

УДК 539.3

DOI 10.46698/k5003-0293-2639-b

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РЕКОНСТРУКЦИИ РАССЛОЕНИЙ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ПОЛОСЕ

О. В. Явруян¹

¹ Южный математический институт ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: yavruyan@mail.ru

Аннотация. Проведено исследование задачи об установившихся колебаниях функционально-градиентной полосы, ослабленной туннельными расслоениями на нижней границе. Решена прямая задача о построении волнового поля всюду в полосе. Ее решение построено путем сведения к граничному интегральному уравнению (ГИУ) относительно неизвестных компонент функции раскрытия расслоений, которая отлична от нуля только в зоне наличия дефектов. Краевая задача с переменными коэффициентами для трансформант полей смещений и напряжений решена с привлечением метода пристрелки. Выполнен анализ ядра ГИУ. Исследовано поведение символа ядра на бесконечности, получена аналитическая оценка, на основании которой выделены регулярная и нерегулярная (сингулярная) части ядра ГИУ. Дискретизация ГИУ осуществлена на основе метода граничных элементов (МГЭ), метода коллокаций и численных квадратурных схем для сингулярных интегралов. Обратная задача идентификации расслоений сведена к определению инвариантных параметров дефекта из условия минимума функционала невязки с привлечением оптимизационных алгоритмов нулевого порядка (генетический алгоритм, метод Нелдера — Мида). Выполнен асимптотический анализ задачи для дефектов малого относительного размера. Решена обратная задача идентификации параметров трещины по данным о полях смещений, измеренных на части верхней границы полосы. Проведен сравнительный анализ результатов, полученных на основании МГЭ и асимптотического подхода. Определены границы применимости асимптотических формул.

Ключевые слова: установившиеся колебания, полоса, неоднородность, ФГМ (функционально-градиентные материалы), расслоения, обратная задача, реконструкция, инвариантные параметры, метод пристрелки, граничные интегральные уравнения, сингулярность, асимптотика, метод коллокаций, теория вычетов.

AMS Subject Classification: 45B05, 45E99, 65R10, 74H10, 74H15, 74H35, 74H75.

Образец цитирования: Явруян О. В. Обратная задача реконструкции расслоений в функционально-градиентной полосе // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 2.—С. 134–149. DOI: 10.46698/k5003-0293-2639-b.

1. Введение

Современные конструкции в процессе эксплуатации подвергаются значительным механическим, термическим и динамическим нагрузкам, что способствует образованию новых или развитию имеющихся дефектов в структурах, таких как трещины, поры, включения и другие локализованные неоднородности. Эти дефекты, представляя собой концентраторы напряжений, способные инициировать катастрофическое разрушение даже при допустимых эксплуатационных нагрузках. В связи с этим актуальность задач

механики разрушения и дефектоскопии возрастает, поскольку они лежат в основе обеспечения надежности, долговечности и безопасности критически важных объектов.

К основным задачам теории трещин, как к разделу механики деформируемого твердого тела, относят такие фундаментальные проблемы, как определение критериев разрушения с учетом анизотропии и неоднородности материала, моделирование процессов роста трещин под действием динамических и статических нагрузок, учет влияния агрессивных сред и температурных факторов на процесс разрушения. Параллельно с теоретическими исследованиями особую значимость приобретают методы неразрушающего контроля, позволяющие обнаруживать дефекты на ранних стадиях их развития. Современная дефектоскопия базируется на физических принципах акустической, оптической, электромагнитной и других видах диагностики, обеспечивая высокую точность и достоверность результатов.

В настоящей работе проведено исследование задачи теории трещин в протяженных телах, к которым относятся плоские и цилиндрические волноводы — структуры, которые встречаются во многих практических областях. Среди множества возможных постановок задач теории разрушения выделим следующие основные направления исследования.

Первое и основное направление связано с исследованием напряженно-деформированного состояния в вершинах трещин, которые являются концентраторами напряжений, провоцируя дальнейший рост дефекта и выход из строя исходного объекта. Уточненные значения в окрестности вершин позволяют определить и спрогнозировать дальнейшее поведение дефекта.

В этом направлении развиваются, так называемые, неклассические теории, к которым можно отнести градиентную теорию, нелинейную теорию, обобщенную теорию и т. д., в которых определяющие соотношения носят нелинейный характер связи между механическими полями, а более сложный. Так, например, в градиентной теории упругости в соотношения связи между механическими полями напряжений и деформаций входят также частные производные, которые пропорциональны градиентным параметрам, характеризующим размерные параметры исследуемой области и позволяют учитывать масштабные микроэффекты, уточняя поведение механических полей в окрестности интересующих подобластей [1–3].

Второе направление связано с рассмотрением трещин как рассеивателей, способных повлиять на фронт волны и поток энергии. Эти задачи, как правило, исследованы для пакета трещин и в большей степени интересны при рассмотрении слоистых композитов, фоновых кристаллов, в процессе изготовления которых характерно появление межслойных дефектов. Интересны эти задачи и с целью управления волновым потоком, и для определения частот запираания, вихревых потоков, «мертвых» зон [4–6].

Третье направление связано с решением обратных геометрических задач, связанных с реконструкцией геометрии и местоположения трещин в слоистых волноводах. Основным фактором, предопределяющим степень успеха при решении обратных задач теории трещин, является точность и полнота информации, по которой восстанавливаются характеристики дефекта. В качестве такой информации могут служить акустические механические, электрические или тепловые поля, измеренные на доступном участке волновода. Это направление раскрыто в предлагаемом исследовании, которое посвящено исследованию прямой и обратной задач о колебаниях плоского волновода в режиме антиплоских установившихся колебаний, ослабленного одной или двумя трещинами, расположенными на его нижней границе.

Для протяженных слоистых структур — волноводов задачи теории трещин исследованы достаточно подробно [7, 8] в предположении об однородности (кусочной одно-

родности) рассматриваемой среды. Технические методы обнаружения дефектов в протяженных телах описаны в работах [9–10]. В работе [9] представлен современный обзор технических методов обнаружения дефектов в рельсах (плоских волноводах) — методы ультразвукового контроля на базе современных технологий. В работе [10] проведен обзор современных подходов на основе направленных волн для идентификации повреждений в трубопроводных конструкциях (цилиндрических волноводах).

Современные технологии позволяют создавать материалы с градиентными свойствами (непрерывно меняющимися вдоль какого-либо направления), а также современные материалы сложной структуры. Особый интерес представляют волновые процессы в неоднородных волноводах сложной структуры, содержащих локальные дефекты в виде трещин, полостей и других неоднородностей. Работы [11–15], посвящены изучению распространения волн в средах с непрерывно изменяющимися характеристиками. Различным аспектам обратных задач (вопросы единственности и существования решения), связанных с реконструкцией параметров неоднородной среды посвящены работы [16–18], случай неоднородных слоистых структур рассмотрен в работе [19].

