\lfloor 2^{n+t} \rfloor}{2^n} - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2^t - 1.$$

Здесь и далее символ $\lfloor \cdot \rfloor$ означает округление вниз.

Тогда для всех $B \in \mathfrak{B}(D_{a,b})$ получаем

$$\gamma_B(t) = B(x_t) = B(D_{a,b}x_t) = 2^t - 1.$$

2. Для фиксированного $0 < s < 1$ положим $a_n = 2^n - 1$, $b_n = \lfloor 2^{n+s} \rfloor$. Прямой подсчет показывает, что

$$(D_{a,b}x_t)_n = \frac{\lfloor 2^{n+t} \rfloor - 2^n}{\lfloor 2^{n+s} \rfloor - 2^n + 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^t - 1}{2^s - 1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant s,$$

и

$$(D_{a,b}x_t)_n = 1, \quad s < t \leqslant 1.$$

Следовательно, для любого $B \in \mathfrak{B}(D_{a,b})$ справедливо равенство

$$\gamma_B(t) = \begin{cases} \frac{2^t-1}{2^s-1}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ 1, & s < t \leqslant 1. \end{cases}$$

3. Для фиксированного $0 < s < 1$ положим $a_n = \lfloor 2^{n+s} \rfloor$, $b_n = 2^{n+1}$. Прямой подсчет показывает, что

$$(D_{a,b}x_t)_n = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant s$$

и

$$(D_{a,b}x_t)_n = \frac{\lfloor 2^{n+t} \rfloor - \lfloor 2^{n+s} \rfloor}{2^{n+1} - \lfloor 2^{n+s} \rfloor} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^t - 2^s}{2 - 2^s}, \quad s < t \leqslant 1.$$

Следовательно, для любого $B \in \mathfrak{B}(D_{a,b})$ справедливо равенство

$$\gamma_B(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \frac{2^t-2^s}{2-2^s}, & s < t \leqslant 1. \end{cases}$$

4. Для фиксированного $0 < s < 1$ положим $a_{2n} = 2^n - 1$, $b_{2n} = \lfloor 2^{n+s} \rfloor$ и $a_{2n+1} = \lfloor 2^{n+s} \rfloor$, $b_{2n+1} = 2^{n+1}$. Прямой подсчет показывает, что при $0 \leqslant t \leqslant s$

$$(D_{a,b}x_t)_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^t - 1}{2^s - 1}, \quad (D_{a,b}x_t)_{2n+1} = 0,$$

а при $s < t \leqslant 1$

$$(D_{a,b}x_t)_{2n} = 1, \quad (D_{a,b}x_t)_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^t - 2^s}{2 - 2^s}.$$

Таким образом, последовательность $D_{a,b}x_t$ является периодической с точностью до c_0. Из критерия Лоренца следует, что периодические последовательности почти сходятся к среднему по периоду. Следовательно, для любого $B \in \mathfrak{B}(D_{a,b})$ справедливо равенство

$$\gamma_B(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{2^t-1}{2^s-1}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2+2^t-2^{s+1}}{2-2^s}, & s < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Так как для всех $B \in \mathfrak{B}(C)$ справедливо равенство $\gamma_B(t) = t$ [9, теорема 23], то во всех перечисленных выше случаях $\mathfrak{B}(D_{a,b}) \cap \mathfrak{B}(C) = \varnothing$. Отметим, что во всех примерах функциональная характеристика непрерывна.

Следующие результаты описывают достаточные условия совпадения классов инвариантных банаховых пределов для различных операторов $D_{a,b}$.

Утверждение 3. *Пусть* $0 \leqslant a_n < b_n$, $0 \leqslant c_n < d_n$ *и* $b_n, d_n \to \infty$, $n \to \infty$. *Если* $\frac{b_n - a_n}{d_n - c_n} \to 1$ *при* $n \to \infty$ *и последовательности* $\left\{\frac{|a_n - c_n|}{d_n - c_n}\right\}$ *и* $\left\{\frac{|d_n - b_n|}{d_n - c_n}\right\}$ *ограничены и почти сходятся к нулю, то оператор* $D_{a,b} - D_{c,d}$ *отображает* ℓ_∞ *в* ac_0. *В частности,* $\mathfrak{B}(D_{a,b}) = \mathfrak{B}(D_{c,d})$.

