Владикавказский математический журнал
2026, Том 28, Выпуск 2, С. 108–117

УДК 517.98
DOI 10.46698/e5734-0206-5941-z

ФРЕЙМЫ С ПОЛНЫМ СПАРКОМ В ТЕОРЕМЕ ЧЕБОТАРЁВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ВОССТАНОВЛЕНИИ СИГНАЛА[#]

С. Я. Новиков[1]

[1] Самарский национальный исследовательский университет,
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34
E-mail: nvks@ssau.ru

Посвящается моему научному руководителю
Евгению Михайловичу Семёнову

Аннотация. Фреймы с полным спарком в конечномерных евклидовых (унитарных) пространствах — это полные системы, в которых каждая подсистема с количеством векторов, равном размерности пространства, полна. Теорема Чеботарёва о матрице дискретного преобразования Фурье оказалась исторически первой теоремой о равномерных фреймах Парсеваля с полным спарком. При минимальном количестве измерений фреймы с полным спарком обеспечивают инъективность нелинейного оператора, который преобразует сигнал в модули измерений. Приведены критерии инъективности ReLU-слоев. В бесконечномерных гильбертовых пространствах рассматриваются вопросы существования фреймов с полным спарком. Система с полным спарком в бесконечномерном пространстве — это система, в которой каждая бесконечная подсистема полна. Если нормы элементов фрейма отделены от нуля, то такой фрейм не может иметь полный спарк. Неизвестно, существуют ли фреймы общего вида с полным спарком. Рассматриваются вопросы существования равномерных фреймов Парсеваля в бесконечномерных пространствах.

Ключевые слова: фрейм, спарк, инъективность, измерительные векторы, модули измерений, ReLU-слои.

AMS Subject Classification: 42C15, 42C30, 46B15.

Образец цитирования: *Новиков С. Я.* Фреймы с полным спарком в теореме Чеботарёва и их применение в восстановлении сигнала // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 2.—С. 108–117. DOI: 10.46698/e5734-0206-5941-z.

1. Фреймы с полным спарком в теореме Чеботарёва

Пусть $m \geqslant n$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ — набор векторов в $\mathbb{F}^n$, где $\mathbb{F}$ обозначает одно из числовых полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Оператор $Cx := \{\langle x, \varphi_i\rangle\}_{i=1}^m$ называется *оператором анализа*. Если $(m \times n)$-матрица оператора C имеет полный ранг, то Φ называется фреймом для пространства $\mathbb{F}^n$. Другими словами, Φ является полной системой в $\mathbb{F}^n$, т. е. $\operatorname{span}\Phi = \mathbb{F}^n$.

Эквивалентное определение фрейма: существуют константы $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathbb{F}^n$,

[#] Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2025-1791.

© 2026 Новиков С. Я.

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Таким образом, оператор анализа C устанавливает изоморфизм между $\mathbb{F}^n$ и n-мерным подпространством $\operatorname{Im} C \subset \mathbb{F}^m$. Если границы фрейма A и B могут быть выбраны так, что $A = B = 1$, то фрейм называют фреймом Парсеваля. Самый простой способ получить такой фрейм состоит в удалении $m-n$ строк из унитарной $m \times m$-матрицы [1]. При этом, конечно, нормы столбцов оставшейся прямоугольной матрицы становятся разными. Возможность построения равномерных фреймов Парсеваля в $\mathbb{R}^n$ впервые доказал А. И. Мальцев [1]. Фрейм называется *равномерным*, если все его элементы имеют равные нормы (equal-norm в англоязычных статьях).

С публикации работы [2] начались активные исследования фреймов с полным спарком, такие фреймы оказались удобными в качестве измерительных векторов для восстановления сигналов по неполным данным. Понятие спарка можно ввести для произвольной системы векторов в конечномерном пространстве $\mathbb{F}^n$.

Определение 1. Спарком s системы векторов Φ называется минимальное количество ее линейно зависимых элементов. Система $\Phi \subset \mathbb{F}^n$ имеет полный спарк, если каждое ее подмножество из n элементов линейно независимо, т. е. $s = n + 1$. Представляя систему Φ в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{F}$ в виде $n \times m$-матрицы так называемого оператора синтеза

$$D : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n, \quad Dy := \sum_{i=1}^{m} y(i)\varphi_i,$$

столбцы которой являются векторами системы Φ, имеем:

$$s(\Phi) = \min\{\|x\|_0 : \ x \in \mathbb{F}^m, \ Dx = 0, \ x \neq 0\},$$

где $\|x\|_0$ — количество ненулевых координат вектора x.