Настоящая работа посвящена исследованию динамической задачи (прямой и обратной геометрической) для плоского неоднородного ФГ волновода, ослабленного двумя расслоениями на нижней границе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся антиплоские колебания ФГ полосы, занимающей область $S = \{x_1 \in (-\infty, \infty), x_3 = [0, h]\}$, механические свойства которой задаются гладкой положительной функцией $\mu(x_3)$. Рассматривается случай жесткого закрепления нижней границы полосы, источник колебаний приложен в точке верхней границы.

На нижней границе имеется участок с расслоениями $l_{cr} = \{x_1 \in [a, b], x_1 \in [c, d], x_3 = 0, [a, b] \cap [c, d] = \emptyset\}$, берега которых остаются раскрытыми в процессе колебаний.

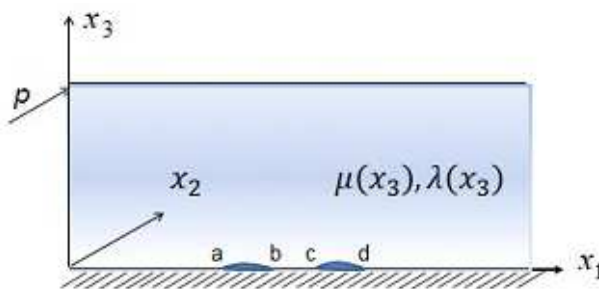


Рис. 1. ФГМ полоса с расслоениями.

В рамках рассматриваемой постановки ненулевой компонентой вектора перемещения будет компонента $u_2(x_1, x_3, t) = u(x_1, x_3)e^{i\omega t}$.

Краевая задача после отделения временного множителя имеет вид:

$$\sigma_{2j,j} + \rho\omega^2 u = 0, \quad j = 1, 3, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2j}(x_1, x_3) &= \mu(x_3)u_{,j}(x_1, x_3), \\ \sigma_{23}(x_1, h) &= p\delta(x_1), \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \notin l_{cr},$$

$$\sigma_{23}(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in l_{cr}.$$

Для формулировки условий излучения волн на бесконечности использован принцип предельного поглощения [20].

3. Решение прямой задачи

Для построения волнового поля смещения в полосе перейдем к безразмерным переменным и функциям

$$x_1 = \bar{x}_1 h, \quad x_3 = \bar{x}_1 h, \quad a = \bar{a} h, \quad b = \bar{b} h, \quad c = \bar{c} h, \quad d = \bar{d} h, \quad u = \bar{u} h, \quad \sigma_{23} = \bar{\sigma} \mu_0,$$

$$\mu = \bar{\mu} \mu_0, \quad p = \bar{p} \mu_0, \quad k^2 = \frac{\rho \omega^2 h^2}{\mu_0}.$$

Здесь μ_0 — некоторое характерное значение функции, например, максимальное значение на отрезке $[0, 1]$, либо значение в нуле. В дальнейших выкладках знак верхнего подчеркивания будем опускать.

Перейдем от исходной краевой задачи со смешанными граничными условиями к вспомогательной задаче, введя функцию раскрытия трещины, характеризующую смещение всей нижней границы полосы $\chi(x_1)$, которая равна нулю вне зоны расслоения. Применим к вспомогательной задаче интегральное преобразование Фурье по координате x_1 с параметром преобразования α . Краевая задача в терминах трансформант Фурье $\tilde{\sigma}$, $\tilde{u}$, записанная в каноническом виде, приобретет форму

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}' &= (\alpha^2 \mu - k^2) \tilde{u}, \\ \tilde{u}' &= \frac{\tilde{\sigma}}{\mu}, \quad \tilde{u}(0) = \tilde{\chi}, \quad \tilde{\sigma}(1) = p. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение краевой задачи (3) построим согласно методу пристрелки в виде линейной комбинации решений задач Коши для функций U_j , Σ_j , $j = 1, 2$, — решений системы дифференциальных уравнений задачи (3) и граничных условий:

$$\begin{aligned} U_1(0) &= 1, \quad \Sigma_1(0) = 0, \\ U_2(0) &= 0, \quad \Sigma_2(0) = 1, \end{aligned}$$

тогда решение (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha, x_3) &= \tilde{\chi}(\alpha) K_1(\alpha, x_3) + \tilde{p} K_2(\alpha, x_3), \\ \tilde{\sigma}(\alpha, x_3) &= \tilde{\chi}(\alpha) K_3(\alpha, x_3) + \tilde{p} K_4(\alpha, x_3), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K_1(\alpha, x_3) &= \frac{\Sigma_2(\alpha, 1) U_1(\alpha, x_3) - \Sigma_1(\alpha, 1) U_2(\alpha, x_3)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}, \quad K_2(\alpha, x_3) = \frac{U_2(\alpha, x_3)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}, \\ K_3(\alpha, x_3) &= \frac{\Sigma_2(\alpha, 1) \Sigma_1(\alpha, x_3) - \Sigma_1(\alpha, 1) \Sigma_2(\alpha, x_3)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}, \quad K_4(\alpha, x_3) = \frac{\Sigma_2(\alpha, x_3)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}. \end{aligned}$$

После применения обратного преобразования Фурье к (4), удовлетворив полученное решение граничным условиям исходной краевой задачи на нижней границе полосы (2), получим граничное интегральное уравнение (ГИУ) относительно функций раскрытия первого $\chi_1(\xi)$ и второго $\chi_2(\xi)$ расслоений

$$\int_a^b K(\xi - x_1) \chi_1(\xi) d\xi + \int_c^d K(\xi - x_1) \chi_2(\xi) d\xi = F(x_1), \quad x_1 \in l_{cr}, \quad (5)$$

$$K(\xi - x_1) = \int_{\sigma} K_3(\alpha, 0) e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha, \quad j = 1, 3,$$

$$F(x_1) = -p \int_{\sigma} K_4(\alpha, 0) e^{-i\alpha x_1} d\alpha,$$

σ — контур интегрирования, определяемый принципом предельного поглощения [20].

4. Асимптотическое исследование символов ядра интегрального уравнения (ИУ)

Дифференциальное уравнение краевой задачи (3) при замене переменной $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ представляет собой дифференциальное уравнение с малым параметром при старшей производной, и традиционные численные методы нахождения приближенного решения дают большую погрешность и неэффективны. Поэтому, для изучения прямой задачи проведем асимптотическое исследование символа ядра ИУ (5) при больших значениях параметра α на базе метода Вишика — Люстерника [21]. Отметим, что аналогичный анализ символов ядер был проведен ранее для контактной задачи в [22] и цилиндрического волновода в [12].

