

УДК 519.17

DOI 10.46698/b1924-8658-8779-p

ПРИМИТИВНЫЕ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
С $\mu = 3$ НЕ СУЩЕСТВУЮТ[#]

В. И. Белоусова¹, Х. Ли², А. А. Махнев³,

¹ Уральский федеральный университет,
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19;

² Хайнаньский университет,
Китай, 570228, провинция Хайнань, Хайкоу, пр. Жэньминь Дадао, 58;

³ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

E-mail: vkazarina@mail.ru, lhy9694@163.com, makhnev@imm.uran.ru

70-летию В. А. Койбаева посвящается

Аннотация. Если Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Gamma_{1,2}$, то $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф без треугольников. Для графа Γ с массивом пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ граф $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$. Графы небольших степеней имеют массивы пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$, $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ и $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$, $\{36, 25, 2, 1; 1, 2, 25, 36\}$. Граф с массивом пересечений $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$ не существует. Любой сильно регулярный граф Γ без треугольников с $\mu = 3$ имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$. Такой граф существует тогда и только тогда, когда определено его двудольное удвоение (дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{21, 20, 9, 3, 1; 1, 3, 9, 20, 21\}$). В работе доказано, что сильно регулярный граф с параметрами $(162, 21, 0, 3)$ не существует. Как следствие, дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ и двудольный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{36, 35, 47, 6; 1, 9, 30, 36\}$ не существуют.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, сильно регулярный граф, антиподальный граф.

AMS Subject Classification: 05E30, 05C50.

Образец цитирования: Белоусова В. И., Ли Х., Махнев А. А. Прimitives сильно регулярные графы без треугольников с $\mu = 3$ не существуют // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 3.—С. 44–50. DOI: 10.46698/b1924-8658-8779-p.

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Он называется *реберно регулярным графом с параметрами*

[#] Исследование выполнено при поддержке Естественного-научного фонда Китая (проект 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

© 2026 Белоусова В. И., Ли Х., Махнев А. А.

(v, k, λ) , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) - λ -подграфом.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i . Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p_{ij}^l и параметры Крейна q_{ij}^l определены в [1, с. 43, 48].

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d . Для $I \subset \{1, 2, \dots, d\}$ граф Γ_I определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_I тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) \in I$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 4 с сильно регулярным графом Γ_I , $I \subset \{1, \dots, 4\}$. Тогда [2, предложение 7]:

$I = \{2\}$ в том и только в том случае, когда $\theta_1 + \theta_4 = a_1 = \theta_2 + \theta_3$;

$I = \{1, 2\}$ в том и только в том случае, когда $\theta_1 + \theta_4 = a_1 - c_2 = \theta_2 + \theta_3$.

Если Γ — антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 4 с сильно регулярным графом $\Gamma_{1,2}$, то $\Gamma_{3,4}$ — сильно регулярный граф без треугольников [3].

Q -полиномиальные дистанционно регулярные графы с массивами пересечений: $\{56, 45, 12, 1; 1, 12, 45, 56\}$ ($\Gamma_{3,4}$ имеет параметры $(324, 57, 0, 12)$), $\{115, 96, 20, 1; 1, 20, 96, 115\}$ $(784, 116, 0, 20)$, $\{204, 175, 30, 1; 1, 30, 175, 204\}$ $(1600, 205, 0, 30)$, $\{329, 288, 42, 1; 1, 42, 288, 329\}$ $(2916, 330, 0, 42)$ отвечают $AT4(q - 2, q, 2)$ -графам и не существуют по [4].

Графы небольших степеней имеют массивы пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$, $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ и $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$, $\{36, 25, 2, 1; 1, 2, 25, 36\}$.

Граф с массивом пересечений $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$ не существует [5].

Для графа Γ с массивом пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ граф $\Gamma_{3,4}$ имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$.

