

УДК 512.542

DOI 10.46698/e0260-9676-5868-v

О СУЩЕСТВОВАНИИ СПОРАДИЧЕСКОГО КОМПОЗИЦИОННОГО
ФАКТОРА, ИЗОМОРФНОГО J_2 , McL ИЛИ HS , В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ
С УСЛОВИЕМ НА ГРАФ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

М. Р. Зиновьева^{1,2}

¹ Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

² Уральский федеральный университет,
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

70-летию В. А. Койбаева посвящается

Аннотация. Графом простых чисел (графом Грюнберга — Кегеля) конечной группы G называется граф $GK(G)$, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G , и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq . Известны графы Грюнберга — Кегеля конечных простых неабелевых групп. Одним из популярных направлений исследований в теории конечных групп является изучение групп по свойствам их графов Грюнберга — Кегеля. Мы исследуем композиционные факторы конечных групп с графом простых чисел как у известной простой группы. А. М. Старолетов в 2011 г. изучил конечные группы со спектром (множеством порядков элементов) как у конечной простой группы, имеющие спорадический композиционный фактор. Обобщая этот результат, мы рассматриваем вопрос о том, может ли композиционный фактор конечной группы с графом простых чисел как у конечной простой группы быть изоморфным спорадической группе. Более точно, в статье мы исследуем, может ли он являться одной из спорадических групп J_2 , McL или HS .

Ключевые слова: конечная группа, композиционный фактор, группа лиева типа, знакопеременная группа, спорадическая группа, граф простых чисел (граф Грюнберга — Кегеля).

AMS Subject Classification: 20D06, 20D08, 20D60, 05C25.

Образец цитирования: Зиновьева М. Р. О существовании спорадического композиционного фактора, изоморфного J_2 , McL или HS , в конечных группах с условием на граф простых чисел // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 3.—С. 74–90. DOI: 10.46698/e0260-9676-5868-v.

1. Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество всех порядков ее элементов (ее спектр). На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом простых чисел* или *графом Грюнберга — Кегеля* группы G и обозначается через $GK(G)$. Обозначим число компонент связности графа $GK(G)$ через $s = s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Кокликой графа называется его индуцированный подграф с попарно несмежными вершинами. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком*. *Максимальной кокликой* называется коклика, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(r, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число r .

В теории конечных групп популярным является направление исследования конечных групп по свойствам их графов простых чисел. Например, обзор результатов можно найти в [1].

А. М. Старолетов в [2] изучил конечные простые группы со спектром как у конечной простой неабелевой группы, имеющие спорадический композиционный фактор.

Мы рассматриваем следующую более общую задачу: может ли конечная группа с графом простых чисел как у конечной простой неабелевой группы иметь композиционный фактор, изоморфный простой спорадической группе. В рамках этой задачи мы получили следующие результаты.

Согласно статье А. В. Васильева, Е. П. Вдовина [3], обозначим через s'_n наибольшее простое число, не превосходящее $n/2$.

Далее $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$.

В теореме 1 мы рассматриваем конечные группы с графом простых чисел как у конечной простой группы и со спорадическим композиционным фактором, изоморфным J_2 .

Теорема 1. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$, или знакопеременной группой A_n , где $n - s'_{2n} \leq 3$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе J_2 . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $H \in \{L_3(q), U_3(q)\}$ и q нечетно;
- 2) $H \in \{A_9, A_{10}, A_{16}\}$;
- 3) $H \in \{S_6(2), O_8^+(2)\}$ и $GK(H) = GK(J_2)$;
- 4) $H = U_4(5)$.

В теореме 2 мы уточняем результат, полученный автором в [4].

Теорема 2. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$, или знакопеременной группой A_n , где $n \geq 11$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе J_2 ; $\pi(G) = \pi(S) \cup \{r\}$, где r — простое число, $r > 7$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) граф $GK(G)$ несвязен и $H = U_3(19)$;
- (2) граф $GK(G)$ связан и $H = U_4(5)$.

В теореме 3 мы рассматриваем конечные группы с графом простых чисел как у конечной простой группы и со спорадическим композиционным фактором, изоморфным McL .

Теорема 3. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$, или знакопеременной группой A_n , где $n - s'_{2n} \leq 3$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе McL . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) граф $GK(G)$ связан и $H = A_{16}$;
- 2) граф $GK(G)$ несвязен и $H = L_6(3)$.

В теореме 4 мы рассматриваем конечные группы с графом простых чисел как у конечной простой группы и со спорадическим композиционным фактором, изоморфным HS .

Теорема 4. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$, или знакопеременной группой A_n , где $n - s'_{2n} \leq 3$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе HS . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $H \in \{L_3(q), U_3(q)\}$ и q нечетно;
- 2) граф $GK(G)$ связан и $H = A_{16}$;
- 3) граф $GK(G)$ несвязен и $H = L_6(3)$;
- 4) граф $GK(G)$ несвязен, $H = U_6(2)$ и $G = HS$.

В теореме 5 мы объединяем результаты теорем 1, 3 и 4 и описываем конечные группы с графом простых чисел как у конечной простой группы и со спорадическим композиционным фактором, изоморфным одной из групп J_2 , HS или McL .

Теорема 5. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является знакопеременной группой A_n , где $n - s'_{2n} \leq 3$, или конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный J_2 , HS или McL . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $H \in \{L_3(q), U_3(q)\}$, q нечетно и $S \in \{J_2, HS\}$;
- 2) $H \in \{A_9, A_{10}, A_{16}\}$ и $S = J_2$;
- 3) $H \in \{U_4(5), S_6(2), O_8^+(2)\}$ и $S = J_2$;
- 4) $H = A_{16}$ и $S \in \{McL, HS\}$;
- 5) $H = L_6(3)$ и $S \in \{McL, HS\}$;
- 6) $H = U_6(2)$, $G = HS$ и $S = HS$.

Уильямс [5] и А. С. Кондратьев [6] получили описания связных компонент графов Грюнберга — Кегеля конечных простых групп. Уточненные таблицы можно найти, например, в [7]. Мы используем стандартные обозначения, которые можно найти, например, в [8].

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [9, теорема Жигмонди]. Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Существует простое число r , делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$. Если такое r существует, то $r \equiv 1 \pmod{n}$.

Согласно [3], если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается наименьшее натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod{r}$. Если q нечетно, то $e(2, q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod{4}$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod{4}$. Говорят, что простое число r с $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ — множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует, за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n .

Лемма 2 [10, теорема 1]. Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условиям $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- (1) Существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \bar{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G .

(2) Для каждого независимого подмножества (кокклики) ρ множества $\pi(G)$ такого, что $|\rho| \geq 3$, не более чем одно простое число из ρ делит произведение $|K| \cdot |\bar{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.

(3) Выполняется одно из двух утверждений:

(а) каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\bar{G}/S|$; в частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$;

(б) существует простое число $r \in \pi(K)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2; в этом случае $t(G) = 3$, $t(2, G) = 2$, и $S \cong \text{Alt}_7$ или $A_1(q)$ для некоторого нечетного числа q .

Лемма 3 [5, теорема Грюнберга — Кегеля, Theorem A]. Для группы G с несвязным графом $GK(G)$ верно одно из следующих утверждений:

(а) G — группа Фробениуса;

(б) G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G , а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;

(в) G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$ -группы посредством группы A , где $\text{Inn}(P) \leq A \leq \text{Aut}(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leq s(P)$ и $A/\text{Inn}(P)$ — $\pi_1(G)$ -группа.