Отметим также некоторые свойства ядра и подынтегральной функции. Контур интегрирования σ содержит бесконечно удаленную точку α и при этом функция $K_3(\alpha, x_3)$ при $x_3 \rightarrow 0$ не является убывающей на бесконечности. Также, учитывая четность решений краевой задачи (3) по параметру преобразования α , можем заключить, что символ ядра есть четная функция.

Рассмотрим краевую задачу (3) и для исследования поведения решения при $x_3 \rightarrow 0$, не нарушая общности рассуждений, рассмотрим ее упрощенную постановку с граничными условиями $\tilde{u}(0) = 1$, $\tilde{\sigma}(1) = 1$.

Согласно методу Вишика — Люстерника, поведение погранслоинных решений на нижней границе определяется их представлением в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\alpha, x_3) &= \left(u_0(x_3) + \alpha u_1(x_3) + \frac{1}{\alpha} u_2(x_3) + o(\alpha^{-1}) \right) e^{-\alpha x_3}, \\ \tilde{\sigma}(\alpha, x_3) &= \left(\sigma_0(x_3) + \alpha \sigma_1(x_3) + \frac{1}{\alpha} \sigma_2(x_3) + o(\alpha^{-1}) \right) e^{-\alpha x_3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3) и выписывая соответствующие множители перед одинаковыми степенями α , получим серию краевых задач относительно неизвестных функций σ_k, u_k , $k = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} \alpha^0 : \begin{cases} \sigma'_0 - \sigma_2 = -k^2 u_0, \\ u'_0 - u_2 = \frac{\sigma_0}{\mu}, \\ u_0(0) = 1, \\ \sigma_0(1) = 1; \end{cases} & \alpha^1 : \begin{cases} \sigma'_1 - \sigma_0 = \mu u_2 - k^2 u_1, \\ u'_1 - u_0 = \frac{\sigma_1}{\mu}, \\ u_1(0) = 0, \\ \sigma_1(1) = 0; \end{cases} \\ \alpha^2 : \begin{cases} \sigma_1 = -\mu u_0, \\ u_0(0) = 1, \\ \sigma_0(1) = 1; \end{cases} & \alpha^3 : \begin{cases} \mu u_1 = 0, \\ u_1(0) = 0; \end{cases} & \alpha^{\frac{1}{2}} : \begin{cases} \sigma'_2 = -k^2 u_2, \\ u'_2 = \frac{\sigma_2}{\mu}, \\ u_2(0) = 0, \\ \sigma_2(1) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Последовательное решение краевых задач (7) приводит к необходимости решения лишь краевой задачи относительно σ_0 , u_0 , которое может быть получено методом пристрелки. В результате, решение систем краевых задач (7) имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_0(x_3) &= \frac{1 - \sigma_{01}(1)}{\sigma_{02}(1)} \sigma_{02}(x_3) + \sigma_{01}(x_3), \\ u_0(x_3) &= \frac{1 - \sigma_{01}(1)}{\sigma_{02}(1)} u_{02}(x_3) + u_{01}(x_3), \\ \sigma_1(x_3) &= -\mu(x_3) u_0(x_3), \\ u_1(x_3) &= u_2(x_3) = \sigma_2(x_3) = 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Через σ_{0j} , u_{0j} , $j = 1, 2$, обозначены решения соответствующих вспомогательных задач Коши с граничными условиями $\sigma_{01}(0) = 0$, $u_{01}(0) = 1$, $\sigma_{02}(0) = 1$, $u_{02}(0) = 0$.

Таким образом, строя решения вида (6) с учетом (8), получаем

$$K_3(\alpha, x_3) \approx \sigma_{01}(x_3) - \frac{\sigma_{01}(1)}{\sigma_{02}(1)} \sigma_{02}(x_3) + \alpha \mu(x_3) \left(\frac{\sigma_{01}(1)}{\sigma_{02}(1)} u_{02}(x_3) - u_0(x_3) \right).$$

Учитывая свойства функции $K_3(\alpha, x_3)$, а также граничные условия в нуле соответствующих решений, находим

$$\lim_{\substack{x_3 \rightarrow +0, \\ |\alpha| \rightarrow +\infty}} K_3(\alpha, x_3) \approx K_3^0 |\alpha|, \quad K_3^0 = -\mu(+0).\tag{9}$$

Полученная асимптотика подтверждается результатами вычислительных экспериментов и соответствует полученным ранее выводам работы для однородной полосы [7].

С учетом асимптотической оценки символа ядра, выделим главную и регулярную части ядра (5):

$$\begin{aligned}K(r) &= \int_{\sigma} K_3(\alpha, 0) e^{i\alpha r} d\alpha = \int_{\sigma} \left(K_3(\alpha, 0) - K_3^0 |\alpha| + K_3^0 |\alpha| \right) e^{i\alpha r} d\alpha \\ &= \int_{\sigma} \left(K_3(\alpha, 0) - K_3^0 |\alpha| \right) e^{i\alpha r} d\alpha + \int_{\sigma} K_3^0 |\alpha| e^{i\alpha r} d\alpha = K^{reg}(r) - \frac{2}{r^2} K_3^0, \\ K^{reg}(r) &= \int_{\sigma} \left(K_3(\alpha, 0) - K_3^0 |\alpha| \right) e^{i\alpha r} d\alpha, \quad r = \xi - x_1.\end{aligned}\tag{10}$$

Решение ИУ (5) возможно лишь численно, на основе метода граничных элементов и метода коллокации.

5. Дискретизация ГИУ

Для получения дискретного аналога ГИУ (5) сведем его к ИУ, проведя параметризацию расслоений, введя инвариантные параметры, характеризующие расстояние по горизонтали от точки приложения нагрузки до середин расслоений d_1, d_2 , а также их полудлины l_1, l_2 :

$$\begin{aligned}x_1, \xi \in [a, b], \quad x_1 = d_1 + l_1 \tau, \quad \tau \in [-1, 1], \quad \xi = d_1 + l_1 t, \quad t \in [-1, 1], \\ x_1, \xi \in [c, d], \quad x_1 = d_2 + l_2 \tau, \quad \tau \in [-1, 1], \quad \xi = d_2 + l_2 t, \quad t \in [-1, 1].\end{aligned}\tag{11}$$

В результате запишем (5) в виде

$$\begin{aligned}
l_1 \int_{-1}^1 \chi_1(t) R(l_1(t - \tau)) dt + l_2 \int_{-1}^1 \chi_2(t) R(d_2 + l_2 t - d_1 - l_1 \tau) d\xi &= F(d_1 + l_1 \tau), \\
l_1 \int_{-1}^1 \chi_1(t) R(d_1 + l_1 t - d_2 - l_2 \tau) dt + l_2 \int_{-1}^1 \chi_2(t) R(l_2(t - \tau)) d\xi &= F(d_2 + l_2 \tau), \\
R(y) &= -\frac{2}{y^2} K_3^0 + K^{reg}(y), \quad \tau \in [-1, 1].
\end{aligned} \tag{12}$$