Стандартный метод получения фреймов с полным спарком использует классические $m \times m$-матрицы Вандермонда, из которых удаляются последние $m - n$ строк. Если ставить задачу получения равномерных фреймов Парсеваля с полным спарком, то она становится довольно сложной, причем в пространстве $\mathbb{R}^n$ сложнее, чем в $\mathbb{C}^n$. В $\mathbb{C}^n$ основным источником равномерных фреймов Парсеваля с полным спарком оказалась матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Удаление из $m \times m$-ДПФ-матрицы последних $m - n$ строк решает задачу. А можно ли удалять не последние, а произвольные строки? Простые примеры показывают, что не всегда. В (4×4)-матрице ДПФ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

нулевая и вторая строки содержат нулевой минор.

Н. Г. Чеботарёв доказал следующую теорему [3].

Теорема 1 (Чеботарёв)**.** *Для простого числа m все миноры матрицы Вандермонда $\left(\varepsilon^{jk}\right)_{j,k=0}^{m-1}$, $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$, отличны от нуля.*

Удаляя из этой матрицы *произвольные* $m-n$ строк, получаем $(n \times m)$-матрицу, столбцы которой образуют равномерный фрейм Парсеваля с полным спарком. Таким образом,

Н. Г. Чеботарёва надо считать первооткрывателем равномерных фреймов Парсеваля с полным спарком. Как заметила В. В. Севостьянова в устном сообщении, если каждый минор $m \times m$-матрицы ДПФ отличен от нуля, то число m простое.

2. Фреймы с полным спарком в восстановлении сигнала по модулям измерений

Посмотрим на векторы фрейма $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ как на измерительные, а скалярные произведения вида $\langle x, \varphi_i\rangle$ будем рассматривать как результаты измерений неизвестного сигнала $x \in \mathbb{R}^n$. В такой модели восстановления сигнала по модулям измерений активно используется нелинейный оператор

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^n/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto \{|\langle x, \varphi_i\rangle|\}_{i=1}^m.$$

Доказано, что $\mathscr{A}$ инъективен тогда и только тогда, когда для любого разбиения Φ на два подмножества по крайней мере одно из них оказывается полным в $\mathbb{R}^n$ [4, 5] (свойство альтернативной полноты (АП)).

Инъективность оператора $\mathscr{A}$ позволяет восстановить сигнал x с точностью до знака. В этом случае говорят, что фрейм Φ обладает свойством восстановления по модулям измерений (ВМИ). Таким образом, оказалось, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ свойства (АП) и (ВМИ) эквивалентны.

Обозначим через $B_{\mathbb{R}^n}$ единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$. Будем говорить о свойстве ВМИ$_B$, если оператор $\mathscr{A}$ инъективен только на векторах из $B_{\mathbb{R}^n}$.

Теорема 2. *Свойства ВМИ$_B$ и (АП) эквивалентны в $\mathbb{R}^n$.*

$\lhd$ Сначала заметим, что если $\Phi \in$ ВМИ$_B$, то Φ — полная система. Если это не так, то найдется $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, $\langle h, \varphi_i\rangle = 0$ для любого i. Равенства

$$\left|\left\langle \frac{h}{\|h\|}, \varphi_i \right\rangle\right| = |\langle 0, \varphi_i\rangle|, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

противоречат ВМИ$_B$.

Предположим, что система Φ не обладает свойством альтернативной полноты. Пусть множество индексов $I \subset \mathbb{N}$ такое, что $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ и $\{\varphi_i\}_{i\notin I}$ — неполные системы. Найдем два ненулевых элемента $f, g \in \overset{\circ}{B} \setminus\{0\}$ такие, что $\langle f, \varphi_i\rangle = 0$, $i \in I$, и $\langle g, \varphi_i\rangle = 0$, $i \notin I$. Подбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $f \pm \varepsilon g \in \overset{\circ}{B}$. Простая проверка показывает, что

$$|\langle f + \varepsilon g, \varphi_i\rangle| = |\langle f - \varepsilon g, \varphi_i\rangle|, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, существует $\kappa = \pm 1$ такое, что $f - \varepsilon g = \kappa(f + \varepsilon g)$. Если $\kappa = 1$, то $g = 0$. Если $\kappa = -1$, то $f = 0$. Оба этих заключения противоречат выбору элементов f и g. $\rhd$

Минимальное количество измерений для восстановления сигнала из $\mathbb{R}^n$ по модулям измерений вещественными измерительными векторами равно $2n - 1$. Если $m \leqslant 2n - 2$, то система Φ разбивается на две подсистемы, в каждой из которых $n - 1$ элемент, и эти подсистемы не полны.