$\lhd$ Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $a_n \leqslant c_n$. Рассмотрим три случая:

1. Если $c_n \leqslant b_n \leqslant d_n$, то для любого $x \in \ell_\infty$ имеем

$$
\begin{aligned}
|(D_{a,b} - D_{c,d})x|_n &= \left| \frac{1}{b_n - a_n} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} x_k - \frac{1}{d_n - c_n} \sum_{k=c_n+1}^{d_n} x_k \right| \\
&= \left| \left(\frac{1}{b_n - a_n} - \frac{1}{d_n - c_n} \right) \sum_{k=a_n+1}^{b_n} x_k + \frac{1}{d_n - c_n} \left(\sum_{k=a_n+1}^{c_n} x_k - \sum_{k=b_n+1}^{d_n} x_k \right) \right| \\
&\leqslant \left| 1 - \frac{b_n - a_n}{d_n - c_n} \right| |D_{a,b}x|_n + \frac{c_n - a_n + d_n - b_n}{d_n - c_n} \|x\| \\
&\leqslant \|x\| \cdot \left(\frac{c_n - a_n}{d_n - c_n} + \frac{d_n - b_n}{d_n - c_n} \right) + \|x\| \cdot \left| 1 - \frac{b_n - a_n}{d_n - c_n} \right|.
\end{aligned}
$$

Отметим, что второе слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$.

2. Если $c_n \leqslant d_n \leqslant b_n$, то для любого $x \in \ell_\infty$ имеем

$$
\begin{aligned}
|(D_{a,b} - D_{c,d})x|_n &= \left| \left(\frac{1}{b_n - a_n} - \frac{1}{d_n - c_n} \right) \sum_{k=c_n+1}^{d_n} x_k + \frac{1}{b_n - a_n} \left(\sum_{k=a_n+1}^{c_n} x_k + \sum_{k=d_n+1}^{b_n} x_k \right) \right| \\
&\leqslant \|x\| \cdot \left(\left| 1 - \frac{d_n - c_n}{b_n - a_n} \right| + \frac{c_n - a_n}{b_n - a_n} + \frac{b_n - d_n}{b_n - a_n} \right) \\
&\leqslant \|x\| \cdot \left(\frac{c_n - a_n}{d_n - c_n} + \frac{|d_n - b_n|}{d_n - c_n} \right) + y_n,
\end{aligned}
$$

где

$$
y_n = \|x\| \cdot \left[\left| 1 - \frac{d_n - c_n}{b_n - a_n} \right| + \left(\frac{d_n - c_n}{b_n - a_n} - 1 \right) \left(\frac{c_n - a_n}{d_n - c_n} + \frac{|d_n - b_n|}{d_n - c_n} \right) \right] \to 0, \quad n \to \infty.
$$

3. Если $b_n \leqslant c_n \leqslant d_n$, то $\frac{d_n - b_n}{d_n - c_n} \geqslant 1$, что противоречит предположению.

Случай $c_n \leqslant a_n$ рассматривается аналогично. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \ell_\infty$ получаем

$$
|(D_{a,b} - D_{c,d})x|_n \leqslant \|x\| \cdot \zeta_n + y_n,
$$

где последовательность

$$
\zeta_n := \frac{|a_n - c_n|}{d_n - c_n} + \frac{|d_n - b_n|}{d_n - c_n}
$$

положительна и почти сходится к нулю (по предположению) и $y_n \to 0$, $n \to \infty$.

Следовательно, $B(\zeta) = 0$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. Используя лемму 1, получаем

$$
B((D_{a,b} - D_{c,d})x) \leqslant B(\|x\| \cdot \zeta + y) = 0.
$$

Аналогично,

$$
0 = -B(\|x\| \cdot \zeta + y) \leqslant B((D_{a,b} - D_{c,d})x).
$$

Следовательно, $B((D_{a,b} - D_{c,d})x) = 0$ для любого $x \in \ell_\infty$ и $B \in \mathfrak{B}$. Т. е. оператор $D_{a,b} - D_{c,d}$ отображает ℓ_∞ в ac_0. Второе утверждение следует из первого и того факта, что все банаховы пределы обращаются в нуль на пространстве ac_0. $\triangleright$

Следствие 1. *Пусть* $0 \leqslant a_n < b_n$ *и* $b_n \to \infty$, $n \to \infty$. *Если* $\frac{b_n - a_n}{n} \to 1$ *при* $n \to \infty$ *и последовательности* $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *и* $\left\{\frac{|n-b_n|}{n}\right\}$ *ограничены и почти сходятся к нулю, то оператор* $D_{a,b} - C$ *отображает* ℓ_∞ *в* ac_0. *В частности,* $\mathfrak{B}(D_{a,b}) = \mathfrak{B}(C)$.