Применим метод коллокаций, определив в качестве точек дискретной схемы середины отрезков разбиения и узлы разбиения отрезка $[-1, 1]$: $\{t_j^0\}_{j=1}^N, \{t_i\}_{i=1}^{N+1}$. Составим СЛАУ относительно вектора неизвестных $\chi = (\chi_1(t_1^0), \dots, \chi_1(t_N^0), \chi_2(t_1^0), \dots, \chi_2(t_N^0))^T$

$$\begin{aligned}
A\chi &= B, \\
B &= \{F(d_1 + l_1 t_j^0), F(d_2 + l_2 t_j^0)\}_{j=1, \dots, N}, \\
A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \\
A_{11} &= \left\{ \frac{2K_3^0}{l_1} a_{ij} + l_1 K^{reg}(l_1(t_i - t_j^0)) \right\}_{i,j=1, \dots, N}, \\
A_{12} &= l_2 \{2K_3^0 \bar{a}_{ij} + K^{reg}(d + l_2 t_i - l_1 t_j^0)\}_{i,j=1, \dots, N}, \\
A_{21} &= l_1 \{2K_3^0 \bar{a}_{ij} + K^{reg}(d + l_1 t_i - l_2 t_j^0)\}_{i,j=1, \dots, N}, \\
A_{22} &= \left\{ \frac{2K_3^0}{l_2} a_{ij} + l_2 K^{reg}(l_2(t_i - t_j^0)) \right\}_{i,j=1, \dots, N}, \\
a_{ij} &= \frac{1}{t_{i+1} - t_j^0} - \frac{1}{t_i - t_j^0}, \bar{a}_{ij} = \frac{1}{d + l_2 t_{i+1} - l_1 t_j^0} - \frac{1}{d + l_2 t_i - l_1 t_j^0}, \quad d = d_2 - d_1.
\end{aligned} \tag{13}$$

При проведении численных расчетов для вычисления интегралов, стоящих в правой части и в регулярной части ядра, могут быть использованы как схемы численного интегрирования, так и теория вычетов

$$F(y) = 2\pi i s p \sum_{n=1}^{N_1} \frac{e^{i\alpha_n |y|}}{\Sigma_{2,\alpha}(-s\alpha_n, 1)}, \quad s = \text{Sign}(y), \tag{14}$$

где α_n ($\text{Re}(\alpha_n) \geq 0, \text{Im}(\alpha_n) \geq 0$) — корни дисперсионного уравнения $\Sigma_2(\alpha, 1) = 0$, которые могут быть найдены только численно путем многократного обращения к решению задачи Коши. Стоит отметить, что множество корней уравнения представляет собой конечное число m_1 ($m_1 < N_1$) вещественных и счетное множество мнимых корней, при этом m_1 — определяет число бегущих волн в полосе. В формуле (14) $\Sigma_{2,\alpha}$ — решение

следующей вспомогательной задачи Коши:

$$\begin{aligned}\Sigma'_2 &= (\alpha^2 \mu - k^2) U_2, \quad U'_2 = \frac{\Sigma_2}{\mu}, \\ \Sigma'_{2,\alpha} &= 2\alpha \mu U_2 + (\alpha^2 \mu - k^2) U_{2,\alpha}, \quad U'_{2,\alpha} = \frac{\Sigma_{2,\alpha}}{\mu}, \\ U_2(0) &= 0, \quad \Sigma_2(0) = 1, \\ U_{2,\alpha}(0) &= 0, \quad \Sigma_{2,\alpha}(0) = 0.\end{aligned}$$

После нахождения функции раскрытия можно построить волновое поле смещения на верхней границе полосы, применив к (4) обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned}u(x_1, 1) &= u^0(x_1) + \sum_{m=1}^2 l_m \int_{-1}^1 L(d_m + l_m t - x_1) \chi_m(t) dt, \\ L(\xi - x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K_1(\alpha, 1) e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha, \\ u^0(x_1) &= \frac{p}{2\pi} \int_{\sigma} K_2(\alpha, 1) e^{-i\alpha x_1} d\alpha.\end{aligned}\tag{15}$$

Для вычисления интегралов в представлении поля (15) могут быть использованы формулы численного интегрирования и теория вычетов.

Для дальнейшего решения задачи идентификации расслоений по данным о полях смещений, измеренных в точках верхней границы полосы, очень важным этапом является анализ полей смещений на границе и их чувствительность к параметрам дефектов. Обнаружено, что в случае, когда полудлины дефектов составляют не менее $0.01h$, их длины $l_1/l_2 \cong 1$ и расположены на расстоянии от $3l_1$ до $30l_1$, наблюдается уверенное восстановление дефектов. В случае, когда $\frac{l_1}{l_2} \gg 1$, $l_2 \ll 0.01h$, т. е. размеры одного из дефектов существенно больше размеров другого, то «малый» дефект становится менее «чувствительным» для поля смещения и соответственно менее заметным для процедуры идентификации. На рис. 2а приведены графики полей смещений на верхней границе неоднородной полосы $h = 1$, $\mu(x_3) = 1 + \frac{x^2}{10}$ для различных значений волнового числа, когда в полосе одна ($k = 4$) и две ($k = 7$) бегущие волны при $l_1 = l_2 = 0.1h$, $d_1 = \frac{h}{2}$, $d = 5d_1$. На рис. 2б приведены графики вещественных частей полей смещений, измеренных на верхней границе полосы, для расслоений разной длины (меняется длина только первого расслоения) $l_1 = 0.01$ (сплошная), $l_1 = 0.05$ (пунктир), $l_1 = 0.1$ (точки) при $d_1 = 0.5$, $l_2 = 0.1$, $d_2 = 3.0$, $k = 5$. Как видно из графиков, на рисунке присутствуют участки менее «чувствительные» к изменению длины расслоения, при этом амплитуда волнового поля более «чувствительна» к изменению длин дефектов. На рис. 2с приведены графики полей смещений для случаев, когда два расслоения расположены близко друг к другу, при этом компоненты поля смещения совпадают с компонентами поля смещения от аналогичного одиночного расслоения $l = 0.07$, $d = 1.05$, $l_1 + l_2 = l$, $k = 5$.