Лемма 1. *Если количество измерительных векторов минимально, то*

$$\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{2n-1} \in (\textit{ВМИ}) \ \textit{в} \ \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \Phi \ \textit{имеет полный спарк.}$$

$\lhd$ Предположим, что спарк системы Φ строго меньше $n + 1$. Это означает существование множества индексов I с мощностью n такого, что $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ не полна в $\mathbb{R}^n$. С другой

стороны, мощность дополнения I^c равна $n-1$, и система $\{\varphi_i\}_{i\in I^c}$ не полна в $\mathbb{R}^n$. Получено противоречие со свойством альтернативной полноты. $\triangleright$

3. Фреймы с полным спарком в теории нейронных сетей

Фреймы с полным спарком нашли применение и в теории нейронных сетей, которая широко использует (нелинейную) функцию активации (Rectified Linear Unit), которая определяется равенством $\mathrm{ReLU}(s) = \max(0, s)$, $s \in \mathbb{R}$ [6].

Функция активации определяет так называемый ReLU-слой (ReLU-layer):

$$\mathscr{L}_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto \{\mathrm{ReLU}(\langle x, \varphi_i\rangle - \alpha_i)\}_{i=1}^m$$

для вектора смещения (bias) $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}^m$ определяется множество индексов

$$I_x^\alpha := \{1 \leqslant i \leqslant m : \ \langle x, \varphi_i\rangle \geqslant \alpha_i\}.$$

Для фиксированного $i : 1 \leqslant i \leqslant m$, определяется множество векторов

$$\Omega_i^\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, \varphi_i\rangle \geqslant \alpha_i\}.$$

Определение 2. Фрейм Φ называется *α-выпрямляющим* на множестве $K \subseteq \mathbb{R}^n$ для вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, если для всех $x \in K$ подмножество $\Phi_{I_x^\alpha} := \{\varphi_i\}_{i\in I_x^\alpha}$ полно в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$; $\emptyset \neq K$ — открытое или строго выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Оператор $\mathscr{L}_\alpha$ инъективен на K тогда и только тогда, когда Φ — α-выпрямляющий фрейм на K.*

Определение 3. Множество U называется *строго выпуклым*, если для всех $x, y \in U$ и $\lambda \in (0,1)$, $x_\lambda := (1-\lambda)x + \lambda y \in \overset{\circ}{U}$, где $\overset{\circ}{U}$ — внутренность U.

$\triangleleft$ *Необходимость.* Предположим, что Φ не является α-выпрямляющим. Существует $x \in K$ такой, что $(\varphi_i)_{i\in I_x^\alpha}$ не фрейм. Значит, существует

$$0 \neq r \in \operatorname{span}(\varphi_i)_{i\in I_x^\alpha}^\perp.$$

Если K открыто, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$y_\pm := x \pm \varepsilon r \in K, \quad y_+ \neq y_-.$$

При этом $\mathscr{L}_\alpha y_+ = \mathscr{L}_\alpha y_-$, инъективности нет.

Предположим, что Φ не является α-выпрямляющим. Существует $x \in K$ такой, что $(\varphi_i)_{i\in I_x^\alpha}$ не фрейм. Используя определение строгой выпуклости, находим

$$z \in K : \quad z \neq x, \quad x_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda z \in \overset{\circ}{K}, \quad \lambda \in (0,1).$$

Заметим, что для любого i

$$|\langle x_\lambda, \varphi_i\rangle - \langle x, \varphi_i\rangle| \leqslant \lambda \|x - z\| \sqrt{B}.$$

При соответствующем выборе λ доказательство для открытого множества переносится на выпуклое заменой x на x_λ.