Любой сильно регулярный граф Γ без треугольников с $\mu = 3$ имеет параметры $(162, 21, 0, 3)$. Действительно, такой граф имеет степень $k = r^2 + 3r + 3$ для некоторого целого числа r , $v - k - 1 = (r^2 + 3r + 3)(r^2 + 3r + 2)/3$. Γ имеет собственные значения $r, -(r + 3)$, причем кратность r равна $(r + 2)(r^2 + 3r + 3)(r^2 + 4r + 6)/(6r + 9)$. Отсюда $2r + 3$ делит $(r + 2)(r^2 + 3r + 3)(r^2 + 4r + 6)$, $(2r + 3, r + 2) = 1$, $(2r + 3, r^2 + 3r + 3)$ делит $(2r + 3, 2r^2 + 6r + 6) = (2r + 3, 3r + 6)$, $(2r + 3, r^2 + 4r + 6)$ делит $(2r + 3, 2r^2 + 8r + 12) = (2r + 3, 5r + 12)$. Поэтому $2r + 3$ делит $3 \cdot 9$ и $2r + 3 = 9, 27$. Соответственно, $r = 3, 12$. Но в случае $r = 12$ число $3(2r + 3) = 81$ не делит $(r + 2)(r^2 + 3r + 3)(r^2 + 4r + 6) = 14 \cdot 183 \cdot 198$.

Заметим, что сильно регулярный граф с параметрами $(162, 21, 0, 3)$ существует тогда и только тогда, когда существует его двудольное удвоение (дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{21, 20, 9, 3, 1; 1, 3, 9, 20, 21\}$).

Теорема 1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{21, 20, 9, 3, 1; 1, 3, 9, 20, 21\}$ не существует.

Теорема 2. Сильно регулярный граф с параметрами $(162, 21, 0, 3)$ не существует.

Следствие 1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ не существует;*

(2) *двудольный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{36, 35, 47, 6; 1, 9, 30, 36\}$ не существует.*

Если Γ — двудольный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{36, 35, 47, 6; 1, 9, 30, 36\}$, то дополнение половинного графа является сильно регулярным графом с параметрами $(162, 21, 0, 3)$.

1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [6].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d , то $\left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что

$$d(w, u_i) = r_i, \quad \left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right] = \left| \left\{ \begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right\} \right|.$$

Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix} \right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW} \delta_{hV}$, где δ — символ Кронекера. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и подсчитывая число вершин всех расстояний от третьей:

$$\sum_{l=1}^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \quad \sum_{l=1}^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \quad \sum_{l=1}^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0], (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i - j| > W$ или $i + j < W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix} \right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим

$$\{ijh\} = \left\{ \begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix} \right\}, \quad [ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix} \right], \quad [ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ihj \end{smallmatrix} \right], \quad [ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} vuw \\ jih \end{smallmatrix} \right], \quad [ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} wvu \\ hji \end{smallmatrix} \right].$$

Вычисление параметров $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Свойства графа с массивом пересечений $\{21, 20, 9, 3, 1; 1, 3, 9, 20, 21\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{21, 20, 9, 3, 1; 1, 3, 9, 20, 21\}$. Антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(162, 21, 0, 3)$.

Далее, Γ имеет $1 + 21 + 140 + 140 + 21 + 1 = 324$ вершины, спектр $21^1, 9^{21}, 3^{105}, 0^{120}, -6^{56}, -9^{21}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 21 & 105 & 120 & 56 & 21 \\ 1 & 9 & 15 & 0 & -16 & -9 \\ 1 & 3 & -3 & -6 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -3 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & -9 & 15 & 0 & -16 & 9 \\ 1 & -21 & 105 & -120 & 56 & -21 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.1. *Ненулевые числа пересечений графа Γ равны:*

$$\begin{aligned} p_{15}^4 &= p_{25}^3 = p_{35}^2 = p_{45}^1 = 1, \\ p_{11}^2 &= p_{44}^2 = 3, \\ p_{12}^2 &= p_{12}^3 = p_{13}^2 = p_{13}^3 = p_{24}^2 = p_{24}^3 = p_{34}^2 = p_{34}^3 = 9, \\ p_{12}^1 &= p_{13}^4 = p_{34}^1 = 20, \\ p_{14}^5 &= 21, \\ p_{22}^3 &= p_{23}^2 = 54, \\ p_{22}^1 &= p_{23}^1 = p_{22}^4 = p_{23}^4 = p_{33}^1 = p_{33}^4 = 60, \\ p_{22}^2 &= p_{23}^3 = 67, \\ p_{23}^5 &= 140. \end{aligned}$$

