

УДК 517.977.52

DOI 10.46698/z9615-4666-9912-1

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО ИНФОРМАЦИИ, ИЗВЕСТНОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ

С. В. Бурикова¹

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119234, Москва, Ленинские горы, 1
E-mail: svetlanaburikova1997@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле для единичного шара в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле. Требуется наилучшим образом восстановить это решение на сфере радиуса $\rho < 1$ с центром в нуле по следующей информации: известно, что граничная функция f , заданная на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, принадлежит некоторому классу, содержащемуся в пространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, и о каждой функции из этого класса известен со случайной ошибкой конечный набор ее первых коэффициентов Фурье. Указанный класс представляет собой множество тех $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, у которых норма в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ заданной дробной степени сферического оператора Лапласа–Бельтрами этой функции не превосходит единицы. В работе построены явные выражения для оптимальных методов восстановления, зависящих от величины дисперсии случайной погрешности, и найдены точные значения соответствующих погрешностей. Эти методы линейны и используют, вообще говоря, не всю доступную для измерения информацию. Явные выражения для оптимальных методов позволяют строить эффективные численные алгоритмы решения подобных задач, где исходная информация задана неточно. Решенная задача принадлежит тому направлению в теории приближений, которое сформировалось в семидесятые годы прошлого века и которое называют теорией оптимального восстановления линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Данная теория активно развивалась и обобщалась в различных направлениях. При этом основное внимание было уделено задачам с детерминированной погрешностью. Настоящая работа является одной из первых, где дается точное решение задачи оптимального восстановления, когда информация известна со случайной ошибкой.

Ключевые слова: задача Дирихле, оптимальное восстановление, коэффициенты Фурье, экстремальная задача.

AMS Subject Classification: 41A65.

Образец цитирования: Бурикова С. В. О восстановлении решения задачи Дирихле по информации, известной со случайной ошибкой // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 3.—С. 51–59. DOI: 10.46698/z9615-4666-9912-1.

1. Введение

Началом развития теории оптимального восстановления линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно, послужила работа С. А. Смоляка [1], где была поставлена и решена задача о наилучшем восстановлении линейного функционала на выпуклом центрально-симметричном подмножестве конечномерного линейного пространства по точной информации о значениях конечного числа других линейных функционалов. Впоследствии эта тематика получила развитие

на задачи оптимального восстановления линейных операторов, на задачи, где информация задана с детерминированной ошибкой. Было получено много теоретических результатов и решено большое число конкретных задач (см. обзоры [2, 3] и статьи [4–6]). Определенный итог всей этой деятельности подведен в монографии [7]. Точные результаты, связанные с задачами оптимального восстановления, когда информация задана со случайной ошибкой, появились совсем недавно. Первый из них приведен в работе [8]. Отметим работу [9], вышедшую в этом году. В настоящей работе также получен точный результат, а именно приведены явные выражения для оптимальных методов восстановления решения задачи Дирихле для шара на сфере радиуса меньшего единицы и найдены точные значения погрешностей оптимального восстановления. Отметим еще статьи [10–12], где приводятся решения задачи Дирихле, когда информация задана с детерминированной ошибкой.

2. Постановка задачи

Перед непосредственной постановкой задачи оптимального восстановления понадобится ряд известных понятий и определений (подробнее см. [13]).

Пусть $d \geq 2$ — целое и $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Однородным многочленом степени k в $\mathbb{R}^d$ называется многочлен вида

$$P(x) = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ и $c_\alpha \in \mathbb{R}$.

Линейное пространство всех таких многочленов обозначим через $\mathcal{P}_k$. Однородным гармоническим многочленом степени k называется многочлен $P \in \mathcal{P}_k$ такой, что $\Delta P = 0$, где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$. Линейное пространство однородных гармонических многочленов степени k обозначим через $\mathcal{A}_k$.

Функции, которые являются сужениями многочленов из $\mathcal{A}_k$ на единичную сферу

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\},$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^d$, называются сферическими гармониками порядка k . Множество таких функций обозначается $\mathcal{H}_k$.