Лемма 4 [7, лемма 1]. Если $n \geq 6$ — натуральное число, то существует по меньшей мере $s(n)$ простых чисел p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$, где

$s(n) = 6$ для $n \geq 48$,

$s(n) = 5$ для $42 \leq n \leq 47$,

$s(n) = 4$ для $38 \leq n \leq 41$,

$s(n) = 3$ для $18 \leq n \leq 37$,

$s(n) = 2$ для $14 \leq n \leq 17$,

$s(n) = 1$ для $6 \leq n \leq 13$.

Лемма 5 [4, лемма 10]. Пусть $R_4(q) = \{5\}$, где $q = p^m$, p — простое число и $m \in \mathbb{N}$. Тогда $q \in \{2, 3, 7\}$.

Лемма 6 [4, теорема 4]. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является знакопеременной группой или конечной простой группой лиева типа, S — спорадический композиционный фактор группы G , $\pi(G) = \pi(S)$. Тогда $(H, S) \in \{(A_9, J_2), (A_{10}, J_2), (A_{16}, Fi_{22}), (A_{16}, Suz), (L_2(11), M_{11}), (U_5(2), M_{11}), (U_6(2), HS), (S_8(2), He), (O_8^+(2), J_2), (S_6(2), J_2)\}$.

Лемма 7 [4, теорема 5]. Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является знакопеременной группой или конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе J_2 ; $\pi(G) = \pi(S) \cup \{r\}$, где r — простое число, $r > 7$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:

(1) граф $GK(G)$ несвязен и $H \in \{L_2(2401), L_2(4801), U_3(19), U_6(2), S_8(2)\}$;

(2) граф $GK(G)$ связан и $H \in \{L_4(4), U_4(5)\}$.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$, или знакопеременной группой A_n , где $n - s'_{2n} \leq 3$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе J_2 .

По лемме 2 выполнено условие $S \leq \bar{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G .

Докажем сначала теорему 1.

Теорема 2 следует из теоремы 1 и леммы 7.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть H является знакопеременной группой. Так как $n - s'_{2n} \leq 3$, то $t(2, G) \geq 2$. Так как $2 \cdot 5 \in \omega(S) \subseteq \omega(H)$, то $n \geq 9$.

Если $H \in \{A_9, A_{10}\}$, то получаем заключение теоремы 1.

Пусть $H \in \{A_{11}, A_{12}\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 3 подгруппа K нильпотентна. Так как $3 \cdot 7 \in \omega(H) \setminus \omega(S)$, то $3 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. Так как $11 \in \pi(K)$, то $3 \cdot 11 \in \omega(K)$ или $7 \cdot 11 \in \omega(K)$; противоречие.

Пусть $H \in \{A_{13}, A_{14}, A_{15}, A_{17}\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 3 подгруппа K нильпотентна. Так как $5 \cdot 7 \in \omega(H) \setminus \omega(S)$, то $5 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. Так как $13 \in \pi(K)$, то $5 \cdot 13 \in \omega(K)$ или $7 \cdot 13 \in \omega(K)$; противоречие.

Если $H = A_{16}$, то получаем заключение теоремы 1.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 18$. По лемме 4 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 18$, то $(n+1)/2 > 7$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 7$. Отсюда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ — коклика в $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 2.

Значит, H — конечная простая группа лиева типа.

По [8] множество $\{2, 7\}$ — максимальная коклика в $GK(S)$, содержащая 2. По [3, табл. 2] имеем $t(S) = 2$, $t(2, S) = 2$. По лемме 2 имеем $t(H) \leq 3$, $t(2, H) \leq 2$.

По [3, табл. 4–7] и [11, табл. 2–4] группа H — одна из следующих групп: $L_3(q)$, где $(q-1)_3 = 3$, $q+1 = 2^k$, $L_3(q)$, где $(q-1)_3 \neq 3$, $q+1 \neq 2^k$ и q нечетно, $L_3(q)$, где $(q-1)_3 \neq 3$ и $q+1 = 2^k$, $L_4(q)$, где $(q-1)_2 \neq 4$ и q нечетно, $L_5(q)$, где q нечетно, $L_6(q)$, где q нечетно, $U_3(q)$, где $(q+1)_3 = 3$, $q-1 = 2^k$ и q нечетно, $U_3(q)$, где $(q+1)_3 \neq 3$, $q-1 \neq 2^k$ и q нечетно, $U_3(q)$, где $(q+1)_3 \neq 3$, $q-1 = 2^k$ и q нечетно, $U_4(q)$, где $(q+1)_2 \neq 4$ и q нечетно, $U_5(q)$, где q нечетно, $U_6(q)$, где q нечетно, $O_5(q)$, $S_4(q)$ для $q > 2$, $O_7(q)$, где q нечетно, $S_6(q)$, где q нечетно, $O_8^+(q)$, где q нечетно, ${}^3D_4(q)$, $L_6(2)$, $L_7(2)$, $U_4(2)$, $S_6(2)$, $S_8(2)$, $O_8^+(2)$, ${}^2F_4(2)'$.

Если H — одна из групп $U_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, то по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(G)$; противоречие.

Если $H = L_6(2)$, то по лемме 2 и [3, табл. 4] имеем $\{2, 31\} = \{2, 7\}$; противоречие.

Пусть $H = L_7(2)$, то по лемме 2 и [3, табл. 4] имеем $\{2, 127\} = \{2, 7\}$; противоречие.

Если $H \in \{S_6(2), O_8^+(2)\}$, то $GK(H) = GK(J_2)$, т. е. получаем заключение теоремы 1.

Если $H = S_8(2)$, то по лемме 2 и [3, табл. 4] имеем $\{2, 17\} = \{2, 7\}$; противоречие.

Если $H \in \{L_3(q), U_3(q)\}$, то получаем заключение теоремы 1.

1) Предположим, что $H = L_n(q)$, где $4 \leq n \leq 6$, q нечетно.

Пусть $H = L_4(q)$, где $(q-1)_2 \neq 4$.

При $4 < (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_4(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда по лемме 2 имеем $\{2, r_4(q)\} = \{2, 7\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие. При $4 > (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда по лемме 2 имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 7\}$. Итак, $R_3(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{p, r_3(q), r_4(q)\}$ — коклика в $GK(G)$.

Если $p \notin \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$; противоречие. Значит, $p \in \pi(S)$. Отсюда $p \in \{3, 5\}$.

Пусть $p = 3$. Если $f = 1$, то $R_3(3) = \{13\}$, но $R_3(q) = \{7\}$; противоречие. Если $f = 2$, то $R_3(9) = \{7, 13\}$, но $R_3(q) = \{7\}$; противоречие. Если $f \geq 3$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{3f}(3) \subseteq R_3(q)$; противоречие с тем, что $R_3(q) = \{7\}$.

Пусть $p = 5$. Если $f = 1$, то $R_3(5) = \{31\}$. Если $f = 2$, то $R_3(25) = \{7, 31\}$. Если $f \geq 3$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{3f}(5) \subseteq R_3(q)$; противоречие с тем, что $R_3(q) = \{7\}$.

Пусть $H = L_5(q)$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_5(q)\} = \{2, 7\}$, но по лемме 1 имеем $r_5(q) \equiv 1 \pmod{5}$; противоречие.