◁ Прямые вычисления. ▷

Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $\{ijl\} = \left\{ \begin{smallmatrix} uvw \\ ijl \end{smallmatrix} \right\}$, $[ijl] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijl \end{smallmatrix} \right]$. Положим $\Sigma = \Gamma_2(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ — регулярный граф степени $p_{22}^2 = 67$ на $k_2 = 140$ вершинах.

Лемма 2.2. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 1$. Тогда тройные числа пересечений равны:*

$$\begin{aligned} [112] &= [121] = 3, [122] = 3, [123] = [132] = 3, [133] = 6; \\ [212] &= [221] = 8, [222] = 32, [223] = [232] = 27, [233] = 18, [234] = [243] = 9; \\ [312] &= [321] = 9, [322] = 18, [323] = [332] = 27, [333] = 32, [334] = [343] = 8, \\ [345] &= [354] = 1; \\ [422] &= 6, [423] = [432] = 3, [433] = 3, [434] = [443] = 3; \\ [513] &= 1. \end{aligned}$$

◁ Упрощение формул из предыдущего раздела. ▷

Лемма 2.3. *Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2, d(v, w) = 3$. Тогда тройные числа пересечений равны:*

$$\begin{aligned} [112] &= -r_2 + 6, [113] = [121] = r_2 - 3, [122] = 3, [123] = -r_2 + 9, [131] = -r_2 + 6, \\ [132] &= r_2, [133] = 3; \\ [212] &= r_2, [213] = 3, [214] = -r_2 + 6, [221] = -r_2 + 9, [222] = [223] = 29, [224] = r_2, \\ [231] &= 3, [232] = 29, [233] = 18, [234] = [243] = 3, [241] = r_2 - 3, [242] = -r_2 + 9; \\ [312] &= [321] = 3, [313] = -r_2 + 9, [314] = r_2 - 3, [322] = 18, [323] = 29, [324] = 3, \\ [325] &= 1, [331] = r_2, [332] = [333] = 29, [334] = -r_2 + 9, [341] = -r_2 + 6, [342] = 3, \\ [343] &= r_2, [352] = 1; \\ [422] &= 3, [423] = r_2, [424] = -r_2 + 6, [432] = -r_2 + 9, [433] = 3, [434] = [442] = r_2 - 3, \\ [443] &= -r_2 + 6; \\ [513] &= 1, \\ \text{где } 3 &\leq r_2 \leq 6. \end{aligned}$$

◁ Упрощение формул из предыдущего раздела. ▷

Лемма 2.4. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 2$, $d(v, w) = 4$. Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [113] &= 3, [122] = 6, [123] = [131] = [132] = [133] = 3; \\ [213] &= 9, [222] = 32, [223] = [232] = 27, [224] = 8, [231] = 9, [233] = 18, [242] = 8; \\ [313] &= [331] = 8, [315] = 1, [322] = 18, [323] = [332] = 27, [324] = 9, [333] = 32, \\ [342] &= 9, [351] = 1; \\ [422] &= 3, [423] = [424] = [432] = 3, [433] = 6, [442] = 6; \\ [533] &= 1. \end{aligned}$$

◁ Упрощение формул из предыдущего раздела. ▷

Для числа ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda - (\{v\} \cup \Lambda(v))$ в графе Λ верны равенства $d = 9 \cdot 32 + 54 \cdot 29 + 9 \cdot 32 = 2142$.