Пусть Y — сужение многочлена $P \in \mathcal{A}_k$ на $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу однородности,

$$P(x) = |x|^k Y\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

для всех $x \neq 0$ и тем самым данное соответствие является изоморфизмом $\mathcal{A}_k$ на $\mathcal{H}_k$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}_k$ как подпространство $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x')g(x') dx'.$$

Пусть $a_k = \dim \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ ($a_0 = 1, a_1 = d$) и пусть $Y_1^{(k)}, \dots, Y_{a_k}^{(k)}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_k$. Тогда функции $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и для любой функции $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ справедливо единственное разложение (в метрике $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$):

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}, \quad c_{kj} = \left(f, Y_j^{(k)}\right)_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}, \quad (1)$$

где c_{kj} — коэффициенты Фурье f в этом базисе.

Сферическим лапласианом или оператором Лапласа–Бельтрами называется оператор $(-\Delta_S)$, сопоставляющий функции f на $\mathbb{S}^{d-1}$ функцию, определенную формулой

$$(-\Delta_S)f(x') = \Delta f\left(\frac{x}{|x|}\right)\Big|_{x=x'}.$$

Если $f = Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$, то

$$(-\Delta_S)Y^{(k)} = \Lambda_k Y^{(k)},$$

где $\Lambda_k = k(k + d - 2)$.

Это позволяет естественным образом обобщить понятие сферического Лапласиана. Пусть $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и $\beta > 0$. Определим оператор $(-\Delta_S)^\beta$, учитывая (1) и последнюю формулу, по правилу

$$(-\Delta_S)^\beta f = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}. \quad (2)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу оптимального восстановления, которая будет рассматриваться в данной работе.

Пусть фиксированы функция $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и ортонормированный базис $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, a_k$, в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Задача Дирихле для шара

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 \leq 1 \right\}$$

заключается в нахождении такой функции u , которая является гармонической на $\text{int } \mathbb{B}^d$ (внутренность шара $\mathbb{B}^d$) и

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |u(rx') - f(x')|^2 dx' = 0.$$

Единственным решением данной задачи является функция

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad x \in \text{int } \mathbb{B}^d, \quad (3)$$

доопределенная в нуле по непрерывности.

Пусть $\beta > 0$. Рассмотрим следующее пространство функций:

$$\mathcal{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : (-\Delta_S)^\beta f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \right\}$$

и положим

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \left\{ f \in \mathcal{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^\beta f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1 \right\}.$$

Для каждого натурального N определим линейный оператор

$$I_N : \mathcal{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

сопоставляющий $f \in \mathcal{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ ее первые N коэффициентов Фурье, упорядоченные следующим образом:

$$c_{01}, \dots, c_{0k_0}, c_{11}, \dots, c_{1k_1}, \dots$$

Мы ставим задачу о наилучшем (оптимальном) восстановлении решения задачи Дирихле на сфере радиуса $\rho < 1$ с центром в нуле (которую обозначаем $\rho\mathbb{S}^{d-1}$), по следующей информации: функция f принадлежит классу $W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ и приближенно известны (со случайной ошибкой) ее первые N коэффициентов Фурье.

Точная постановка такова. Пусть $\delta > 0$. Для каждого $f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})$ определим множество $\mathcal{B}_{N,\delta}(f)$ случайных векторов $y \in \mathbb{R}^N$ следующего вида:

$$\mathcal{B}_{N,\delta}(f) = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : \mathbb{E}y = I_N f, \max_{1 \leq i \leq N} \mathbb{V}y_i \leq \delta^2 \right\},$$

где $\mathbb{E}$ и $\mathbb{V}$ обозначают соответственно математическое ожидание и дисперсию.

Каждое отображение $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\rho\mathbb{S}^{d-1})$ называем методом восстановления и его погрешность определяем по формуле

$$e(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \rho, \delta, \varphi) = \sqrt{\sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), y \in \mathcal{B}_{N,\delta}(f)} \mathbb{E} \|u - \varphi(y)\|_{L_2(\rho\mathbb{S}^{d-1})}^2}.$$

Нас интересуют величина

$$E(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \rho, \delta) = \inf_{\varphi} e(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \rho, \delta, \varphi),$$

где нижняя грань берется по всем методам (отображениям) $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(\rho\mathbb{S}^{d-1})$, которую называем *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы, на которых эта нижняя грань достигается, т. е. такие методы $\hat{\varphi}$, что

$$e(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \rho, \delta, \hat{\varphi}) = E(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \rho, \delta).$$

Эти методы называем *оптимальными методами восстановления*.