6. Решение обратной задачи

Обратная задача заключается в реконструкции инвариантных параметров расслоений l_1 , l_2 , d_1 , d_2 по данным ультразвукового зондирования, снятым в дискретном наборе точек верхней границы полосы при фиксированном значении частоты колебания

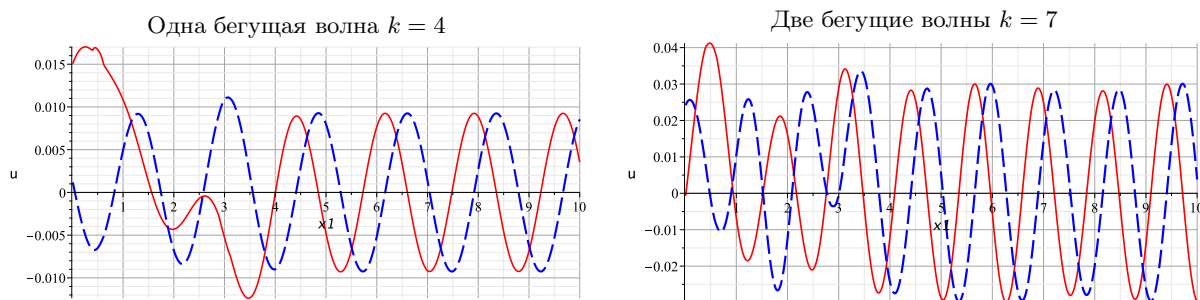


Рис. 2 а. Графики вещественной (красная) и мнимой (синяя) частей поля смещения при $x_3 = h$.

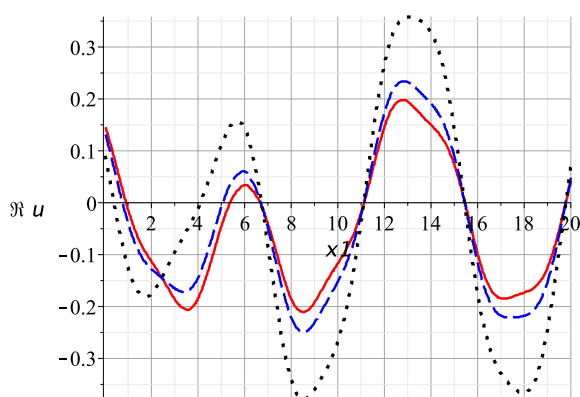


Рис. 2 б. Графики вещественных частей полей смещений для расслоений разной длины.

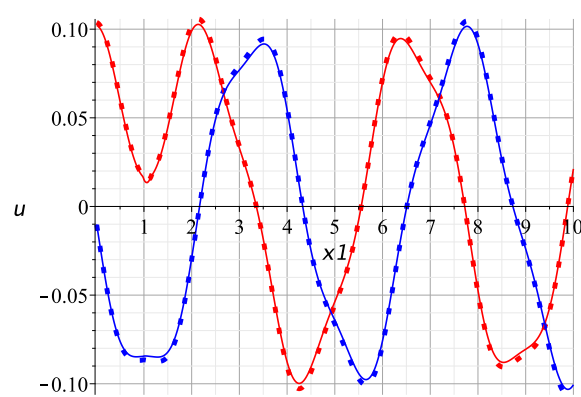


Рис. 2 с. Графики вещественной (красная) и мнимой (синяя) частей поля смещения.

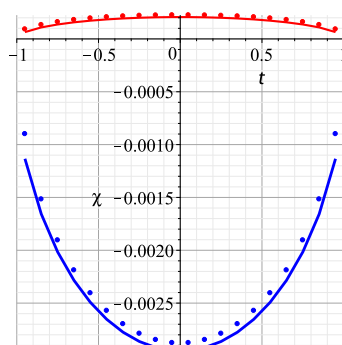


Рис. 3. Графики вещественной (красная) и мнимой (синяя) частей функции раскрытия. Методом ГЭ (сплошные) и асимпт. методом (точки).

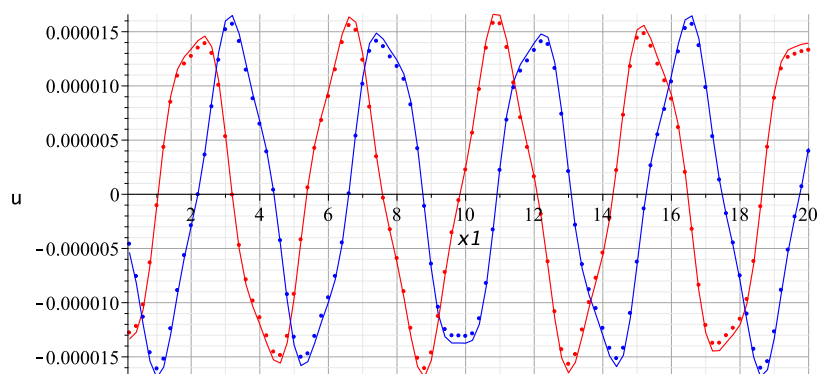


Рис. 4. Графики вещественной (красная) и мнимой (синяя) частей поля смещения. Методом ГЭ (сплошные) и асимпт. методом (точки).

$k, u^*(x_1^*, k)$, $x_1^* \in [x_{11}, x_{12}]$, $k \in [k_1, k_2]$. В дальнейших формулах под обозначениями $u^*(x_1^*, k)$, $u(x_1^*, k)$ будем иметь в виду волновые поля на верхней границе полосы, измеренные и рассчитанные по формуле (15) в точке $x_1 = x_1^*$, $x_3 = 1$ при фиксированной частоте k соответственно.

С учетом построенного выражения (15) для поля смещения соответствующие параметры дефекта могут быть найдены из условия минимума функционала невязки

$$\Phi(l_1, l_2, d_1, d_2) = \min_{l_1, l_2, d_1, d_2} \sum_{j=1}^N |u^*(x_{1j}^*, k) - u(x_{1j}^*, k)|^2. \quad (16)$$

Таблица 1

Результаты восстановления параметров расслоений

Параметры	Точные значения	Восстановленные значения		Точность восстановления $\varepsilon(\%)$
		Генетический	Нелдера — Мида	
l_1	0.1	0.05669	0.10000	$\ll 1$
d_1	1.0	1.23781	1.00012	$\ll 1$
l_2	0.1	0.12669	0.10001	$\ll 1$
d_2	0.5	0.72516	0.49978	$\ll 1$
l_1	0.05	0.04466	0.03997	20.6
d_1	1.5	1.69068	1.68320	2
l_2	0.05	0.05626	0.05832	16.64
d_2	1.5	1.48628	1.52467	1.64
l_1	0.1	0.100257	0.100017	< 1
d_1	0.5	0.504458	0.500197	< 1
l_2	0.01	0.006266	0.009811	1.9
d_2	1.0	1.29982	1.00869	< 1
l_1	0.05	0.04813	0.05000	$\ll 1$
d_1	0.5	0.53316	0.49999	$\ll 1$
l_2	0.05	0.05078	0.05000	$\ll 1$
d_2	3.0	3.03187	2.99997	$\ll 1$

Решение оптимизационной задачи (16) не представляется сложным, для численной реализации данного класса задач могут быть привлечены оптимизационные алгоритмы нулевого порядка. В табл. 1 приведены результаты восстановления параметров двух расслоений на базе генетического алгоритма. Дальнейшее уточнение полученных результатов осуществлено за счет использования на следующем этапе метода Нелдера — Мида (метод многогранника), где в качестве начального приближения заданы найденные на первом этапе (табл. 1) значения параметров. Точки наблюдения выбраны на участке $u_1^* \in [0.5, 2.3]$, $k = 5$, $\varepsilon = \frac{|r_t - r|}{r_t} 100$ — погрешность восстановления параметра r , где r_t — точное значение соответствующего параметра. Такой алгоритм решения обратной геометрической задачи является универсальным и применим к дефектам более сложной конфигурации, а также к задачам, в которых осуществлен учет затухания бегущих волн в полосе.

