

УДК 539.3

DOI 10.46698/v0156-6205-6438-1

ГРАДИЕНТНАЯ МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

С. А. Нестеров¹

¹ Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: 1079@list.ru

Аннотация. Моделирование поведения стержневых микроразмерных конструкций имеет большое практическое значение для проектирования термоэлектрических устройств. Ранее проведенные исследования не учитывали совместного влияния теплового и механического масштабных параметров на распределение температуры и смещений составных тел. Это приводило к большим расхождениям расчетов и экспериментальных данных. Мы исследуем задачу уточнения нестационарного термонапряженного состояния составного микростержня. Один торец стержня зажат и находится при нулевой температуре, а на другом задан нестационарный тепловой поток. Получена обобщенная (градиентная) модель термоупругости для составного микростержня в квазистатической постановке. В определяющие соотношения данной модели вводим тепловой масштабный параметр, а в выражении для теплового потока учитываем градиенты температуры второго порядка. Постановка градиентной модели включает уравнения теплопроводности и равновесия более высокого порядка по сравнению с классической теорией и расширенный список граничных условий. В рамках работы построены численно-аналитическое и асимптотическое решения задачи в случае слабой связанности. Задача сведена к последовательному решению задач градиентной теплопроводности и градиентной теории упругости в трансформантах Лапласа. Обращение трансформант осуществлено на основе модифицированного метода Дурбина. Решение сингулярно возмущенной задачи теплопроводности построено с помощью асимптотического подхода. Выражения для температуры представлены в виде суммы классического решения и пограничных функций. Обнаружены следующие эффекты, не описанные ранее: 1) с увеличением масштабного параметра значения температуры возрастают на малых временах; 2) происходит более плавное изменение температуры в окрестности точки сопряжения. Точность асимптотических формул проверена путем сравнения с численно-аналитическим решением. Определены границы их применимости. Представленный подход позволит более точно проводить расчеты на прочность составных микроразмерных тел, например, микробалки и микроцилиндра.

Ключевые слова: микроразмерные структуры, градиентная термоупругость, нестационарная задача, составной стержень, масштабный эффект, асимптотика, метод Вишика — Люстерника, моментные напряжения, полные напряжения, полный тепловой поток.

AMS Subject Classification: 74B05.

Образец цитирования: Нестеров С. А. Градиентная модель нестационарной термоупругости для составного стержня // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 3.—С. 91–107. DOI: 10.46698/v0156-6205-6438-1.

1. Введение

За последнее десятилетие термоэлектрические устройства на основе микро-электромеханических систем (МЭМС) [1–3] привлекли к себе значительное внимание в связи с достижениями в технологии микрообработки. Моделирование поведения состав-

ных стержневых микроразмерных конструкций имеет большое практическое значение для проектирования термоэлектрических устройств. Однако согласно экспериментальным данным в микроразмерных структурах проявляются тепловые и механические масштабные эффекты. Суть масштабных эффектов — зависимость термонапряженного состояния от особенностей микроструктуры и размеров тела [4–6]. Данные эффекты невозможно описать моделями классической термомеханики, у которых определяющие соотношения не содержат каких-либо масштабных параметров. Необходим уточненный термомеханический анализ составных конструкций на основе теории, учитывающей как тепловые, так и механические масштабные эффекты.

Рассмотрим обзор имеющейся на сегодня литературы, посвященный исследованию термонапряженного состояния микроразмерных тел. Для учета масштабных эффектов в настоящий момент применяют либо методы молекулярной динамики [7], либо модели обобщенной механики сплошных сред [8–32]. Наиболее распространенной моделью обобщенной термомеханики выступает градиентная термоупругость. Градиентная термоупругость, впервые предложенная в работе [8] в 1975 г., может рассматриваться как развитие идей градиентной теории упругости Тупина — Миндлина, примененных к термоупругим задачам. В этой модели плотность свободной энергии зависит как от деформации, так и от ее градиентов с множителями (градиентными параметрами). Такая градиентная модель подходит для учета механических масштабных эффектов.

Дальнейшее развитие термомеханики связано с построением обобщенных теорий, которые называются второй градиентной термоупругостью [9–14]. В этих теориях в основные уравнения для тензора напряжений и вектора теплового потока входят как градиенты деформации, так и градиенты температуры более высокого порядка. Мотивы введения эффектов градиента температуры в термомеханику вытекают из членов более высокого порядка в кинетической теории газа [15]. Как известно, напряжения более высокого порядка в градиентной теории Тупина — Миндлина иногда называют гипернатяжениями. По аналогии с гипернатяжениями Форестом в [9, 10] разработана термомеханическая теория, в которой постулировано существование обобщенных сил, называемых «гипертемпературой» или «гиперэнтропией». В этой теории плотность внутренней энергии по сравнению с классической теорией содержит квадраты энтропии и ее градиента. Данная теория в [12, 13] используется для исследования термомеханического поведения микронеоднородных композитов.