3. Формулировка основного результата и его доказательство

Чтобы упростить формулировку основного результата, введем некоторые обозначения. Положим

$$\begin{aligned} \nu_1 = \dots = \nu_{a_0} &= \Lambda_0^{2\beta}, \quad \nu_{a_0+1} = \dots = \nu_{a_0+a_1} = \Lambda_1^{2\beta}, \\ \nu_{a_0+a_1+\dots+a_s+1} &= \dots = \nu_{a_0+a_1+\dots+a_{s+1}} = \Lambda_{s+1}^{2\beta}, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = \dots = \mu_{a_0} &= 1, \quad \mu_{a_0+1} = \dots = \mu_{a_0+a_1} = \rho, \\ \mu_{a_0+a_1+\dots+a_s+1} &= \dots = \mu_{a_0+a_1+\dots+a_{s+1}} = \rho^{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \dots = \gamma_{a_0} &= \Lambda_0^\beta, \quad \gamma_{a_0+1} = \dots = \gamma_{a_0+a_1} = \frac{\Lambda_1^\beta}{\rho}, \\ \gamma_{a_0+a_1+\dots+a_s+1} &= \dots = \gamma_{a_0+a_1+\dots+a_{s+1}} = \frac{\Lambda_{s+1}^\beta}{\rho^{s+1}}, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Введем еще две величины

$$\varepsilon_j = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^j \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{-\frac{1}{2}}, & \text{если } 1 < j \leq N+1, \\ +\infty, & \text{если } j = 1 \end{cases}$$

и

$$\widehat{c}_1 = 1 - \frac{\delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k \frac{\gamma_1}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^m \nu_k}.$$

Через e_k , $k = 1, 2, \dots$, обозначим стандартный базис в l_2 .

Следующая теорема является основным утверждением данной работы.

Теорема 1. Пусть $\delta > 0$. Если $\varepsilon_{m+1} \leq \delta < \varepsilon_m$ при некотором $1 \leq m \leq N$, то

$$E(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \rho, \delta) = \sqrt{\frac{(1 - \widehat{c}_1)^2}{\gamma_1^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^m \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1} \right)^2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, \dots, y_N) = \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{\gamma_k(1 - \widehat{c}_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным.

Если $\delta < \varepsilon_{N+1}$, то

$$E(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \rho, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\gamma_{N+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^N \mu_k^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{N+1}} \right)^2}$$

и метод

$$\widehat{\varphi}(y_1, \dots, y_N) = \sum_{k=1}^N \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{N+1}} \right) \mu_k y_k e_k$$

является оптимальным.

◁ Запишем исходную задачу восстановления в других терминах. Функции $Y_j^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, где $a_k = \dim \mathcal{H}_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, образуют, как было сказано выше, ортонормированный базис в пространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и для любой функции $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ справедливо ее разложение (1) по данному базису. Отображение A , сопоставляющее $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ее коэффициенты Фурье в этом базисе по правилу

$$A(f) = (c_{01}, \dots, c_{0a_0}, c_{11}, \dots, c_{1a_1}, \dots),$$

является изометрическим изоморфизмом пространств $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ и l_2 :

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2}.$$

В силу этого обстоятельства, можно записать постановку исходной задачи в терминах последовательностей $x \in l_2$ вида

$$x = (x_{01}, \dots, x_{0a_0}, x_{11}, \dots, x_{1a_1}, \dots). \quad (7)$$

Ясно, что (см. (2))

$$A(\mathscr{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})) = \left\{ x \in l_2 : \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{2\beta} \sum_{j=1}^{a_k} |x_{kj}|^2 < \infty \right\}$$