7. Случай одиночного расслоения. Асимптотика для «малого» дефекта

Рассмотрим частный случай одиночного расслоения, положив в полученных выражениях $l_2 = 0$, $d_2 = 0$. Тогда параметрами одиночного расслоения будут l_1 , d_1 .

Интегральное уравнение при этом примет вид

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{2K_3^0}{l_1(t-\tau)^2} + l_1 K^{reg}(t-\tau) \right) \chi_1(t) dt = F(d_1 + l_1\tau), \quad \tau \in [-1, 1]. \quad (17)$$

В случае расслоения малого относительного размера $\frac{l_1}{h} \ll 1$ имеет место асимптотическая оценка решения ИУ

$$\int_{-1}^1 \frac{\chi_1(t)}{(t-\tau)^2} dt = -\frac{l_1 F(d_1)}{2K_3^0}, \quad \tau \in [-1, 1],$$

вида

$$\chi_1(t) = W_0 \sqrt{1-t^2}, \quad W_0 = \frac{l_1 F(d_1)}{2\pi K_3^0}. \quad (18)$$

Асимптотическая оценка волнового поля на верхней границе имеет вид

$$u(x_1, 1) = u^0(x_1, 1) + \frac{l_1^2 F(d_1)}{4\pi K_3^0} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} L(d_1 + l_1 t - x_1) dt.$$

Подынтегральную функцию можно вычислить по теории вычетов

$$\begin{aligned} L(\xi - x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} K_1(\alpha, 1) e^{i\alpha(\xi - x_1)} d\alpha \\ &= 2\pi i s \sum_{n=1}^M \frac{\Sigma_2(s\alpha_n, 1) U_1(s\alpha_n, 1) - \Sigma_1(s\alpha_n, 1) U_2(s\alpha_n, 1)}{\Sigma_{2,\alpha}(s\alpha_n, 1)} e^{i\alpha_n |d_1 + l_1 t - x_1|}, \\ s &= \text{Sign}(d_1 + l_1 t - x_1). \end{aligned}$$

На рис. 3, 4 приведены результаты решения прямой задачи для случая одиночного расслоения при $\mu = 1 + \frac{x_2}{10}$, $l_1 = 0.001$, $d_1 = 0$, $k = 5$, полученные по асимптотическим формулам и на базе метода ГЭ.

Для решения обратной задачи сделаем несколько допущений. Предположим, что данные снимаются в дальней зоне справа от трещины $s < 0$, в этом случае поле смещения в зависимости от интересующих нас параметров x_1 , l_1 , d_1 , k запишется в виде

$$\begin{aligned} u(x_1, 1) - u^0(x_1) &= \frac{l_1^2 F(d_1, k) i}{4\pi K_3^0(k)} \sum_{n=1}^M R_n(k) D_n(l_1, k) e^{-i\alpha_n(k)(d_1 - x_1)}, \\ R_n(k) &= \frac{\Sigma_2(-\alpha_n(k), 1) U_1(\alpha_n(k), 1) - \Sigma_1(\alpha_n(k), 1) U_2(\alpha_n(k), 1)}{\Sigma_{2,\alpha}(\alpha_n(k), 1)}, \\ D_n(l_1, k) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} e^{-i\alpha_n(k) l_1 t} dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение (19) в предположении о малости относительного размера дефекта упростилось относительно исходного представления (14), и решение обратной задачи может быть сведено к минимизации функционала невязки относительно двух параметров, как в случае позиционного зондирования, так и для частотного зондирования.

Однако возможно и дальнейшее упрощение с целью получения простых формул для определения параметров расслоения и составления схемы поэтапной реконструкции.

Поэтапная реконструкция заключается в последовательном исключении параметров дефекта и комбинации эффективных режимов съема дополнительной информации.

Пусть в качестве дополнительной информации заданы значения полей смещений (без учета эталонного поля) при фиксированной частоте в двух точках x_1^* , x_1^{**} : u^* , u^{**} соответственно, тогда построим функцию двух переменных вида

$$\Phi(l_1, d_1) = \left| \frac{u^*}{u^{**}} - \frac{\sum_{n=1}^M R_n(k) D_n(l_1, k) e^{-i\alpha_n(k)(d_1 - x_1^*)}}{\sum_{n=1}^M R_n(k) D_n(l_1, k) e^{-i\alpha_n(k)(d_1 - x_1^{**})}} \right|. \quad (20)$$

Так, для расслоений $\frac{l_1}{h} < 0.005$ $D_n(l_1, k) \sim \frac{\pi}{2}$ и функция Φ будет зависеть только от d_1 , при этом для определения полудлины можно использовать представление (19).

Так, при $x_1^* = 1.2$, $x_1^{**} = 1.0$, $d_1 = 0.0$, $l_1 < 0.01h$ параметры дефекта восстанавливаются с погрешностью менее 10%, что допустимо при реконструкции дефектов.

Также процедуру реконструкции можно проводить по заданным амплитудам бегущих волн

$$A_m(k, l_1, d_1) = \frac{l_1^2 F(d_1, k) i}{4\pi K_3^0(k)} R_m(k) D_m(l_1, k) e^{-i\alpha_m(k)d_1}, \quad m = 1, 2. \quad (21)$$

Например, выделив первую и вторую амплитуды A_1^* , A_2^* , при фиксированной частоте k , когда в полосе распространяются две бегущие волны $m = 1, 2$ и $l_1 < 0.005h$

$$\begin{aligned} d_1 &= \operatorname{Re} \left(\frac{\ln(R_2 A_1^* (R_1 A_2^*)^{-1})}{\alpha_1 - \alpha_2} \right), \\ l_1^2 &= \operatorname{Re} \left(\frac{8K_3^0 e^{i\alpha_1 d_1} A_1^*}{F(d_1, k) R_1 i} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Согласно полученным формулам (22) проведены расчеты по восстановлению параметров расслоения, в качестве точек наблюдения выбраны две точки $x^* = 1.0$, $x^{**} = 1.2$, $k = 6$. Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты восстановления одиночного расслоения на базе асимптотических формул

Параметры	Точные значения	Восстановленные значения	Точность восстановления ε (%)
l_1	0.001	0.001	$<< 1$
d_1	0.0	0.0	$<< 1$
l_1	0.01	0.011	10
d_1	0.0	0.0	$<< 1$
l_1	0.1	-	> 20
d_1	0.0	-	> 20

Заключение

Исследована обратная геометрическая задача об обнаружении расслоений от основания ФГ полосы. Обратная задача реконструкции дефектов решена как на базе минимизационных алгоритмов, так и на основе асимптотического подхода для дефектов малого относительного размера. Проведены вычислительные эксперименты, которые подтверждают эффективность предлагаемых подходов.