С другой стороны, $d = 67(66 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $66 - \lambda = 31.97$ и $\lambda = 34.03$.

Лемма 2.5. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 2$. Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [111] &= (-2r_1 + 51)/5, [112] = [113] = [121] = (r_1 - 18)/5, [122] = (4r_1 - 72)/5, [123] = \\ [132] &= -r_1 + 27, [131] = (r_1 - 18)/5, [133] = (4r_1 - 72)/5; \\ [211] &= (r_1 - 18)/5, [212] = [221] = (4r_1 - 72)/5, [213] = [231] = -r_1 + 27, [222] = \\ (-13r_1 + 474)/5, [223] &= [233] = r_1, [224] = [242] = (4r_1 - 72)/5, [234] = [243] = -r_1 + 27, \\ [244] &= (r_1 - 18)/5; \\ [311] &= (r_1 - 18)/5, [312] = [321] = -r_1 + 27, [313] = [331] = (4r_1 - 72)/5, [322] = [323] = \\ [332] &= r_1, [333] = (-13r_1 + 474)/5, [334] = [343] = (4r_1 - 72)/5, [324] = [342] = -r_1 + 27, \\ [344] &= (r_1 - 18)/5, [335] = [353] = 1; \\ [422] &= (4r_1 - 72)/5, [423] = [432] = -r_1 + 27, [424] = [442] = (r_1 - 18)/5, [433] = \\ (4r_1 - 72)/5, [434] &= [443] = (r_1 - 18)/5, [444] = (-2r_1 + 51)/5; \\ [533] &= 1, \end{aligned}$$

где $r_1 \in \{18, 23\}$.

◁ Упрощение формул из предыдущего раздела. ▷

По лемме 2.5 имеем $[222] = (-13r_1 + 474)/5 \in \{39, 52\}$. Противоречие с тем, что $\lambda = 34.03$.

Теорема 1 доказана.

Литература

1. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1989.—495 p.
2. Dalfó C., Fiol M., Koolen J. The spectral excess theorem for graphs with few eigenvalues whose distance-2 or distance-1-or-2 graph is strongly regular // Linear and Multilinear Algebra.—2018.—Vol. 67, № 12.—P. 2373–2381. DOI: 10.1080/03081087.2018.1491944.
3. Махнев А. А., Падучих Д. В. Обратные задачи в классе дистанционно регулярных графов диаметра 4 // Тр. Института математики и механики УрО РАН.—2022.—Т. 28, № 1.—С. 199–208. DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-199-208.
4. Makhnev A., Paduchikh D. Small AT4-graphs and strongly regular subgraphs corresponding to them // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.—2017.—Vol. 296, № 1.—P. 164–174. DOI: 10.1134/S0081543817020158.
5. Soicher L. The uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results // Designs, Codes and Cryptography.—2017.—Vol. 84, № 1–2.—P. 101–108. DOI: 10.1007/s10623-016-0223-6.

6. Coolsaet K., Jurišić A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Series A.—2008.—Vol. 115, № 6.—P. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.

Статья поступила 24 февраля 2025 г.

БЕЛОУСОВА ВЕРОНИКА ИГОРЕВНА
Уральский федеральный университет,
доцент учебно-научного центра «Информационные технологии»
РОССИЯ, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: vkazarina@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-9440-350X>

Ли Хайян
Хайнаньский университет,
доцент, преподаватель Школы математики и статистики
КИТАЙ, 57228, провинция Хайнань, Хайкоу, пр. Жэньминь Дадао, 58
E-mail: lhy9694@163.com

МАХНЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСЕЕВИЧ
Институт математики и механики УрО РАН,
главный научный сотрудник отдела алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2868-6713>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 3, P. 44–50

PRIMITIVE STRONGLY REGULAR TRIANGLE-FREE GRAPHS WITH $\mu = 3$ DO NOT EXIST

Belousova, V. I.¹, Lee, H.² and Makhnev, A. A.^{2,3}

¹ Ural Federal University,
19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russia;