и

$$A(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})) = \left\{ x \in A(\mathscr{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})) : \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{2\beta} \sum_{j=1}^{a_k} |x_{kj}|^2 \leq 1 \right\}.$$

Запишем последовательность (7) в стандартном виде: $x = (x_1, x_2, \dots)$, обозначая

$$x_{01} = x_1, \dots, x_{0a_0} = x_{a_0}, \quad x_{11} = x_{a_0+1}, \dots, x_{1a_1} = x_{a_0+a_1}, \dots$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{2\beta} \sum_{j=1}^{a_k} |x_{kj}|^2 = \Lambda_0^{2\beta} (|x_1|^2 + \dots + |x_{a_0}|^2) + \Lambda_1^{2\beta} (|x_{a_0+1}|^2 + \dots + |x_{a_0+a_1}|^2) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2,$$

где ν_k определены формулами (9). Тогда пространство $A(\mathscr{W}_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}))$ и класс $A(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}))$, которые обозначим соответственно через $\mathscr{W}$ и W , перепишутся так:

$$\mathscr{W} = \left\{ x \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 < \infty \right\}, \quad W = \left\{ x \in \mathscr{W} : \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k |x_k|^2 \leq 1 \right\}.$$

Сужение решения задачи Дирихле u на сферу в $\mathbb{R}^d$ радиуса $\rho < 1$, согласно (3), имеет вид

$$u(x)|_{\rho\mathbb{S}^{d-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (8)$$

и тем самым

$$A(u) = (c_{01}, \dots, c_{0a_0}, \rho c_{11}, \dots, \rho c_{1a_1}, \dots).$$

Рассмотрим оператор $T: \mathscr{W} \rightarrow l_2$, действующий следующим образом:

$$Tx = (\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n, \dots),$$

где μ_k определены формулой (10), и пусть оператор $I_N: \mathscr{W} \rightarrow \mathbb{R}^N$ действует по правилу

$$I_N x = (x_1, \dots, x_N).$$

В введенных терминах исходная задача заключается в оптимальном восстановлении значений оператора T на классе W по информации об элементах W , известных со случайной ошибкой. Точная постановка такова. Пусть $\delta > 0$. Для каждого $x \in W$ определим, аналогично предыдущему, множество $\mathscr{B}_{N,\delta}(x)$ случайных векторов $y \in \mathbb{R}^N$ следующего вида:

$$\mathscr{B}_{N,\delta}(x) = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N : \mathbb{E}y = I_N x, \max_{1 \leq i \leq N} \mathbb{V}y_i \leq \delta^2 \right\},$$

где, напомним, $\mathbb{E}$ и $\mathbb{V}$ обозначают соответственно математическое ожидание и дисперсию.

Каждое отображение $\varphi: \mathbb{R}^N \rightarrow l_2$, как и раньше, называем методом восстановления и его погрешность определяем по формуле

$$e(W, T, \delta, \varphi) = \sqrt{\sup_{x \in W, y \in \mathcal{B}_{N, \delta}(x)} \mathbb{E} \|Tx - \varphi(y)\|_{l_2}^2}.$$

Нас интересуют погрешность оптимального восстановления

$$E(W, T, \delta) = \inf_{\varphi} e(W, T, \delta, \varphi)$$

и оптимальные методы, т. е. методы, на которых нижняя грань достигается.

Так как, очевидно, $\nu_k > 0$, $\mu_k^2 \leq \nu_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и γ_k возрастает на $\mathbb{N}$, то выполнены предположения теоремы 1 из работы [8], согласно которой справедлива теорема 1 данной работы. $\triangleright$