Литература

1. Ватульян А. О., Явруян О. В. Колебания полосы с отслоением в рамках однопараметрической модели Айфантиса градиентной теории упругости // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика.—2022.—№ 3.—С. 70–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.08.
2. Vatul'yan A. O., Nesterov S. A., Yavruyan O. V. The models of gradient mechanics and singularly perturbed boundary value problems // Lobachevskii J. Math.—2023.—Vol. 44, № 8.—P. 3604–3612. DOI: 10.1134/S1995080223080565.
3. Ломакин Е. В., Лурье С. А., Рабинский Л. Н., Соляев Ю. О. Об уточнении напряженного состояния в прикладных задачах упругости за счет градиентных эффектов // Докл. Академии наук.—2019.—Т. 489, № 6.—С. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591.
4. Fomenko S. I., Golub M. V., Zhang Ch., Bui T. Q., Wang Y.-S. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals // Int. J. Solids Struct.—2014.—Vol. 51, issue 13.—P. 2491–2503. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.03.017.
5. Golub M. V., Doroshenko O. V., Fomenko S. I., Wang Y., Zhang C. Elastic wave propagation, scattering and localization in layered phononic crystals with arrays of striplike cracks // Int. J. Solids Struct.—2020.—Vol. 212.—P. 1–22. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.12.001.
6. Евдокимов А. А., Глушкова Н. В., Глушкова Е. В. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журн.—2018.—Т. 64, № 1.—С. 3–12. DOI: 10.7868/S0320791918010082.
7. Vatul'yan A. O., Yavruyan O. V. An asymptotic method for solving the problem of identifying a curvilinear crack in an elastic layer // Russ. J. Nondestruct Test.—2020.—Vol. 56, № 10.—P. 810–819. DOI: 10.1134/S1061830920100101.
8. Ватульян А. О., Явруян О. В. Исследование обратных задач теории трещин с использованием асимптотического метода // Эколог. вестн. науч. центров ЧЭС.—2018.—Т. 15, № 2.—С. 39–46.
9. Ge H., Chua Kim Huat D., Koh C. G., Dai G., Yu Y. Guided wave-based rail flaw detection technologies: state-of-the-art review // Structural Health Monitoring.—2021.—Vol. 21, № 3.—P. 1287–1308. DOI: 10.1177/14759217211013110.
10. Guan R., Lu Y., Duan W., Wang X. Guided waves for damage identification in pipeline structures: a review // Structural Control and Health Monitoring.—2017.—Vol. 24, № 11. DOI: 10.1002/stc.2007.
11. Ватульян А. О., Юров В. О. Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины // Акустический журн.—2020.—Т. 66, № 5.—С. 467–474. DOI: 10.31857/S0320791920050147.
12. Vatul'yan A. O., Plotnikov D. K., Yurov V. O. On the deformation of coated functionally graded structures with delamination // Acta Mech.—2021.—Vol. 232, № 5.—P. 1863–1873. DOI: 10.1007/s00707-020-02846-w.
13. Bogachev I. V., Vatul'yan A. O. On modeling bodies with delaminating coatings taking into account the fields of prestresses // PNRPU Mech. Bull.—2020.—№ 1.—P. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.01.
14. Zhu L., Ke L. Vibrational power flow and damage identification of cracked functionally graded plates // Arch. Appl. Mech.—2023.—Vol. 93.—P. 1925–1942. DOI: 10.1007/s00419-023-02363-x.
15. Zhu L., Ke L., Xiang Y., Zhu X. Q. Free vibration and damage identification of cracked functionally graded plates // Composite Structures.—2020.—Vol. 250.—Article no. 112517. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112517.
16. Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д. Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, № 4.—С. 15–27. DOI: 10.46698/14464-6098-4749-m.
17. Tomaev M. R., Totieva Zh. D. An Inverse Two-Dimensional Problem for Determining Two Unknowns in Equation of Memory Type for a Weakly Horizontally Inhomogeneous Medium // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 3.—С. 112–134. DOI: 10.46698/e7124-3874-1146-k.

18. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Обратная задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Владикавк. мат. журн.—2024.—Т. 26, вып. 1.—С. 68–84. DOI: 10.46698/x5277-2885-8052-p.
19. Bazulin E. G., Goncharky A. V., Romanov S. Y., Seryozhnikov S. Y. Assessment of the Possibilities of Ultrasound Tomographic Imaging of Multi-Layer Composite Materials // Lobachevskii J. Math.—2024.—Vol. 45, № 7.—pp. 2974–2983. DOI: 10.1134/S1995080224603692.
20. Ворович И. И., Бабешко В. В. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.—М.: Наука, 1989.—320 с.
21. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.—1957.—Т. 12, № 5 (77).—С. 3–122.
22. Ватульян А. О., Плотников Д. К. Контактная задача для функционально-градиентной ортотропной полосы // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2022.—Т. 22, вып. 4.—С. 479–493. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493.

Статья поступила 17 июля 2025 г.

ЯВРУЯН ОКСАНА ВЯЧЕСЛАВОВНА
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: yavruyan@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-0444-4496>

*Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 3, P. 134–149*

INVERSE PROBLEM OF DELAMINATION RECONSTRUCTION IN A FUNCTIONALLY-GRADED STRIP

Yavruyan, O. V.¹

¹ Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: yavruyan@mail.ru

Abstract. The steady-state oscillations of a functionally graded strip weakened by tunnel delaminations at its lower boundary are studied. The direct problem of constructing the wave field throughout the strip is solved. Its solution is obtained by reduction to a boundary integral equation (BIE) with respect to the unknown components of the delamination opening displacement function. This function is nonzero only within the zone of defects. The boundary value problem with variable coefficients for the transformed displacement and stress fields is solved using the shooting method. An analysis of the BIE kernel is performed. The asymptotic behavior of the symbol of the kernel at infinity is investigated, yielding an analytical estimate that allows separation of the BIE kernel into regular and irregular (singular) parts. Discretization of the BIE is implemented using the boundary element method (BEM), collocation methods, and numerical quadrature schemes for singular integrals. The inverse problem of delamination identification is reduced to determining the invariant parameters of the defect through minimization of a residual functional, using zero-order optimization algorithms (genetic algorithm, Nelder-Mead method). An asymptotic analysis is performed for defects of small relative sizes. The inverse problem of crack parameter identification is solved using displacement field data measured on a portion of the upper boundary of the strip. A comparative analysis is conducted of the results obtained via BEM and the asymptotic approach. The applicability limits of asymptotic formulas are established.