Достаточность. Пусть фрейм Φ α-выпрямляющий на множестве K, т. е. для любого $x \in K$, $\Phi_{I_x^\alpha}$ — фрейм. Если $\mathscr{L}_\alpha x = \mathscr{L}_\alpha y$ для $x, y \in K$, то

$$\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle, \quad i \in I_x^\alpha \cap I_y^\alpha.$$

1) K — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы открытый шар $B_\varepsilon^\circ(x) \subset K$. Предположим, что $x \neq y$. Если $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\|x-y\|}$, то

$$x_\delta := (1-\delta)x + \delta y \in B_\varepsilon^\circ(x) \subset K.$$

Пусть $i \in I_{x_\delta}^\alpha$, т. е. $\langle x_\delta, \varphi_i \rangle \geqslant \alpha_i$. Интервал, которому принадлежит $\langle x_\delta, \varphi_i \rangle$, находится правее точки α_i. Поэтому

- если $\langle x_\delta, \varphi_i \rangle > \alpha_i$, то $\langle x, \varphi_i \rangle > \alpha_i$ и $\langle y, \varphi_i \rangle > \alpha_i$;
- если $\langle x_\delta, \varphi_i \rangle = \alpha_i$, то $\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle = \alpha_i$.

Следовательно, $I_{x_\delta}^\alpha \subseteq I_x^\alpha \cap I_y^\alpha$.

Так как $x_\delta \in K$, то $\Phi_{I_{x_\delta}^\alpha}$ — фрейм $\Rightarrow$ $\Phi_{I_x^\alpha \cap I_y^\alpha}$ — фрейм.

Для всех $i \in I_x^\alpha \cap I_y^\alpha$ имеем равенства $\langle x, \varphi_i \rangle = \langle y, \varphi_i \rangle$, из которых следует, что $x = y$.

2) K — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Для $\lambda \in (0,1)$ имеем

$$x_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y \in K,$$

поэтому $\Phi_{I_{x_\lambda}^\alpha}$ — фрейм.

Повторяя рассуждения 1), получаем, что $I_{x_\lambda}^\alpha \subseteq I_x^\alpha \cap I_y^\alpha$, отсюда $\Phi_{I_x^\alpha \cap I_y^\alpha}$ — фрейм $\Rightarrow$ $x = y$. $\triangleright$

Следствие. *Пусть K — выпуклое или открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если фрейм Φ имеет полный спарк, то Φ является α-выпрямляющим на K тогда и только тогда, когда $|I_x^\alpha| \geqslant n$ для всех $x \in K$.*

В отличие от ситуации теоремы 2, α-выпрямляющие фреймы зависят от множества K.

Теорема 4. *Если $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ — α-выпрямляющий фрейм в $\mathbb{R}^n$, то $m \geqslant 2n$.*

Для единичного шара любой нормированный фрейм является α-выпрямляющим, если $\alpha = -(1, \ldots, 1)^t$.

Нормированный базис α-выпрямляющий для единичного тогда и только тогда, когда $\alpha = -(1, \ldots, 1)^t$.

$\triangleleft$ Выберем $x \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы $\langle x, \varphi_i \rangle \neq 0$ для всех i, и $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Определим разбиение множества индексов:

$$I_x^+ := \{i : \ \langle x, \varphi_i \rangle > 0\}, \quad I_x^- := \{i : \ \langle x, \varphi_i \rangle < 0\}.$$

Пусть

$$t^* := \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \frac{\alpha_i}{\langle x, \varphi_i \rangle}.$$

Для $t > t^* > 0$ имеем равенства

$$I_{tx}^\alpha = I_x^+ \quad \text{и} \quad I_{-tx}^\alpha = I_x^-.$$

Найдено два вектора $u := tx$ и $v := -tx$ в $\mathbb{R}^n$ такие, что $I_u^\alpha \cap I_v^\alpha = \emptyset$. Если Φ — α-выпрямляющий фрейм в $\mathbb{R}^n$, то $\Phi_{I_u^\alpha}$ и $\Phi_{I_v^\alpha}$ должны быть полными в $\mathbb{R}^n$, поэтому $|\Phi_{I_u^\alpha}| \geqslant n$ и $|\Phi_{I_v^\alpha}| \geqslant n$, $m \geqslant 2n$.

Если все векторы фрейма $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ имеют единичную норму (такой фрейм называют нормированным), и $x \in B_{\mathbb{R}^n}$, то $\langle x, \varphi_i \rangle \geqslant -1$, $i = 1, 2, \ldots m$.