² Hainan Provincial University,
58 Renmin Dadao Ave., Hainan Province, Haikou 570228, China;

³ N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia

E-mail: vkazarina@mail.ru, lhy9694@163.com, makhnev@imm.uran.ru

Abstract. If Γ is an antipodal distance-regular graph of diameter 4 with strongly regular graph $\Gamma_{1,2}$, then $\Gamma_{3,4}$ is a strongly regular graph without triangles. For a graph Γ with intersection array $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$, the graph $\Gamma_{3,4}$ has parameters $(162, 21, 0, 3)$. Graphs of small degrees have intersection arrays $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$, $\{25, 24, 2, 1; 1, 2, 24, 25\}$ and $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$, $\{36, 25, 2, 1; 1, 2, 25, 36\}$. A graph with array $\{32, 27, 6, 1; 1, 6, 27, 32\}$ does not exist. Any strongly regular triangle-free graph Γ with $\mu = 3$ has parameters $(162, 21, 0, 3)$. A strongly regular graph with parameters $(162, 21, 0, 3)$ is defined if and only if its bipartite doubling (a distance-regular graph with intersection array $\{21, 20, 9, 3, 1; 1, 3, 9, 20, 21\}$) is defined. It is proved in the paper that a strongly regular graph with parameters $(162, 21, 0, 3)$ does not exist. As a consequence, a distance-regular graph with intersection array $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ and a bipartite distance-regular graph with intersection array $\{36, 35, 47, 6; 1, 9, 30, 36\}$ do not exist.

Keywords: distance-regular graph, strongly regular graph, antipodal graph.

AMS Subject Classification: 05E30, 05C50.

For citation: Belousova, V. I., Lee, H. and Makhnev, A. A. Primitive Strongly Regular Triangle-Free Graphs with $\mu = 3$ do not Exist, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 3, pp. 44–50 (in Russian). DOI: 10.46698/b1924-8658-8779-p.

References

1. Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. *Distance-Regular Graphs*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989, 495 p.
2. Dalfó, C., Fiol, M. and Koolen, J. The Spectral Excess Theorem for Graphs with Few Eigenvalues Whose Distance-2 or Distance-1-or-2 Graph is Strongly Regular, *Linear and Multilinear Algebra*, 2018, vol. 67, no. 12, pp. 2373–2381. DOI: 10.1080/03081087.2018.1491944.
3. Makhnev, A. and Paduchikh, D. Inverse Problems in Distance-Regular Graphs of Diameter 4, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2022, vol. 28, no. 1, pp. 199–208 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-1-199-208.
4. Makhnev, A. and Paduchikh, D. Small AT4-Graphs and Strongly Regular Subgraphs Corresponding to Them, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 296, no. 1, pp. 164–174. DOI: 10.1134/S0081543817020158.
5. Soicher, L. The Uniqueness of a Distance-Regular Graph with Intersection Array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and Related Results, *Designs, Codes and Cryptography*, 2017, vol. 84, no. 1–2, pp. 101–108. DOI: 10.1007/s10623-016-0223-6.
6. Coolsaet, K. and Jurišić, A. Using Equality in the Krein Conditions to Prove Nonexistence of Certain Distance-Regular Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 2008, vol. 115, no. 6, pp. 1086–1095. DOI: 10.1016/j.jcta.2007.12.001.

Received February 25, 2025

VERONIKA I. BELOUSOVA
Ural Federal University,
19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russia,
Associate Professor, Research and Educational Center
“Information Technologies”
E-mail: vkazarina@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0002-9440-350X>

HAIYAN LEE
Hainan Provincial University,
58 Renmin Dadao Ave., Hainan Province, Haikou 570228, China,
Assistant Professor, School of Mathematics and Statistics
E-mail: lhy9694@163.com

ALEXANDER A. MAKHNEV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Principal Researcher, Department of Algebra and Topology
E-mail: makhnev@imm.uran.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2868-6713>