Пусть $H = L_6(q)$. При $2 = (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_5(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_5(q)\} = \{2, 7\}$, но по лемме 1 имеем $r_5(q) \equiv 1 \pmod{5}$; противоречие. При $2 < (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_6(q)\} = \{2, 7\}$. Итак, $R_6(q) = \{7\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_4(q), r_5(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$ и $R_5(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

2) Предположим, что $H = U_n(q)$, где $4 \leq n \leq 6$ и q нечетно.

Пусть $H = U_4(q)$, где $(q+1)_2 \neq 4$.

При $4 < (q+1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_4(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_4(q)\} = \{2, 7\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие. При $4 > (q+1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_6(q)\} = \{2, 7\}$. Итак, $R_6(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{p, r_6(q), r_4(q)\}$ — коклика в $GK(G)$.

Если $p \notin \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$; противоречие. Значит, $p \in \pi(S)$. Отсюда $p \in \{3, 5\}$.

Пусть $p = 3$. Если $f = 1$, то $R_6(3) = \{7\}$. При $q = 3$ имеем $(q+1)_2 = 4$; противоречие. Если $f \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{6f}(3) \subseteq R_6(q)$; противоречие с тем, что $R_6(q) = \{7\}$.

Пусть $p = 5$. Если $f = 1$, то $R_6(5) = \{7\}$. Если $f \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{6f}(5) \subseteq R_6(q)$; противоречие с тем, что $R_6(q) = \{7\}$. Итак, $q = 5$ и получаем заключение теоремы 1.

Пусть $H = U_5(q)$. По [3, табл. 6] и лемме 2 имеем $\{2, r_{10}(q)\} = \{2, 7\}$, но по лемме 1 имеем $r_{10}(q) \equiv 1 \pmod{10}$; противоречие.

Пусть $H = U_6(q)$. По [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда по лемме 2 имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 7\}$. Итак, $R_3(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{r_6(q), r_4(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$ и $R_{10}(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

3) Предположим, что $H \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где $n \in \{2, 3\}$ и $q > 2$.

Пусть $n = 2$. По лемме 2 и [3, табл. 4, 6] имеем $\{2, r_4(q)\} = \{2, 7\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие.

Пусть $n = 3$ и q нечетно. При $(q-1)_2 = 2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда по лемме 2 имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 7\}$. Итак, $R_3(q) = \{7\}$. По [11, табл. 2] множества $\{p, r_3(q), r_6(q)\}$, $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q)\}$ — максимальные коклики в $GK(G)$. Так как $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно, то $q = 3$. Но $R_3(3) = \{13\}$; противоречие.

При $(q-1)_2 > 2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда по лемме 2 имеем $\{2, r_6(q)\} = \{2, 7\}$. Итак, $R_6(q) = \{7\}$. Тогда по [11, табл. 2] множества $\{p, r_3(q), r_6(q)\}$, $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q)\}$ — максимальные коклики в $GK(G)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно, то $q = 3$, но $(3-1)_2 = 2$; противоречие.

4) Предположим, что $H = O_8^+(q)$, где q нечетно. По [11, предложения 2.4 и 2.5] имеем равенство графов $GK(O_7(q)) = GK(O_8^+(q))$. Как в пункте 3) получаем противоречие.

5) Предположим, что $H = {}^3D_4(q)$. По лемме 2 и [3, табл. 5, 7] имеем $\{2, r_{12}(q)\} = \{2, 7\}$, но по лемме 1 имеем $r_{12}(q) \equiv 1 \pmod{12}$; противоречие. $\triangleright$

4. Доказательство теоремы 3

Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$ или знакопеременной группой A_n , где $n - s'_{2n} \leq 3$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе McL .

По лемме 2 выполнено условие $S \leq \bar{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G .

Предположим, что H является знакопеременной группой. Так как $n - s'_{2n} \leq 3$, то $t(2, G) \geq 2$.

Пусть $H \in \{A_{11}, A_{12}\}$. Тогда $\pi(G) = \pi(S)$. По лемме 6 имеем $H \notin \{A_{11}, A_{12}\}$; противоречие.

Пусть $H \in \{A_{13}, A_{14}, A_{15}\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 3 подгруппа K нильпотентна. Так как $3 \cdot 7 \in \omega(H) \setminus \omega(S)$, то $3 \in \pi(K)$ или $7 \in \pi(K)$. Так как $13 \in \pi(K)$, то $3 \cdot 13 \in \omega(K)$ или $7 \cdot 13 \in \omega(K)$; противоречие.

Если $H = A_{16}$, то получаем заключение теоремы 3.

Пусть $H = A_n$, где $17 \leq n \leq 20$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 3 подгруппа K нильпотентна. Поэтому $13, 17 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $13, 17 \in \pi(K)$. Но $13 \cdot 17 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 21$. По лемме 4 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 21$, то $(n+1)/2 \geq 11$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 11$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ — коклика в $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 2.

Значит, H — конечная простая группа лиева типа.

По [8] множество $\{2, 11\}$ — максимальная коклика в $GK(S)$, содержащая 2. По [3, табл. 2] имеем $t(S) = 3$, $t(2, S) = 2$. По лемме 2 имеем $t(H) \leq 4$, $t(2, H) \leq 2$. По [3, табл. 4–7] и [11, табл. 2–4] группа H — одна из следующих групп: $L_n(q)$, где $3 \leq n \leq 8$ и q нечетно, $U_n(q)$, где $3 \leq n \leq 8$ и q нечетно, $O_5(q)$, $S_4(q)$ для $q > 2$, $O_7(q)$, где q нечетно, $S_6(q)$, где q нечетно, $O_9(q)$, $S_8(q)$, $O_8^+(q)$, где q нечетно, $O_{10}^+(q)$, где q нечетно, $O_{12}^+(q)$, где q нечетно, $O_8^-(q)$, где q нечетно, $O_{10}^-(q)$, где q нечетно, ${}^3D_4(q)$, $L_6(2)$, $L_7(2)$, $U_4(2)$, $S_6(2)$, $S_8(2)$, $O_8^+(2)$, ${}^2F_4(2)'$.

Если H — одна из групп $L_6(2)$, $L_7(2)$, $U_4(2)$, $S_6(2)$, $S_8(2)$, $O_8^+(2)$, ${}^2F_4(2)'$, то по [8] и [12] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(G)$; противоречие.

1) Предположим, что $H = L_n(q)$, где $3 \leq n \leq 8$ и q нечетно.

Пусть $n = 3$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{3}$; противоречие.

Пусть $n = 4$. При $4 < (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_4(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_4(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие. При $4 > (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{3}$; противоречие.

Пусть $n = 5$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_5(q)\} = \{2, 11\}$, т. е. $R_5(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множества $\{p, r_4(q), r_5(q)\}$, $\{r_3(q), r_4(q), r_5(q)\}$ — коклики в $GK(G)$.

Если $p \notin \pi(S)$, то $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$; противоречие. Значит, $p \in \pi(S)$. Если $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, то $R_4(q) = \{5\}$ и $R_5(q) = \{11\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно, то $q \in \{3, 7\}$. Так как $R_5(7) = \{2801\}$, то $q \neq 7$. Итак, $q = 3$. Если $H = L_5(3)$, то по [12] имеем $\pi(H) = \{2, 3, 5, 11, 13\}$ и $\pi(S) \not\subseteq \pi(H)$; противоречие.