Если нормированный базис α-выпрямляющий для $B_{\mathbb{R}^n}$, то $I_x^\alpha = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\langle x, \varphi_i \rangle \geqslant \alpha_i$ для любого $x \in B_{\mathbb{R}^n}$ и для $i = 1, 2, \ldots, n$. В частности, $\langle -\varphi_i, \varphi_i \rangle = -1 \geqslant \alpha_i$. $\triangleright$

4. Переполненные системы в бесконечномерном гильбертовом пространстве

В бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ фрейм определяется как система элементов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, для которой существуют константы $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для всех $x \in \mathscr{H}$

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Если для некоторой системы векторов выполняется только правое неравенство в определении фрейма, то ее называют *бесселевой* системой.

Бесконечномерным аналогом систем с полным спарком являются так называемые переполненные системы. Система элементов гильбертова пространства $\mathscr{H}$ называется *переполненной*, если каждая ее бесконечная подсистема полна в $\mathscr{H}$ таком, что $\overline{\operatorname{span}}\{\varphi_{n_k}\} = \mathscr{H}$. Существование такой системы доказывалось несколько раз [7, 8].

Если в конечномерном пространстве каждая система с полным спарком оказывается фреймом, то в гильбертовом пространстве переполненные системы и большая часть фреймов оказываются непересекающимися семействами. Каждый фрейм является полной системой, но далеко не каждая полная система оказывается фреймом.

Приведем известную серию примеров переполненных систем.

Теорема 5 [9]**.** *Пусть $a > 0$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечная последовательность попарно различных точек в $\mathbb{C}$. Тогда $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ — переполненная система в $L^2(0,a) \Leftrightarrow \sup_n |\lambda_n| < \infty$.*

Если числа $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, то переполненная система $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть бесселевой (а тем более, фреймом), так как из правого неравенства в определении фрейма следует, что $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет точек сгущения [10].

Справедливо и более общее утверждение:

Теорема 6 [5]**.** *Бесселева система $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|\varphi_n\| \geqslant \delta > 0$ не может быть переполненной системой в гильбертовом пространстве.*

$\lhd$ Система Φ допускает представление в виде конечного объединения базисных последовательностей Рисса $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \ldots \cup \Phi_m$. Это один из вариантов проблемы Кадисона — Зингера, которая была решена в [11]. Если система Φ переполненная, то хотя бы одна из последовательностей, например, Φ_1 будет базисом Рисса в $\mathscr{H}$. Бесконечная собственная подсистема $\Phi_0 \subsetneqq \Phi_1$ порождает собственное подпространство $\overline{\operatorname{span}}\,\Phi_0 \subsetneqq \mathscr{H}$, что противоречит тому, что система переполненная. $\rhd$

Замечание. Теорема 6 оставляет два вопроса: 1) существуют ли переполненные фреймы общего вида?

2) как доказать теорему, не ссылаясь на гипотезу Кадисона — Зингера?

Базисом Рисса называется полная в $\mathscr{H}$ система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой существуют константы $A, B > 0$ такие, что для каждого конечного набора скаляров $\{c_n\}$ имеем:

$$A\sum |c_n|^2 \leqslant \Big\|\sum c_n\varphi_n\Big\|^2 \leqslant B\sum |c_n|^2.$$

Если в только что приведенном определении опустить слово «полная», то получится определение базисной последовательности Рисса.

Базис Рисса является фреймом, а фрейм является базисом Рисса только если он точный (exact), т. е. перестает быть фреймом после удаления произвольного элемента [10].

Каждая подпоследовательность базиса Рисса является базисной последовательностью Рисса.

Если из фрейма удалить один элемент, то он либо остается фреймом, либо становится неполной системой.

Фрейм Рисса — это фрейм, каждая подпоследовательность которого является фреймовой последовательностью с теми же границами A и B, что и у самого фрейма. Каждый фрейм Рисса содержит базис Рисса [10].

Существуют ли фреймы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $\{\varphi_{Nk}\}_{k=1}^{\infty}$ также образуют фрейм для каждого $N \in \mathbb{N}$?

Для фрейма Габора вида

$$E_{mb}T_{na}g(x) := e^{2\pi imbx}g(x-na), \quad a,b>0, \ \ g \in L^2(\mathbb{R}), \ \ m,n \in \mathbb{Z},$$

необходимое условие $ab \leqslant 1$. Поэтому подпоследовательности вида $\{E_{mb}T_{nNa}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ или $\{E_{mNb}T_{nNa}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ не могут быть фреймами при достаточно больших $N \in \mathbb{N}$.