Литература

1. *Mazur S.* O metodach sumowalności // Ann. Soc. Polon. Math. (Supplement).—1929.—P. 102–107.
2. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires.—Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. Reprint of the 1932 original.—237 p.
3. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math.—1948.—Vol. 80.—C. 167–190. DOI: 10.1007/BF02393648.
4. *Sucheston L.* Banach limits // The American Mathematical Monthly.—1967.—Vol. 74, № 3.—C. 308–311. DOI: 10.2307/2316038.
5. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Invariant Banach limits and applications // J. Func. Anal.—2010.—Vol. 259, № 6.—P. 1517–1541. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.011.
6. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Invariant Banach limits and applications to noncommutative geometry // Pacific J. Math.—2020.—Vol. 306, № 1.—P. 357–373. DOI: 10.2140/pjm.2020.306.357.
7. *Алехно Е. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Порядковые и геометрические свойства множества банаховых пределов // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 3.—С. 3–35.
8. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Dilation invariant Banach limits // Indagationes Mathematicae.—2020.—Vol. 31, № 5.—P. 885–892. DOI: 10.1016/j.indag.2019.12.003.
9. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Основные классы инвариантных банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. матем.—2019.—Т. 83, № 1.—С. 140–167. DOI: 10.4213/im8704.
10. *Kalton N., Sedaev A., Sukochev F.* Fully symmetric functionals on a Marcinkiewicz space are Dixmier traces // Adv. Math.—2011.—Vol. 226, № 4.—P. 3540–3549. DOI: 10.1016/j.aim.2010.09.025.
11. *Agnew R. P.* On deferred Cesáro means // Annals of Mathematics.—1932.—Vol. 33, № 3.—P. 413–421. DOI: 10.2307/1968524.
12. *Alekhno E., Semenov E., Sukochev F., Usachev A.* Invariant Banach limits and their extreme points // Studia Math.—2018.—Vol. 242, № 1.—P. 79–107. DOI: 10.4064/sm8785-5-2017.
13. *Bennett G., Kalton N. J.* Consistency theorems for almost convergence // Trans. Amer. Math. Soc.—1974.—Vol. 198.—P. 23–43. DOI: 10.1090/S0002-9947-1974-0352932-X.
14. *Aliprantis C. D., Border K. C.* Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide.—Berlin: Springer, 2006.—703 p. DOI: 10.1007/3-540-29587-9.
15. *Усачев А. С.* Преобразования в пространстве почти сходящихся последовательностей // Сиб. матем. журн.—2008—Т. 49, № 6.—С. 1427–1429.

Статья поступила 27 января 2026 г.

Зволинский Роман Евгеньевич
Воронежский государственный университет,
аспирант математического факультета
РОССИЯ, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0240-8697

Усачев Александр Сергеевич
Центральный Южный Университет,
научный сотрудник математического факультета
КИТАЙ, 410085, Чанша, Хунань
E-mail: dr.alex.usachev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6645-676X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 2, P. 80–90

GENERAL AVERAGING OPERATORS AND BANACH LIMITS

Zvolinskii, R. E.[1] and Usachev, A. S.[2]

[1] Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia;
[2] Central South University,
Changsha, Hunan 410085, China

E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com, dr.alex.usachev@gmail.com

Abstract. The paper investigates general averaging operators defined on the space of all bounded real sequences. It proves sufficient conditions for these operators to map the space of almost convergent sequences to itself and to the subspace of convergent sequences. As a corollary of these results, it obtains sufficient conditions for the existence of Banach limits invariant with respect to these averaging operators. It studies the properties of subsets of such Banach limits. In particular, it computes their radii. For several specific averaging operators the paper calculates a functional characteristic. In all cases it turns out to be continuous, but distinct from that of Cesàro invariant Banach limits. This shows that the sets of Banach limits invariant with respect to these averaging operators are pairwise disjoint and with the set of Cesàro invariant Banach limits. A result in the opposite direction establishes sufficient conditions for the coincidence of the sets of Banach limits invariant with respect to distinct averaging operators.