Если $R_3(q) \subseteq \pi(S)$, то $R_3(q) = \{7\}$ и $p \in \{2, 3, 5\}$. Так как q нечетно, то $p \in \{3, 5\}$. Пусть $p = 3$. Если $f = 1$, то $R_5(3) = \{11\}$, но $R_3(3) = \{13\}$; противоречие. Если $f \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 11$ такое, что $t \in R_{5f}(3) \subseteq R_5(q)$; противоречие с тем, что $R_5(q) = \{11\}$. Пусть $p = 5$. Если $f = 1$, то $R_5(5) = \{11, 71\}$; противоречие. Если $f \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 11$ такое, что $t \in R_{5f}(5) \subseteq R_5(q)$; противоречие с тем, что $R_5(q) = \{11\}$.

Пусть $n = 6$. При $2 < (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_6(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_6(q) \equiv 1 \pmod{6}$; противоречие. При $2 = (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_5(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_5(q)\} = \{2, 11\}$. Итак, $R_5(q) = \{11\}$.

По [11, табл. 2] множества $\{r_3(q), r_4(q), r_5(q)\}$, $\{r_6(q), r_4(q), r_5(q)\}$ — максимальные коклики в $GK(G)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$ или $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно, то $q \in \{3, 7\}$. Так как $R_5(7) = \{2801\}$, то $q \neq 7$. Итак, $q = 3$ и получаем заключение теоремы 3.

Пусть $n = 7$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_7(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_7(q) \equiv 1 \pmod{7}$; противоречие.

Пусть $n = 8$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $8 \neq (q-1)_2$. При $8 < (q-1)_2$ множество $\{2, r_8(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда $\{2, r_8(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие. При $8 > (q-1)_2$ множество $\{2, r_7(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_7(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_7(q) \equiv 1 \pmod{7}$; противоречие.

2) Предположим, что $H = U_n(q)$, где $3 \leq n \leq 8$ и q нечетно.

Пусть $n = 3$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_6(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_6(q) \equiv 1 \pmod{6}$; противоречие.

Пусть $n = 4$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $4 \neq (q+1)_2$. При $4 < (q+1)_2$ множество $\{2, r_4(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_4(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие. При $4 > (q+1)_2$ множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_6(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_6(q) \equiv 1 \pmod{6}$; противоречие.

Пусть $n = 5$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_{10}(q)\} = \{2, 11\}$, т. е. $R_{10}(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множества $\{p, r_4(q), r_{10}(q)\}$, $\{r_6(q), r_4(q), r_{10}(q)\}$ — коклики в $GK(G)$.

Если $p \notin \pi(S)$, то $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$; противоречие. Значит, $p \in \pi(S)$. Если $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно, то $q \in \{3, 7\}$. Так как $R_{10}(3) = \{61\}$ и $R_{10}(7) = \{11, 191\}$, то $q \notin \{3, 7\}$; противоречие.

Если $R_6(q) \subseteq \pi(S)$, то $R_6(q) = \{7\}$ и $p \in \{2, 3, 5\}$. Так как q нечетно, то $q \in \{3, 5\}$. Пусть $p = 3$. Так как 11 делит $3^5 - 1$, то $11 \notin R_{10f}(3) \subseteq R_{10}(q)$; противоречие с тем, что $R_{10}(q) = \{11\}$. Пусть $p = 5$. Так как 11 делит $5^5 - 1$, то $11 \notin R_{10f}(5) \subseteq R_{10}(q)$; противоречие с тем, что $R_{10}(q) = \{11\}$.

Пусть $n = 6$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{6}$; противоречие.

Пусть $n = 7$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_{14}(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_{14}(q) \equiv 1 \pmod{14}$; противоречие.

Пусть $n = 8$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $8 \neq (q+1)_2$. При $8 < (q+1)_2$ множество $\{2, r_8(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_8(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие. При $8 > (q+1)_2$ множество $\{2, r_{14}(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_{14}(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_{14}(q) \equiv 1 \pmod{14}$; противоречие.

3) Предположим, что $H \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где $2 \leq n \leq 4$.

Пусть $n = 2$, где $q > 2$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 4, 6] имеем $\{2, r_4(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие.

Пусть $n = 3$ и q нечетно. При $(q-1)_2 = 2$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда $\{2, r_3(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{3}$; противоречие. При $(q-1)_2 > 2$ по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда $\{2, r_6(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_6(q) \equiv 1 \pmod{6}$; противоречие.

Пусть $n = 4$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 4, 6] имеем $\{2, r_8(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие.

4) Предположим, что $H = O_{2n}^+(q)$, где $4 \leq n \leq 6$ и q нечетно.

Пусть $n = 4$. При $q \equiv 3 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_3(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{3}$; противоречие. При $q \equiv 1 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_6(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_6(q) \equiv 1 \pmod{6}$; противоречие.

Пусть $n = 5$. При $q \equiv 1 \pmod{8}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_8(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда $\{2, r_8(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие. При $q \equiv 3 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_5(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда $\{2, r_5(q)\} = \{2, 11\}$, т. е. $R_5(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_6(q), r_3(q), r_5(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и либо $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, либо $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

Пусть $n = 6$. При $q \equiv 3 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_5(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда $\{2, r_5(q)\} = \{2, 11\}$, т. е. $R_5(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_5(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и $R_{10}(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

При $q \equiv 1 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_{10}(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_{10}(q)\} = \{2, 11\}$, т. е. $R_{10}(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_5(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и $R_5(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

5) Предположим, что $H = O_{2n}^-(q)$, где $n \in \{4, 5\}$ и q нечетно.

Пусть $n = 4$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_8(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие.

Пусть $n = 5$. При $q \equiv 7 \pmod{8}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_8(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда $\{2, r_8(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие.

При $q \equiv 1 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_{10}(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_{10}(q)\} = \{2, 11\}$, т. е. $R_{10}(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_6(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и либо $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, либо $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

6) Предположим, что $H = {}^3D_4(q)$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 5, 7] имеем равенство множеств $\{2, r_{12}(q)\} = \{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_{12}(q) \equiv 1 \pmod{12}$; противоречие.

Теорема 3 доказана.

5. Доказательство теорем 4 и 5

Пусть G — конечная группа с условием $GK(G) = GK(H)$, где H является конечной простой группой лиева типа над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$, или знакопеременной группой A_n , где $n - s'_{2n} \leq 3$; S — спорадический композиционный фактор группы G , изоморфный группе HS .

По лемме 2 выполнено условие $S \leq \bar{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G .

Докажем сначала теорему 4.

Теорема 5 непосредственно следует из теорем 1, 3 и 4.

◁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Если H является знакопеременной группой, то как в доказательстве теоремы 3 получаем, что $H = A_{16}$.

Значит, H — конечная простая группа лиева типа.

По [8] множество $\{2, 7, 11\}$ — максимальная коклика в $GK(S)$, содержащая 2. По [3, табл. 2] имеем $t(S) = 3$, $t(2, S) = 3$. По лемме 2 имеем $t(H) \leq 4$, $t(2, H) \leq 3$.