Вейвлет-фреймы

$$D_{a^j}T_{kb}\psi(x) := a^{j/2}\psi(a^jx-kb), \quad a>1, \ \ b>0, \ \ \psi \in L^2(\mathbb{R}),$$

существуют для произвольных $a > 1$, $b > 0$. Возможность построить фреймы вида $\{D_{a^{Nj}}T_{kb}\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ для произвольного $N \in \mathbb{N}$ остается. Известные конструкции с изменением параметров a, b изменяют функцию ψ.

В [12] впервые были построены фреймы вида $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ для ограниченного линейного оператора T на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. В построении использовано условие Карлесона: $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{D} := \{z : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\neq n} \frac{|\lambda_k - \lambda_n|}{|1-\overline{\lambda}_k\lambda_n|} > 0.$$

Теорема 7 [12]**.** *Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{D}$ удовлетворяет условию Карлесона; $\{e_k\}$ — ОНБ в ГП $\mathscr{H}$; линейный оператор $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ определяется как $Te_k = \lambda_k e_k$, $k \in \mathbb{N}$; $\{m_k\}$ — числовая последовательность такая, что $0 < c_1 \leqslant |m_k| \leqslant c_2 < \infty$; $\varphi := \sum_{k=1}^{\infty} m_k\sqrt{1-|\lambda_k|^2}e_k$. Тогда $\{T^k\varphi\}_{k=0}^{\infty}$ — фрейм для $\mathscr{H}$.*

Подпоследовательность фрейма Карлесона вида $\{T^{Nk}\}_{k=0}^{\infty}$ образует фрейм для любого $N \in \mathbb{N}$ [13].

С другой стороны, в отличие от базисов Рисса, в каждом фрейме существует подпоследовательность, которая не является фреймом.

Теорема 8 [13]**.** *В каждом фрейме гильбертова пространства существует бесконечная последовательность, которая не является фреймом.*

5. Равномерные фреймы Парсеваля в бесконечномерном пространстве

Фрейм Парсеваля имеет границы, равные 1. В n-мерном пространстве границы фрейма и нормы элементов фрейма взаимосвязаны.

Фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^{m}$ называется *равномерным*, если существует $c > 0$ такое, что $\|\varphi_j\|^2 = c$, $j = 1, \ldots, m$.

Для равномерного фрейма Парсеваля имеем:

$$n = \operatorname{trace}(\mathbf{I}_{\mathbb{C}^n}) = \operatorname{trace}(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*) = \operatorname{trace}(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|^2 = mc, \quad c = \frac{n}{m}.$$

Согласно следующей теореме, всякий нормированный фрейм Парсеваля является ортонормированным базисом.

Теорема 9. *Пусть* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{H}$, $\|e_k\| = 1$ *для любого* k. *Тогда* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *ОНБ* $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2$, $f \in \mathscr{H}$. *Таким образом, нормированный фрейм Парсеваля — это ортонормированный базис!*

$\lhd$ ($\Rightarrow$) $f = \sum c_k e_k$. Фиксируем $j \in \mathbb{N}$.

$$\langle f, e_j\rangle = \left\langle \sum c_k e_k, e_j \right\rangle = c_j.$$

$$\|f\|^2 = \left\langle \sum c_k e_k, \sum \overline{c_k} e_k \right\rangle = \sum |c_k|^2.$$

($\Leftarrow$) Последовательность $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — бесселева, поэтому $g := \sum \langle f, e_k\rangle e_k$ хорошо определена. Если $f \perp e_k$ для любого k, то $f = 0$, т. е. $\{e_k\}$ полная.

$$\langle f - g, e_j\rangle = \left\langle f - \sum \langle f, e_k\rangle e_k, e_j \right\rangle = 0 \quad (\forall j),$$

если $\{e_k\}$ ОНС. В этом случае получаем равенство $f = g$. Докажем, что $\{e_k\}$ является ОНС.

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_k |\langle e_j, e_k\rangle|^2 = 1 + \sum_{k \neq j} |\langle e_j, e_k\rangle|^2$$

Таким образом, $\{e_k\}$ — ОНБ. $\rhd$

Тем не менее в бесконечномерных гильбертовых пространствах существуют равномерные фреймы Парсеваля. Приведем пример.

Пример. Пусть $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $\varphi(x) = \frac{\sin(2\pi x\alpha)}{\pi x} \in L^2(\mathbb{R})$.