Keywords: Banach limits, averaging operator, invariant subsets.

AMS Subject Classification: 46B45.

For citation: *Zvolinskii, R. E. and Usachev, A. S.* General Averaging Operators and Banach Limits, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 2, pp. 80–90 (in Russian). DOI: 10.46698/d4220-2436-3949-r.

References

1. *Mazur, S.* O Metodach Sumowalności, *Annales Polonici Mathematici* (*Supplement*), 1929, pp. 102–107.
2. *Banach, S. Théorie des Opérations Linéaires*, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. Reprint of the 1932 original, 237 p.
3. *Lorentz, G. G.* A Contribution to the Theory of Divergent Sequences, *Acta Mathematica*, 1948, vol. 80, pp. 167–190. DOI: 10.1007/BF02393648.
4. *Sucheston, L.* Banach Limits, *The American Mathematical Monthly*, 1967, vol. 74, no. 3, pp. 308–311. DOI: 10.2307/2316038.
5. *Semenov, E. M. and Sukochev, F. A.* Invariant Banach Limits and Applications, *Journal of Functional Analysis*, 2010, vol. 259, no. 6, pp. 1517–1541. DOI: 10.1016/j.jfa.2010.05.011.
6. *Semenov, E., Sukochev, F., Usachev, A. and Zanin, D.* Invariant Banach Limits and Applications to Noncommutative Geometry, *Pacific Journal of Mathematics*, 2020, vol. 306, no. 1, pp. 357–373. DOI: 10.2140/pjm.2020.306.357.
7. *Alekhno, E., Semenov, E., Sukochev, F. and Usachev, A.* Order and Geometric Properties of the Set of Banach Limits, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2017, vol. 28, no. 3, pp. 299–321. DOI: 10.1090/spmj/1452.
8. *Semenov, E., Sukochev, F., Usachev, A. and Zanin, D.* Dilation Invariant Banach Limits, *Indagationes Mathematicae*, 2020, vol. 31, no. 5, pp. 885–892. DOI: 10.1016/j.indag.2019.12.003.
9. *Semenov, E. M., Sukochev, F. A. and Usachev, A. S.* The Main Classes of Invariant Banach Limits, *Izvestiya: Mathematics*, 2019, vol. 83, no. 1, pp. 124–150. DOI: 10.1070/IM8704.
10. *Kalton, N., Sedaev, A. and Sukochev, F.* Fully Symmetric Functionals on a Marcinkiewicz Space are Dixmier Traces, *Advances in Mathematics*, 2011, vol. 226, no. 4, pp. 3540–3549. DOI: 10.1016/j.aim.2010.09.025.
11. *Agnew, R. P.* On Deferred Cesáro Means, *Annals of Mathematics*, 1932, vol. 33, no. 3, pp. 413–421. DOI: 10.2307/1968524.

12. *Alekhno, E., Semenov, E., Sukochev, F. and Usachev, A.* Invariant Banach Limits and Their Extreme Points, *Studia Mathematica*, 2018, vol. 242, no. 1, pp.79–107. DOI: 10.4064/sm8785-5-2017.
13. *Bennett, G. and Kalton, N. J.* Consistency Theorems for Almost Convergence, *Transactions of the American Mathematical Society*, 1974, vol. 198, pp. 23–43. DOI: 10.1090/S0002-9947-1974-0352932-X.
14. *Aliprantis, C. D. and Border, K. C. Infinite Dimensional Analysis. A hitchhiker's Guide*, Berlin, Springer, 2006, 703 p. DOI: 10.1007/3-540-29587-9.
15. *Usachev, A. S.* Transformations in the Space of Almost Convergent Sequences, *Siberian Mathematical Journal*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1136–1137. DOI: 10.1007/s11202-008-0110-0.

Received January 27, 2026

Roman E. Zvolinskii
Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia,
PhD Student of the Faculty of Mathematics
E-mail: roman.zvolinskiy@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0240-8697

Alexandr S. Usachev
Central South University,
Changsha, Hunan 410085, China,
Research Fellow at the Faculty of Mathematics
E-mail: dr.alex.usachev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6645-676X