Предположим, что $t(2, H) = 2$. По [3, табл. 4–7] и [11, табл. 2–4] группа H является одной из следующих групп: $L_3(q)$, где q нечетно, $L_4(q)$, где $(q-1)_2 \neq 4$ и q нечетно, $L_5(q)$, где q нечетно, $L_6(q)$, где q нечетно, $L_7(q)$, где q нечетно, $L_8(q)$, где $(q-1)_2 \neq 8$ и q нечетно, $U_3(q)$, где q нечетно, $U_4(q)$, где $(q+1)_2 \neq 4$ и q нечетно, $U_5(q)$, где q нечетно, $U_6(q)$, где q нечетно, $U_7(q)$, где q нечетно, $U_8(q)$, где $(q+1)_2 \neq 8$ и q нечетно, $O_5(q)$, $S_4(q)$ для $q > 2$, $O_7(q)$, где q нечетно, $S_6(q)$, где q нечетно, $O_9(q)$, $S_8(q)$, $O_8^+(q)$, где q нечетно, $O_{10}^+(q)$, где q нечетно, $O_{12}^+(q)$, где q нечетно, $O_8^-(q)$, где q нечетно, $O_{10}^-(q)$, где q нечетно, ${}^3D_4(q)$, $L_6(2)$, $L_7(2)$, $U_4(2)$, $S_6(2)$, $S_8(2)$, $O_8^+(2)$, ${}^2F_4(2)'$.

Если H — одна из групп $L_6(2)$, $L_7(2)$, $U_4(2)$, $S_6(2)$, $S_8(2)$, $O_8^+(2)$, ${}^2F_4(2)'$, то по [8] и [12] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(G)$; противоречие.

Если $H \in \{L_3(q), U_3(q)\}$, то получаем заключение теоремы 4.

1) Предположим, что $H = L_n(q)$, где $4 \leq n \leq 8$ и q нечетно.

Пусть $H = L_4(q)$, где $(q-1)_2 \neq 4$. При $4 < (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_4(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда по лемме 2 имеем $\{2, r_4(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие. При $4 > (q-1)_2$ по [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда по лемме 2 имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{3}$. Значит, $R_3(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{p, r_3(q), r_4(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Если $p \notin \pi(S)$, то $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$; противоречие. Значит, $p \in \pi(S)$. Отсюда $p \in \{3, 5, 11\}$.

Пусть $p = 3$. Если $f = 1$, то $R_3(3) = \{13\}$; противоречие. Если $f = 2$, то $R_3(9) = \{7, 13\}$; противоречие. Если $f \geq 3$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{3f}(3) \subseteq R_3(q)$; противоречие с тем, что $R_3(q) = \{7\}$. Пусть $p = 5$. Если $f = 1$, то $R_3(5) = \{31\}$; противоречие. Если $f = 2$, то $R_3(25) = \{7, 31\}$; противоречие. Если $f \geq 3$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{3f}(5) \subseteq R_3(q)$; противоречие с тем, что $R_3(q) = \{7\}$. Пусть $p = 11$. Если $f = 1$, то $R_3(11) = \{7, 19\}$; противоречие. Если $f \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{3f}(11) \subseteq R_3(q)$; противоречие с тем, что $R_3(q) = \{7\}$.

Пусть $H = L_5(q)$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_5(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_5(q) \equiv 1 \pmod{5}$. Значит, $R_5(q) = \{11\}$. Как в теореме 3 получаем противоречие.

Пусть $H = L_6(q)$. Как в теореме 3 получаем, что $q = 3$ и справедливо заключение теоремы 4.

Пусть $H = L_7(q)$. Как в теореме 3 получаем противоречие.

Пусть $H = L_8(q)$, где $(q - 1)_2 \neq 8$. Как в теореме 3 получаем противоречие.

2) Предположим, что $H = U_n(q)$, где $4 \leq n \leq 8$ и q нечетно.

По лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $4 \neq (q + 1)_2$. При $4 < (q + 1)_2$ множество $\{2, r_4(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда $\{2, r_4(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие. При $4 > (q + 1)_2$ множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда $\{2, r_6(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_6(q) \equiv 1 \pmod{6}$. Значит, $R_6(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{p, r_6(q), r_4(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Если $p \notin \pi(S)$, то $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$; противоречие. Значит, $p \in \pi(S)$. Отсюда $p \in \{3, 5, 11\}$.

Пусть $p = 3$. Если $f = 1$, то $R_6(3) = \{7\}$. Если $f \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{6f}(3) \subseteq R_6(q)$; противоречие с тем, что $R_6(q) = \{7\}$. Пусть $p = 5$. Если $f = 1$, то $R_6(5) = \{7\}$. Если $f \geq 2$, то по лемме 1 существует простое число $t \neq 7$ такое, что $t \in R_{6f}(5) \subseteq R_6(q)$; противоречие с тем, что $R_6(q) = \{7\}$. Пусть $p = 11$. Так как 7 делит $11^3 - 1$, то $7 \notin R_{6f}(11) \subseteq R_6(q)$; противоречие.

Итак, $q \in \{3, 5\}$. При $q = 3$ по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(U_4(3)) = \{2, 3, 5, 7\}$; противоречие. При $q = 5$ по [12] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(U_4(5)) = \{2, 3, 5, 7, 13\}$; противоречие.

Пусть $H = U_5(q)$. По лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_{10}(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_{10}(q) \equiv 1 \pmod{10}$. Значит, $R_{10}(q) = \{11\}$. Как в теореме 3 получаем противоречие.

Пусть $H = U_6(q)$. По лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_3(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{3}$. Значит, $R_3(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{r_6(q), r_4(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$ и $R_{10}(q) = \{11\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно, то $q \in \{3, 7\}$. Так как $R_{10}(3) = \{61\}$ и $R_{10}(7) = \{11, 191\}$, то $q \notin \{3, 7\}$; противоречие.

Если $H = U_7(q)$, то как в теореме 3 получаем противоречие.

Если $H = U_8(q)$, где $(q + 1)_2 \neq 8$, то как в теореме 3 получаем противоречие.

3) Предположим, что $H \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где $2 \leq n \leq 4$.

Пусть $H = O_5(q) = S_4(q)$, где $q > 2$. Ввиду леммы 2 и [3, табл. 4, 6] имеем $\{2, r_4(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$; противоречие.

Пусть $H \in \{O_7(q), S_6(q)\}$, где q нечетно. При $(q - 1)_2 = 2$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Отсюда $\{2, r_3(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod{3}$. Значит, $R_3(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно, то $q = 3$. Но $R_3(3) = \{13\}$; противоречие.

При $(q - 1)_2 > 2$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_6(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда $\{2, r_6(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_6(q) \equiv 1 \pmod{6}$. Значит, $R_6(q) = \{7\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q нечетно,

то $q = 3$, но $(3 - 1)_2 = 2$; противоречие.

Пусть $H \in \{O_9(q), S_8(q)\}$. По лемме 2 и [3, табл. 4, 6] имеем $\{2, r_8(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие.

4) Предположим, что $H = O_{2n}^+(q)$, где $4 \leq n \leq 6$ и q нечетно.

Пусть $H = O_8^+(q)$. По [11, предложения 2.4, 2.5] имеем равенство графов $GK(O_7(q)) = GK(O_8^+(q))$. Как в пункте 3) получаем противоречие.

Пусть $H = O_{10}^+(q)$. При $q \equiv 1 \pmod{8}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_8(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Тогда $\{2, r_8(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие.

При $q \equiv 3 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_5(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_5(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_5(q) \equiv 1 \pmod{5}$. Значит, $R_5(q) = \{11\}$.

По [11, табл. 2] множество $\{r_6(q), r_3(q), r_5(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и либо $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, либо $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

Пусть $H = O_{12}^+(q)$. При $q \equiv 3 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_5(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_5(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_5(q) \equiv 1 \pmod{5}$. Значит, $R_5(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_5(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и $R_{10}(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

При $q \equiv 1 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_{10}(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_{10}(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_{10}(q) \equiv 1 \pmod{11}$. Значит, $R_{10}(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_5(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и $R_5(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

5) Предположим, что $H = O_{2n}^-(q)$, где $n \in \{4, 5\}$ и q нечетно.