Keywords: steady-state oscillations, strip, inhomogeneity, FGM (functionally graded materials), delaminations, inverse problem, reconstruction, invariant parameters, shooting method, boundary integral equations, singularity, asymptotics, collocation method, residue theory.

AMS Subject Classification: 45B05, 45E99, 65R10, 74H10, 74H15, 74H35, 74H75.

For citation: Yavruyan, O. V. Inverse Problem of Delamination Reconstruction in a Functionally-Graded Strip, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 3, pp. 134–149 (in Russian). DOI: 10.46698/k5003-0293-2639-b.

References

1. Vatul'yan, A. O. and Yavruyan, O. V. Vibrations of a Strip with Delamination in the framework of the One-Parameter Aifantis Model of Gradient Elasticity Theory, *Perm National Research Polytechnic University Mechanics Bulletin*, 2022, no. 3, pp. 70–82. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.08.
2. Vatul'yan, A. O. and Nesterov, S. A. and Yavruyan, O. V. The Models of Gradient Mechanics and Singularly Perturbed Boundary Value Problems, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, no. 8, pp. 3604–3612. DOI: 10.1134/S1995080223080565.
3. Lomakin, E. V. and Lurie, S. A. and Rabinskiy, L. N. and Solyaev, Y. O. On the Refined Stress Analysis in the Applied Elasticity Problems Accounting of Gradient Effects, *Doklady Akademii Nauk*, 2019, vol. 489, no. 6, pp. 585–591. DOI: 10.31857/S0869-56524896585-591.
4. Fomenko, S. I., Golub, M. V. and Bui, T. Q. In-Plane Elastic Wave Propagation and Band-Gaps in Layered Functionally Graded Phononic Crystals, *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 13, pp. 2491–2503. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.03.017.
5. Golub, M. V., Doroshenko, O. V., Fomenko, S. I., Wang, Y. and Zhang, C. Elastic Wave Propagation, Scattering and Localization in Layered Phononic Crystals with Arrays of Striplike Cracks, *International Journal of Solids and Structures*, 2020, vol. 212, pp. 1–22. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.12.001.
6. Evdokimov, A. A., Glushkova, N. V. and Glushkov, E. V. Hybrid Numerical-Analytical Scheme for Calculating the Diffraction of Elastic Waves in Locally Inhomogeneous Waveguides, *Acoustical Physics*, 2018, vol. 64, no. 1, pp. 3–12 (in Russian). DOI: 10.7868/S0320791918010082.
7. Vatul'yan, A. O. and Yavruyan, O. V. An Asymptotic Method for Solving the Problem of Identifying a Curvilinear Crack in an Elastic Layer, *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2020, vol. 56, no. 10, pp. 810–819. DOI: 10.1134/S1061830920100101.
8. Vatul'yan, A. O. and Yavruyan, O. V. Investigation of Inverse Problems of Crack Theory Using Asymptotic Method, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2018, vol. 15, no. 2, pp. 39–46 (in Russian).
9. Ge, H., Chua Kim Huat, D., Koh, C. G., Dai, G. and Yu, Y. Guided Wave-Based Rail Flaw Detection Technologies: State-of-the-Art Review, *Structural Health Monitoring*, 2021, vol. 21, no. 3, pp. 1287–1308. DOI: 10.1177/14759217211013110.
10. Guan, R., Lu, Y., Duan, W. and Wang, X. Guided Waves for Damage Identification in Pipeline Structures: a Review, *Structural Control and Health Monitoring*, 2017, vol. 24, no. 11. DOI: 10.1002/stc.2007.
11. Vatul'yan, A. O. and Yurov, V. O. Numerical and Asymptotic Solution of the Problem of Oscillations of an Inhomogeneous Waveguide with an Annular Crack of Finite Width, *Acoustical Physics*, 2020, vol. 66, no. 5, pp. 441–448. DOI: 10.1134/S1063771020050140.
12. Vatul'yan, A. O., Plotnikov, D. K. and Yurov, V. O. On the Deformation of Coated Functionally Graded Structures with Delamination, *Acta Mechanica*, 2021, vol. 232, no. 5, pp. 1863–1873. DOI: 10.1007/s00707-020-02846-w.
13. Bogachev, I. V. and Vatul'yan, A. O. On Modeling Bodies with Delaminating Coatings Taking into Account the Fields of Prestresses, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 5–16. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.1.01.
14. Zhu, L. and Ke, L. Vibrational Power Flow and Damage Identification of Cracked Functionally Graded Plates, *Archive of Applied Mechanics*, 2023, vol. 93, pp. 1925–1942. DOI: 10.1007/s00419-023-02363-x.
15. Zhu L., Ke L., Xiang Y. and Zhu X. Q. Free Vibration and Damage Identification of Cracked Functionally Graded Plates, *Composite Structures*, 2020, vol. 250, Article no. 112517. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112517.
16. Akhmatov, Z. A. and Totieva, Zh. D. Quasi-Two-Dimensional Coefficient Inverse Problem for the Wave Equation in a Weakly Horizontally Inhomogeneous Medium with Memory, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2021, vol. 23, no. 4, pp. 15–27 (in Russian). DOI: 10.46698/l4464-6098-4749-m.
17. Tomaev, M. R. and Totieva, Zh. D. An Inverse Two-Dimensional Problem for Determining Two Unknowns in Equation of Memory Type for a Weakly Horizontally Inhomogeneous Medium, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 112–134. DOI: 10.46698/e7124-3874-1146-k.
18. Vatul'yan, A. O. and Nesterov, S. A. Inverse Problem of Thermo-Electro-Elasticity for a Functionally Graded Layer, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2024, vol. 26, no. 1, pp. 68–84 (in Russian). DOI: 10.46698/x5277-2885-8052-p.

19. Bazulin, E. G., Goncharsky, A. V., Romanov, S. Y. and Seryozhnikov, S. Y. Assessment of the Possibilities of Ultrasound Tomographic Imaging of Multi-Layer Composite Materials, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, vol. 45, no. 7, pp. 2974–2983. DOI: 10.1134/S1995080224603692.
20. Vorovich, I. I. and Babeshko, V. V. Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains, Moscow, Nauka, 1989, 320 p. (in Russian).
21. Vishik, M. I. and Lyusternik, L. A. Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with Small Parameter, *Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, no. 5 (77), pp. 3–122.
22. Vatulyan, A. O. and Plotnikov, D. K. Contact Problem for a Functionally Graded Orthotropic Strip, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics* [Proceedings of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2022, vol. 22, no. 4, pp. 479–493 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-479-493.

Received July 17, 2025

OKSANA V. YAVRUYAN

Southern Mathematical Institute of VSC RAS,

53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,

Leading Research Fellow, Department of Differential Equations

E-mail: yavruyan@mail.ru