Последовательность $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует равномерный фрейм Парсеваля в замыкании своей линейной оболочки [10].

Литература

1. *Новиков С. Я., Севостьянова В. В.* Равномерные жесткие фреймы Мальцева // Изв. РАН. Сер. матем.—2022.—Т. 86, № 4.—С. 162–174. DOI: 10.4213/im9137.
2. *Alexeev B., Cahill J., Mixon D. G.* Full spark frames // J. Fourier Anal. Appl.—2012.—Vol. 18, № 6.—P. 1167–1194. DOI: 10.1007/s00041-012-9235-4.
3. *Чеботарёв Н. Г.* Математическая автобиография // Успехи мат. наук.—1948.—Т. 3, № 4.—С. 3–66.—URL: http://www.mathnet.ru/rm8723.
4. *Balan R., Casazza P., Edidin D.* On signal reconstruction without phase // Appl. Comp. Harmon. Anal.—2006.—Vol. 20, № 3.—P. 345–356. DOI: 10.1016/J.ACHA.2005.07.001.
5. *Избяков И. М., Новиков С. Я., Терёхин П. А.* Альтернативно полные системы и фреймы в задаче восстановления по модулям измерений // Функциональный анализ и его приложения.—2025.—Т. 59, № 1.—С. 18–28. DOI: 10.4213/faa4210.
6. *Haider D., Ehler M., Balazs P.* Injectivity of ReLU layers: tools from frame theory // Mathematical Foundations of Machine Learning.—2025.—Vol. 1, article № 2.—P. 1–40. DOI: 10.1007/s44439-025-00003-6.
7. *Klee V.* On the borelian and projective types of linear subspaces // Math. Scand.—1958.—Vol. 6, № 2.—P. 189–199.
8. *Вершинин Р. В.* О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховом пространстве // Математическая физика, анализ, геометрия.—1998.—Т. 5, № 1/2.—С. 3–14.
9. *Chalendar I., Fricain E., Partington J. R.,* Overcompleteness of sequences of reproducing kernel in model spaces // Integr. equ. oper. theory.—2006.—Vol. 56.—P. 45–56. DOI: 10.1007/S00020-005-1413-1.
10. *Christensen O.* An Introduction to Frames and Riesz Bases.—New York: Birkhäuser/Springer, 2016.—704 p.

11. *Marcus A. W., Spielman D. A., Srivastava N.* Interlacing families II: mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem // Ann. Math.—2015.—Vol. 182, № 1.—P. 327–350. DOI: 10.4007/annals.2015.182.1.8.
12. *Aldroubi A., Cabrelli C., Molter U., Tang S.* Dynamical sampling // Appl. Harmon. Anal.—2017.—Vol. 42, № 3.—P. 378–401. DOI: 10.1016/j.acha.2015.08.014.
13. *Christensen O., Hasannasab M., Philipp F., Stoeva D.* The mystery of Carleson frames // Applied and Comput. Harmonic Analysis.—2024.—Vol. 72.—Article ID 101659, 5 p. DOI: 10.1016/j.acha.2024.101659.
14. *Krishtal I., Miller B.* Letter to the editor. Demystifying Carleson frames // Appl. Comput. Harmon. Anal.—2026.—Vol. 80.— Article ID 101811, 8 p.

Статья поступила 21 ноября 2025 г.

Новиков Сергей Яковлевич
Самарский национальный исследовательский университет,
профессор кафедры безопасности информационных сетей
РОССИЯ, 443086, Самара, Московское шоссе, 34
E-mail: nvks@ssau.ru
https://orcid.org/0000-0001-5789-6862

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 2, P. 108–117

FULL SPARK FRAMES IN CHEBOTAREV'S THEOREM AND THEIR APPLICATION IN SIGNAL RECONSTRUCTION

Novikov, S. Ya.[1]

[1] Samara National Research University,
34 Moskovskoe shosse, Samara 443086, Russia

E-mail: nvks@ssau.ru

Abstract. Full Spark Frames in finite-dimensional Euclidean (Unitary) spaces are complete systems in which each subsystem with a number of vectors equal to the dimension of the space is complete. Chebotarev's theorem on the discrete Fourier transform matrix turned out to be historically the first theorem on equi-normed full spark Parseval frames. When the number of measurement vectors is minimal, full spark frames ensure the injectivity of a nonlinear operator that converts the signal into measurement modules. This article provides an overview of the applications of frames in the theory of neural networks. In particular, it establishes criteria for the injectivity of ReLU-layers. The article also explores the existence of full spark frames in infinite-dimensional Hilbert spaces. In an infinite-dimensional Hilbert space, full spark systems are those in which every infinite subsystem is complete. If the norms of the frame elements are separated from zero, then such a frame cannot have a full spark. It is unknown whether there are general frames with a full spark. The existence of equal-norm Parseval frames in infinite-dimensional Hilbert spaces is considered.