Пусть $H = O_8^-(q)$. По лемме 2 и [3, табл. 6] имеем $\{2, r_8(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие.

Пусть $H = O_{10}^-(q)$. При $q \equiv 7 \pmod{8}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_8(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_8(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_8(q) \equiv 1 \pmod{8}$; противоречие.

При $q \equiv 1 \pmod{4}$ по лемме 2 и [3, табл. 6] множество $\{2, r_{10}(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$, содержащая 2. Поэтому $\{2, r_{10}(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$. По лемме 1 имеем $r_{10}(q) \equiv 1 \pmod{11}$. Значит, $R_{10}(q) = \{11\}$. По [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_6(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$ и либо $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, либо $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

6) Предположим, что $H = {}^3D_4(q)$. Тогда по лемме 2 и [3, табл. 5, 7] имеем $\{2, r_{12}(q)\} = \{2, 7\}$ или $\{2, 11\}$, но по лемме 1 имеем $r_{12}(q) \equiv 1 \pmod{12}$; противоречие.

Рассмотрим случай $t(2, H) = 3$. По [3, табл. 4–7] и [11, табл. 2–4] группа H — одна из следующих групп: $L_2(q)$, $q > 3$, $L_3(q)$, где $(q - 1)_3 \neq 3$, $q + 1 \neq 2^k$ и q четно, $L_n(q)$, где $4 \leq n \leq 8$, $(n, q) \neq (6, 2), (7, 2)$ и q четно, $U_3(q)$, где $(q + 1)_3 \neq 3$, $q - 1 \neq 2^k$ и q четно, $U_n(q)$, где $4 \leq n \leq 8$, $(n, q) \neq (4, 2)$ и q четно, $O_7(q)$, где q четно, $S_6(q)$, где q четно, $O_8^+(q)$, где $q \neq 2$, q четно, $O_{10}^+(q)$, где q четно, $O_{12}^+(q)$, где q четно, $O_{10}^-(q)$, где q четно, $G_2(q)$ для $q > 2$, $L_4(q)$, где $(q - 1)_2 = 4$ и q нечетно, $L_8(q)$, где $(q - 1)_2 = 8$ и q нечетно, $U_4(q)$, где $(q + 1)_2 = 4$ и q нечетно, $U_8(q)$, где $(q + 1)_2 = 8$ и q нечетно, $O_{10}^+(q)$ для $q \equiv 5 \pmod{8}$, $O_{10}^-(q)$ для $q \equiv 3 \pmod{8}$, $L_8(2)$, $L_9(2)$, $L_{10}(2)$, $S_{10}(2)$, $O_{10}^+(2)$, $O_{12}^+(2)$, $O_8^-(2)$, $O_{10}^-(2)$, $F_4(2)$.

Если H — одна из групп $L_8(2)$, $L_9(2)$, $O_{10}^+(2)$, $O_8^-(2)$, $F_4(2)$, то по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(H)$; противоречие.

Пусть $H = L_{10}(2)$. По [8] имеем $\pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 31, 73, 127\}$. Так как $17, 73, 127 \notin \pi(S)$, то $17, 73, 127 \in \pi(K)$. Так как $17 \in R_8(2)$, $73 \in R_9(2)$, $127 \in R_7(2)$, то $\{17, 73, 127\}$ — 3-кликка в $GK(H)$; противоречие с леммой 2.

Пусть $H \in \{S_{10}(2), O_{12}^+(2)\}$. По [12] имеем $\pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 31\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 3 подгруппа K нильпотентна. Так как $17, 31 \notin \pi(S)$, то $17, 31 \in \pi(K)$, поэтому $17 \cdot 31 \in \omega(K)$. Так как $17 \in R_8(2)$, $31 \in R_5(2)$, то по [11, предл. 2.4, 2.5] вершины 17 и 31 несмежны в $GK(H)$; противоречие.

Пусть $H = O_{10}^-(2)$. По [3, табл. 4] множество $\{2, 17, 11\}$ является кликой в $GK(H)$. По лемме 2 получаем равенство множеств $\{2, 17, 11\} = \{2, 7, 11\}$; противоречие.

1) Предположим, что $H = L_2(q)$, где $q > 3$.

Пусть q четно. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_1(q), r_2(q)\}$ — клика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $\pi(q^2 - 1) \subseteq \pi(S)$. Так как $\pi(S) \subseteq \pi(G) = \pi(q(q^2 - 1))$, то $\pi(2^{2f} - 1) = \pi(q^2 - 1) = \{3, 5, 7, 11\}$. Непосредственно проверяется, что при $1 \leq f \leq 5$ имеем $\pi(2^{2f} - 1) \neq \{3, 5, 7, 11\}$. При $f \geq 6$ существует простое число t такое, что $t \notin \pi(S)$ и $t \in \pi(2^{2f} - 1)$. Итак, $\pi(q^2 - 1) \neq \{3, 5, 7, 11\}$; противоречие.

Пусть q нечетно и $q \equiv 1 \pmod{4}$. По [7, табл. 2] имеем равенство множеств $\pi_1(G) = \pi_1(H) = \pi(q - 1)$. Поэтому $\{2, r_2(q), p\}$ — клика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $\{p\} \cup R_2(q) \subseteq \pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Так как $\{2, 3, 5\} \subseteq \pi_1(S) \subseteq \pi_1(G) = \pi(q - 1)$, то $\{p\} \cup \pi(q + 1) \subseteq \{2, 7, 11\}$. Отсюда $p \in \{7, 11\}$. Так как $q \equiv 1 \pmod{4}$, то f четно.

Пусть $p = 7$. Тогда $\pi(7^f + 1) = \{2, 11\}$. Если $11 \in \pi(7^f + 1)$, то 5 делит f . При $f = 5$ имеем $\pi(7^f + 1) = \{2, 11, 191\} \neq \{2, 11\}$; противоречие. При $f > 5$ по лемме 1 имеем $\pi(7^f + 1) \neq \{2, 11\}$; противоречие. Пусть $p = 11$. Тогда $\pi(11^f + 1) = \{2, 7\}$, но 7 не делит $11^f + 1$; противоречие.

Пусть q нечетно и $q \equiv 3 \pmod{4}$. По [7, табл. 2] имеем $\pi_1(G) = \pi_1(H) = \pi(q + 1)$. Поэтому $\{2, r_1(q), p\}$ — клика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $\{p\} \cup R_1(q) \subseteq \pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Так как $\{2, 3, 5\} \subseteq \pi_1(S) \subseteq \pi_1(G) = \pi(q + 1)$, то $\{p\} \cup \pi(q - 1) \subseteq \{2, 7, 11\}$. Отсюда $p \in \{7, 11\}$.

Пусть $p = 7$. Тогда $\pi(7^f - 1) = \{2, 11\}$. Если $11 \in \pi(7^f - 1)$, то 10 делит f . При $f = 10$ имеем $\pi(7^f - 1) = \{2, 3, 11, 191, 2801\} \neq \{2, 11\}$; противоречие. При $f > 10$ по лемме 1 имеем $\pi(7^f - 1) \neq \{2, 11\}$; противоречие. Пусть $p = 11$. Тогда $\pi(11^f - 1) = \{2, 7\}$. Если $7 \in \pi(11^f - 1)$, то 3 делит f . При $f = 3$ имеем $\pi(11^f - 1) = \{2, 5, 7, 19\} \neq \{2, 7\}$; противоречие. При $f > 3$ по лемме 1 имеем $\pi(11^f - 1) \neq \{2, 7\}$; противоречие.