Отметим, что возможна постановка обратной задачи к исходной, а именно, требуется оптимальным образом восстановить граничную функцию по приближенно известным (со случайной ошибкой) первым N коэффициентам Фурье решения задачи Дирихле на сфере радиуса $\rho < 1$. Доказательство аналогично приведенному выше и поэтому мы ограничимся только ответом, который дается теоремой 1, где

$$\begin{aligned} \nu_1 = \dots = \nu_{a_0} = \Lambda_0^{2\beta}, \quad \nu_{a_0+1} = \dots = \nu_{a_0+a_1} = \frac{\Lambda_1^{2\beta}}{\rho^2}, \\ \nu_{a_0+a_1+\dots+a_s+1} = \dots = \nu_{a_0+a_1+\dots+a_{s+1}} = \frac{\Lambda_{s+1}^{2\beta}}{\rho^{2(s+1)}}, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 = \dots = \mu_{a_0} = 1, \quad \mu_{a_0+1} = \dots = \mu_{a_0+a_1} = \frac{1}{\rho}, \\ \mu_{a_0+a_1+\dots+a_s+1} = \dots = \mu_{a_0+a_1+\dots+a_{s+1}} = \frac{1}{\rho^{s+1}}, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \dots = \gamma_{a_0} = \Lambda_0^\beta, \quad \gamma_{a_0+1} = \dots = \gamma_{a_0+a_1} = \Lambda_1^\beta, \\ \gamma_{a_0+a_1+\dots+a_s+1} = \dots = \gamma_{a_0+a_1+\dots+a_{s+1}} = \Lambda_{s+1}^\beta, \quad s = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Канд. дисс.—М.: МГУ, 1965.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54. DOI: 10.1007/978-1-4684-2388-4.
3. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery // Numerical Analysis Lancaster.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—P. 21–93.—(Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1129.)
4. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил.—2003.—Т. 37, № 3.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил.—2010.—Т. 44, № 3.—С. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999.

6. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб.—2009, Т. 200, № 5.—С. 37–54. DOI: 10.4213/sm7301.
7. Осипенко К. Ю. Введение в теорию оптимального восстановления.—Санкт-Петербург: Лань, 2022.—388 с.
8. Кривошеев К. Ю. Об оптимальном восстановлении значений линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой // Матем. сб.—2021.—Т. 212, № 11.—С. 89–108. DOI: 10.4213/sm9484.
9. Максимова И. С., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения системы линейных дифференциальных уравнений по исходной информации со случайной ошибкой // Матем. сб.—2025.—Т. 216, № 4.—С. 67–89. DOI: 10.4213/sm10109.
10. Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавк. матем. журн.—2004.—Т. 6, вып. 4.—С. 55–62.
11. Абрамова Е. В. Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле по неточно заданному спектру граничной функции // Владикавк. матем. журн.—2017.—Т. 19, вып. 4.—С. 3–12.
12. Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журнал вычисл. матем. и матем. физ.—2020.—Т. 60, № 10.—С. 1711–1720. DOI: 10.31857/S0044466920100038.
13. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / Перевод с англ.—М.: Мир, 1974.—333 с.

Статья поступила 12 ноября 2025 г.

БУРИКОВА СВЕТЛАНА ВЛАДИМИРОВНА
 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
 аспирант кафедры общих проблем управления
 Россия, 119234, Москва, Ленинские горы, 1
 E-mail: svetlanaburikova1997@gmail.com

*Vladikavkaz Mathematical Journal
 2026, Volume 28, Issue 3, P. 51–59*

ON RECONSTRY THE SOLUTION TO THE DIRICHLET PROBLEM USING INFORMATION KNOWN WITH A RANDOM ERROR

Burikova, S. V.¹

¹ Lomonosov Moscow State University,
 1 Leninskie Gory, Moscow 119234, Russia
 E-mail: svetlanaburikova1997@gmail.com

Abstract. This paper considers the problem of optimal recovery of a solution to the Dirichlet problem for the unit ball in $\mathbb{R}^d$ centered at zero. The solution is to be recovered on a sphere of radius $\rho < 1$ centered at zero, given the following information: it is known that the boundary function f , defined on the unit sphere $\mathbb{S}^{d-1}$, belongs to a certain class of functions contained in the space $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, and for each element of this class, a finite set of its first Fourier coefficients is known with random error. The class of functions is the set of those functions $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ for which the norm in $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ of a given fractional power of the spherical Laplace-Beltrami operator of this function does not exceed unity. In this paper, explicit expressions are constructed for optimal recovery methods that depend on the variance of the random error, and exact values of the corresponding optimal recovery errors are found. These methods are linear and, generally speaking, do not use all the information available for measurement. Explicit expressions for optimal methods allow their use in constructing efficient numerical algorithms for solving similar problems, where the initial information is specified inaccurately. The problem solved here belongs to a branch of approximation theory that emerged in the 1970s and is called the theory of optimal recovery of linear functionals and operators on classes of sets whose elements are known approximately. This theory has been actively developed and generalized in various directions. Many specific problems have been solved, but the primary focus has been on problems with

deterministic error. The present is one of the first to provide an exact solution to the optimal recovery problem when information is known with random error.