Keywords: frame, spark, injective operator, measurement vectors, measurement modules, ReLU-layers.

AMS Subject Classification: 42C15, 42C30, 46B15.

For citation: *Novikov, S. Ya.* Full Spark Frames in Chebotarev's Theorem and Their Application in Signal Reconstruction, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 2, pp. 108–117. (in Russian). DOI: 10.46698/e5734-0206-5941-z.

References

1. *Novikov, S. Ya. and Sevost'yanova, V. V.* Maltsev Equal-Norm Tight Frames, *Izvestiya: Mathematics*, 2022, vol. 86, no. 4, pp. 770–781. DOI: 10.4213/im9137e.
2. *Alexeev, B., Cahill, J. and Mixon, D. G.* Full Spark Frames, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2012, vol. 18, no. 6, pp. 1167–1194. DOI: 10.1007/s00041-012-9235-4.

3. *Chebotarev, N. G.* Mathematical Autobiography, *Russian Mathematical Surveys*, 1948, vol. 3, no. 4, pp. 3–66 (in Russian).
4. *Balan, R., Casazza, P. and Edidin, D.* On Signal Reconstruction Without Phase, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2006, vol. 20, no. 3, pp. 345–356. DOI: 10.1016/J.ACHA.2005.07.001.
5. *Izbiakov, I. M., Novikov, S. Ya. and Terekhin, P. A.* Complement Property and Frames in the Phase Retrieval Problem, *Functional Analysis and Its Applications*, 2025, vol. 59, no. 1, pp. 11–18. DOI: 10.1134/S1234567825010021.
6. *Haider, D., Ehler, M. and Balazs, P.* Injectivity of ReLU Layers: Tools from Frame Theory, *Mathematical Foundations of Machine Learning*, 2025, vol. 1, article no. 2, pp. 1–40. DOI: 10.1007/s44439-025-00003-6.
7. *Klee, V.* On the Borelian and Projective Types of Linear Subspaces, *Mathematica Scandinavica*, 1958, vol. 6, no. 2, pp. 189–199.
8. *Vershinin, R. V.* On Representative and Absolutely Representative Systems in Banach Spaces, *Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya* [Mathematical Physics, Analysis, Geometry], 1998, vol. 5, no. 1/2, pp. 3–14. (in Russian).
9. *Chalendar, I., Fricain, E. and Partington, J. R.* Overcompleteness of Sequences of Reproducing Kernel in Model Spaces, *Integral Equations and Operator Theory*, 2006, vol. 56, pp. 45–56. DOI: 10.1007/S00020-005-1413-1.
10. *Christensen, O. An Introduction to Frames and Riesz Bases*, New York, Birkhäuser/Springer, 2016, 704 p.
11. *Marcus, A. W., Spielman, D. A. and Srivastava, N.* Interlacing Families II: Mixed Characteristic Polynomials and the Kadison–Singer Problem, *Annals of Mathematics*, 2015, vol. 182, no. 1, pp. 327–350. DOI: 10.4007/annals.2015.182.1.8.
12. *Aldroubi, A., Cabrelli, C., Molter, U. and Tang, S.* Dynamical Sampling, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2017, vol. 42, no. 3, pp. 378–401. DOI: 10.1016/j.acha.2015.08.014.
13. *Christensen, O., Hasannasab, M., Philipp, F., and Stoeva, D.* The Mystery of Carleson Frames, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2024, vol. 72, Article ID 101659, 5 p. DOI: 10.1016/j.acha.2024.101659.
14. *Krishtal, I. and Miller, B.* Letter to the Editor. Demystifying Carleson Frames, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2026, vol. 80, Article ID 101811, 8 p.

Received November 21, 2025

Sergey Ya. Novikov
Samara University,
34 Moskovskoe shosse, Samara 443086, Russia,
Professor of the Department of Information Network Security
E-mail: nvks@ssau.ru
https://orcid.org/0000-0001-5789-6862