2) Предположим, что $H = L_3(q)$, где $(q - 1)_3 \neq 3$ и $q + 1 \neq 2^k$ и q четно.

По [3, табл. 4] множество $\{2, r_2(q), r_3(q)\}$ — клика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $R_2(q) \cup R_3(q) \subseteq \pi(S)$. По лемме 1 имеем $R_3(q) = \{7\}$. Так как $R_{3f}(2) \subseteq R_3(q) = \{7\}$, то $R_{3f}(2) = \{7\}$, поэтому $3f = 3$, $q = 2$, но по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(L_3(2)) = \{2, 3, 7\}$; противоречие.

3) Предположим, что $H = L_4(q)$, где $(q - 1)_2 = 4$.

По [3, табл. 6] множество $\{2, r_3(q), r_4(q)\}$ — клика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{3, 7\}$; противоречие с условием $4 = (q - 1)_2$.

4) Предположим, что $H = L_n(q)$, где $4 \leq n \leq 8$, $(n, q) \neq (6, 2), (7, 2)$, q четно.

Пусть $H = L_4(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_3(q), r_4(q)\}$ — клика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q = 2$. Но по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(L_4(2)) = \{2, 3, 5, 7\}$; противоречие.

Пусть $H = L_5(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_4(q), r_5(q)\}$ — клика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $r_4(q) = 5$ и $r_5(q) = 11$, т. е. $R_4(q) = \{5\}$ и $R_5(q) = \{11\}$. Если $R_4(q) = \{5\}$, то по лемме 5 имеем $q = 2$, но $R_5(2) = \{31\}$; противоречие.

Пусть $H = L_6(q)$, $q \neq 2$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_5(q), r_6(q)\}$ — клика

в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $r_5(q) = 11$ и $r_6(q) = 7$, т. е. $R_5(q) = \{11\}$ и $R_6(q) = \{7\}$. Поэтому по [11, табл. 2] множество $\{r_3(q), r_4(q), r_5(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q четно, то $q = 2$; противоречие.

Пусть $H = L_7(q)$, $q \neq 2$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_6(q), r_7(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 1 имеем $r_7(q) \equiv 1 \pmod{7}$, поэтому $r_7(q) \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 2.

Пусть $H = L_8(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_7(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 1 имеем $r_7(q) \equiv 1 \pmod{7}$, поэтому $r_7(q) \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 2.

5) Предположим, что $H = U_3(q)$, где $(q+1)_3 \neq 3$ и $q-1 \neq 2^k$ и q четно.

По [3, табл. 4] множество $\{2, r_1(q), r_6(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $R_1(q) \cup R_6(q) \subseteq \pi(S)$. По лемме 1 имеем $R_6(q) = \{7\}$. Если $f = 1$, то $R_6(q) = \emptyset$. Значит, $f \geq 2$. Так как $R_{6f}(2) \subseteq R_6(q) = \{7\}$, то $R_{6f}(2) = \{7\}$, но $R_3(2) = \{7\}$; противоречие.

6) Предположим, что $H = U_4(q)$, где $(q+1)_2 = 4$.

По [3, табл. 6] множество $\{2, r_6(q), r_4(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{3, 7\}$.

Пусть $H = U_4(3)$. По [8] множество $\{2, 5, 7\}$ — коклика в $GK(G)$, т. е. 2 и 5 смежны в $GK(S)$, но не смежны в $GK(H)$; противоречие.

Пусть $H = U_4(7)$. По [11, табл. 2] множество $\{2, 5, 43\}$ — коклика в $GK(H)$. Вершины 2 и 5 в графе $GK(S)$ смежны, а в графе $GK(H)$ несмежны; противоречие.

7) Предположим, что $H = U_n(q)$, где $4 \leq n \leq 8$, $(n, q) \neq (4, 2)$ и q четно.

Пусть $H = U_4(q)$ для $q \neq 2$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_6(q), r_4(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q = 2$; противоречие.

Пусть $H = U_5(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_4(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $r_4(q) = 5$ и $r_{10}(q) = 11$, т. е. $R_4(q) = \{5\}$ и $R_{10}(q) = \{11\}$. Если $R_4(q) = \{5\}$, то по лемме 5 имеем $q = 2$. По [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(U_5(2)) = \{2, 3, 5, 11\}$; противоречие.

Пусть $H = U_6(2)$. По [13, теор. 2] имеем $G \in \{U_6(2), HS\}$. Если $G = U_6(2)$, то G не имеет композиционных факторов, изоморфных HS . Значит, $G = HS$. Выполнено заключение теоремы 4.

Пусть $H = U_6(q)$, где $q \neq 2$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_{10}(q), r_3(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 2 имеем $r_{10}(q) = 11$ и $r_3(q) = 7$, т. е. $R_{10}(q) = \{11\}$ и $R_3(q) = \{7\}$. Поэтому по [11, табл. 2] множество $\{r_6(q), r_4(q), r_{10}(q)\}$ — максимальная коклика в $GK(G)$. Так как $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то по лемме 2 имеем $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 5 имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Так как q четно, то $q = 2$; противоречие.

Пусть $H = U_7(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_3(q), r_{14}(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 1 имеем $r_{14}(q) \equiv 1 \pmod{14}$, поэтому $r_{14}(q) \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 2.

Пусть $H = U_8(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_{14}(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 1 имеем $r_{14}(q) \equiv 1 \pmod{14}$, поэтому $r_{14}(q) \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 2.

8) Предположим, что $H = U_8(q)$, где $(q+1)_2 = 8$ и q нечетно. По [3, табл. 6] множество $\{2, r_{14}(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. По лемме 1 имеем $r_{14}(q) \equiv 1 \pmod{14}$, поэтому $r_{14}(q) \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 2.

9) Предположим, что $H \in \{O_7(q), S_6(q)\}$, где q четно. По [3, табл. 4] множество $\{2, r_3(q), r_6(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$ или $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

10) Предположим, что $H = O_{2n}^+(q)$, где $4 \leq n \leq 6$, $(n, q) \neq (4, 2)$, q четно.

Пусть $H = O_8^+(q)$, где $q \neq 2$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_3(q), r_6(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$ или $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

Пусть $H = O_{10}^+(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

Пусть $H = O_{12}^+(q)$. Тогда по [3, табл. 4] множество $\{2, r_5(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Так как $R_5(q) \not\subseteq \pi(S)$ или $R_{10}(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

11) Предположим, что $H = O_{10}^+(q)$, где $q \equiv 5 \pmod{8}$. По [3, табл. 4] множество $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

12) Предположим, что $H = O_{10}^-(q)$, где q четно или $q \equiv 3 \pmod{8}$. По [3, табл. 4, 6] множество $\{2, r_{10}(q), r_8(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Так как $R_8(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2.