Keywords: Dirichlet problem, optimal recovery, Fourier coefficients, extreme problem.

AMS Subject Classification: 41A65.

For citation: Burikova, S. V. On Reconstry the Solution to the Dirichlet Problem Using Information Known with a Random Error, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 3, pp. 51–59. (in Russian). DOI: 10.46698/z9615-4666-9912-1.

References

1. Smolyak, S. A. *Ob optimal'nom vosstanovlenii funkciy i funkcionalov ot nih: Kand. diss.* [On the Optimal Restoration of Functions and Their Functionalities: Candidate's Dissertation], Moscow, Moscow State University, 1965 (in Russian).
2. Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J. *A Survey of Optimal Recovery*, Optimal Estimation in Approximation Theory, New York, Plenum Press, 1977, pp. 1–54. DOI: 10.1007/978-1-4684-2388-4.
3. Micchelli, C. A. and Rivlin, T. J. *Lectures on Optimal Recovery, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1129*, Numerical Analysis Lancaster, Berlin, Springer-Verlag, 1985, pp. 21–93.
4. Magaril-Il'yev, G. G. and Osipenko, K. Yu. Optimal Recovery of Functions and Their Derivatives from Inaccurate Information about the Spectrum and Inequalities for Derivatives, *Functional Analysis and Its Applications*, 2003, vol. 37, no. 3, pp. 203–214. DOI: 10.1023/A:1026084617039.
5. Magaril-Il'yev, G. G. and Osipenko, K. Yu. On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Spectral Data, *Functional Analysis and Its Applications*, 2010, vol. 44, no. 3, pp. 223–225. DOI: 10.1007/s10688-010-0029-7.
6. Magaril-Il'yev, G. G. and Osipenko, K. Yu. Optimal Recovery of the Solution of the Heat Equation from Inaccurate Data, *Sbornik: Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 5, pp. 665–682. DOI: 10.1070/SM2009v200n05ABEH004014.
7. Osipenko, K. Yu. *Vvedenie v teoriyu optimal'nogo vosstanovleniya* [Introduction to Optimal Recovery Theory], Sankt-Peterburg, Lan', 2022, 388 p. (in Russian).
8. Krivosheev, K. Yu. On Optimal Recovery of Values of Linear Operators from Information Known with a Stochastic Error, *Sbornik: Mathematics*, 2021, vol. 212, no. 11, pp. 1588–1607. DOI: 10.1070/SM9484.
9. Maksimova, I. S. and Osipenko, K. Yu. Optimal Recovery of a Solution of a System of Linear Differential Equations from Initial Information Given with a Random Error, *Sbornik: Mathematics*, 2025, vol. 216, no. 4, pp. 515–537. DOI: 10.4213/sm10109e.
10. Osipenko, K. Yu. On the Reconstruction of the Solution of the Dirichlet Problem from Inexact Initial Data, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2004, vol. 6, no. 4, pp. 55–62 (in Russian).
11. Abramova, E. V. The Best Recovery of the Solution of the Dirichlet Problem from Inaccurate Spectrum of the Boundary Function, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 3–12 (in Russian).
12. Abramova, E. V., Magaril-Il'yev, G. G. and Sivkova, E. O. Best recovery of the solution of the Dirichlet problem in a half-space from inaccurate data, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1656–1665. DOI: 10.1134/S0965542520100036.
13. Stein, E. M. and Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, Princeton University Press, 1971.

Received November 12, 2025

SVETLANA V. BURIKOVA
Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119234, Russia,
Graduate Student
E-mail: svetlanaburikova1997@gmail.com