13) Предположим, что $H = G_2(q)$, где $q > 2$. По лемме 2 и [3, табл. 5, 7] множество $\{2, r_3(q), r_6(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Так как $R_3(q) \not\subseteq \pi(S)$ или $R_6(q) \not\subseteq \pi(S)$, то получаем противоречие с леммой 2. $\triangleright$

Пусть K — конечная группа. Старолетов А. М. в [14] заметил, что если $r \leq n - s'_{2n}$ для любого $r \in \pi(K)$, то граф простых чисел расширения знакопеременной группы A_n посредством K совпадает с графом простых чисел знакопеременной группы A_n . Если $S \in \{J_2, McL, HS\}$, то простые делители из $\pi(S)$ не превосходят 11. Отсюда получаем следующий пример:

ПРИМЕР. Существуют конечные группы, имеющие спорадический композиционный фактор S , изоморфный одной из групп J_2 , McL или HS , с графом простых чисел как у знакопеременной группы A_n .

Пусть $H = A_{124}$ и G — прямое произведение H и S . Тогда $GK(G) = GK(H)$.

Литература

1. Кондратьев А. С. Конечные группы с заданными свойствами их графов простых чисел // Алгебра и логика.—2016.—Т. 55, № 1.—С. 113–120. DOI: 10.17377/alglog.2016.55.108.
2. Staroletov A. M. Sporadic composition factors of finite groups isospectral to simple groups // Сиб. электрон. матем. изв.—2011.—№ 8.—С. 268–272.
3. Васильев А. В., Вдовин Е. П. Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика.—2005.—Т. 44, № 6.—С. 682–725.
4. Зиновьева М. Р. О существовании спорадического композиционного фактора в некоторых конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.—2024.—Т. 30, № 4.—С. 134–148. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-4-134-148>.
5. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra.—1981.—Vol. 69, № 2.—P. 487–513.
6. Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб.—1989.—Т. 180, № 6.—С. 787–797.
7. Кондратьев А. С., Мазуров В. Д. Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 2.—С. 359–369.
8. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of Finite Groups.—Oxford: Clarendon Press, 1985.—252 p.
9. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys.—1892.—Bd. 3.—S. 265–284.
10. Васильев А. В., Горшков И. Б. О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн.—2009.—Т. 50, № 2.—С. 292–299.
11. Васильев А. В., Вдовин Е. П. Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика.—2011.—Т. 50, № 4.—С. 425–470.
12. Zavarnitsine A. V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elec. Math. Rep.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.
13. Кондратьев А. С. О распознаваемости спорадических простых групп HS , J_3 , Suz , $O'N$, Ly , Th , Fi_{23} и Fi'_{24} по графу Грюнберга — Кегеля. Сиб. матем. журн., 2020, Т. 61, №6, С. 1359–1365. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.609.
14. Staroletov A. M. On recognition of alternating groups by prime graph // Сиб. электр. матем. изв.—2017.—Vol. 14.—P. 994–1010. DOI: 10.17377/semi.2017.14.084.

Статья поступила 29 апреля 2025 г.

ЗИНОВЬЕВА МАРИАННА РИФХАТОВНА

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
научный сотрудник отдела алгебры и топологии
РОССИЯ, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16;

Уральский федеральный университет,

доцент департамента информационных технологий и автоматике
РОССИЯ, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

<https://orcid.org/0009-0006-0560-2192>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 3, P. 74–90

ON THE EXISTENCE OF A SPORADIC COMPOSITION FACTOR, ISOMORPHIC TO J_2 , McL OR HS IN FINITE GROUPS WITH THE CONDITION ON THE PRIME GRAPH

Zinovieva, M. R.^{1,2}

¹ N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russia;

² Ural Federal University,
19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russia

E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Abstract. The prime graph (or the Gruenberg–Kegel graph) of a finite group G is a simple graph $GK(G)$ whose vertices are the prime divisors of the order of G , and two distinct vertices p and q are adjacent in $GK(G)$ if and only if G contains an element of order pq . The prime graphs of non-abelian finite simple groups are known. One of the most popular fields of research in finite group theory is the study of finite groups by properties of their prime graphs. We study non-abelian composition factors of finite groups with the same prime graphs as non-abelian finite simple groups. In 2011, A. M. Staroletov studied groups having the same spectrum (the set of all orders of their elements) as a finite simple group and a sporadic composition factor. Generalizing this result, we consider whether the composition factor of a finite group with the same prime graph as the prime graph of a finite simple group can be isomorphic to a sporadic group. More exactly, we investigate whether it can be one of the sporadic groups J_2 , McL or HS .

Keywords: finite group, composition factor, group of Lie type, alternating group, sporadic group, prime graph (Gruenberg–Kegel graph).

AMS Subject Classification: 20D06, 20D08, 20D60, 05C25.

For citation: Zinovieva, M. R. On the Existence of a Sporadic Composition Factor, Isomorphic to J_2 , McL or HS in Finite Groups with the Condition on the Prime Graph, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 3, pp. 74–90 (in Russian). DOI: 10.46698/e0260-9676-5868-v.

References

1. Kondrat'ev, A. S. Finite Groups with Given Properties of Their Prime Graphs, *Algebra and Logic*, 2016, vol. 55, no. 1, pp. 77–82. DOI: 10.1007/s10469-016-9378-5.
2. Staroletov, A. M. Sporadic Composition Factors of Finite Groups Isospectral to Simple Groups, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2011, no. 8, pp. 268–272.
3. Vasil'ev, A. V. and Vdovin, E. P. An Adjacency Criterion for the Prime Graph of a Finite Simple Group, *Algebra and Logic*, 2005, vol. 44, no. 6, pp. 381–406. DOI: 10.1007/s10469-005-0037-5.

4. Zinovieva, M. R. O Sushchestvovanii Sporadicheskogo Kompozitsionnogo Faktora v Nekotorykh Konechnykh Gruppakh, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2024, vol. 30, no. 4, pp. 134–148. DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-134-148.
5. Williams, J. S. Prime Graph Components of Finite Groups, *Journal of Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513.
6. Kondrat'ev, A. S. Prime Graph Components of Finite Simple Groups, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. DOI: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363.
7. Kondrat'ev, A. S., and Mazurov, V. D. Recognition of Alternating Groups of Prime Degree from the Orders of Their Elements, *Siberian Mathematical Journal*, 2000, vol. 41, no. 2, pp. 294–302. DOI: 10.1007/BF02674599.
8. Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A. and Wilson, R. A. *Atlas of Finite Groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
9. Zsigmondy, K. Zur Theorie der Potenzreste, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1892, Bd. 3, pp. 265–284.
10. Vasil'ev, A. V. and Gorshkov, I. B. On Recognition of Finite Simple Groups with Connected Prime Graph, *Siberian Mathematical Journal*, 2009, vol. 50, no. 2, pp. 233–238. DOI: 10.1007/s11202-009-0027-2.
11. Vasil'ev, A. V. and Vdovin, E. P. Cocliques of Maximal Size in the Prime Graph of a Finite Simple Group, *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 291–322. DOI: 10.1007/s10469-011-9143-8.
12. Zavarnitsine, A. V. Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.
13. Kondrat'ev, A. S. On Recognition of the Sporadic Simple Groups HS , J_3 , Suz , $O'N$, Ly , Th , Fi_{23} and Fi'_{24} by the Gruenberg–Kegel Graph, *Siberian Mathematical Journal*, 2020, vol. 61, no. 6, pp. 1087–1092. DOI: 10.1134/S0037446620060099.
14. Staroletov, A. M. On Recognition of Alternating Groups by Prime Graph, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 994–1010. DOI: 10.17377/semi.2017.14.084.

Received April 29, 2025

MARIANNA R. ZINOV'EVA

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russia,
Researcher, Algebra and Topology Department;

Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russia,

Docent, Department of Information Technology and Automation

E-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

<https://orcid.org/0009-0006-0560-2192>