Большой вклад в развитие обобщенной термомеханики неоднородных структур внесли также работы научной школы Лурье [16–19]. Так в [18] на основе вариационного подхода дана математическая постановка для связанной стационарной термоупругости и сформулирована контактная граничная задача для рассмотрения неоднородных материалов. Сформулированы контактные граничные задачи для моделирования неоднородных материалов и построено решение для слоистой структуры. Показано, что учет дополнительного параметра связности градиентных полей деформаций и температур предсказывает появление быстро изменяющихся температурных полей и значительную локализацию тепловых потоков в окрестности фазового контакта в неоднородных материалах. В [19] рассматривается нестационарная проблема градиентной термоупругости, построенная с привлечением градиентных моделей теории упругости, в которых дополнительные модули упругости представляются в виде свертки тензоров четвертого ранга. Показано, что рассматриваемая модель сводится к системе градиентных волновых уравнений относительно температуры и объемных и сдвиговых потенциалов соответствующих волн с контактными условиями на межфазных границах, выраженными через классические и когезионные поля температуры и перемещений.

Дифференциальные уравнения градиентной термоупругости содержат масштабные параметры как множители при старшей производной. В случае малых значений масштабных параметров удобно получить приближенное асимптотическое решение таких задач, используя, например, метод Вишика — Люстерника [20]. Ранее метод Вишика — Люстерника был апробирован для решения динамических и статических задач классической теории упругости в [21], градиентной теории упругости однородных тел [22]. Исследованию задач градиентной механики для слоистых тел на основе метода Вишика — Люстерника посвящено небольшое количество работ [23–25]. Так, в [25] получены уравнения равновесия и граничные условия для составного цилиндра. После нахождения радиального распределения температуры решение для радиальных перемещений представлено в виде суммы решений задачи в классической постановке и дополнительных погранслоиных слагаемых. Проведен сравнительный анализ термонапряженного состояния тел, рассчитанный в рамках классической постановки и градиентной постановки.

Кроме градиентной термоупругости для описания масштабных эффектов широко применяются и другие неклассические теории, например, нелокальная термоупругость и моментная теория упругости. В [26] получена нелокальная модель теплопроводности для наноразмерных объектов. Данная методика основана на учете вторых производных температуры в определяющем уравнении теплового потока высшего порядка. Общая двумерная краевая задача теплопроводности решается методом конечных элементов. Исследовано влияние теплового масштабного параметра на статическое распределение температуры слоя и цилиндра. В [27] модель нелокальной термоупругости с одним временем тепловой релаксации используется для рассмотрения поведения колебаний нанобалки Эйлера — Бернулли. Теплопроводность нанобалки предполагается зависящей от температуры. Вычислены распределения колебаний температуры, осевого смещения и изгибающего момента нанобалки. Исследовано влияние толщины и коэффициента теплопроводности, а также нелокального параметра. В [28] на основе теории термоупругости Лорда и Шулмана сформулированы уравнения термоупругости с нелокальной теплопроводностью. Данная модель применяется для изучения переходных реакций термоупругого стержня конечной длины при воздействии движущегося источника тепла. Для получения аналитических решений для полевых переменных используется метод преобразования Лапласа. Обратное преобразование Лапласа осуществлено численно на основе алгоритма Закиана. Особое внимание уделено изучению влияния теплового нелокального параметра на распределения полевых переменных и скорость движущегося источника тепла. В [29] нелокальная модель применяется для исследования переходного термовязкоупругого отклика наноструктурных материалов. Исследуется влияние нелокальности на переходный отклик в вязкоупругой пластине конечной толщины при внезапном тепловом ударе. Результаты показали, что нелокальная модель предсказывает более высокую скорость распространения тепла. Кроме того, нелокальный анализ предсказывает более высокие пиковые значения термических напряжений. В [30] исследовано влияние нелинейности фон Кармана на значения частоты, термоупругого затухания и добротности МЭМС/НЭМС резонаторов балок Тимошенко на основе модифицированной теории моментных напряжений. В [31] представлена математическая модель гибких физически нелинейных микрооболочек, учитывающая связь температурных и деформационных полей. Геометрическая нелинейность вводится с помощью теории оболочек фон Кармана, а оболочки предполагаются неглубокими. Используется гипотеза Кирхгофа — Лява, а связь полей регулируется вариационным принципом Био. Полученные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью как метода конечных разностей второго порядка, так и метода Фаэдо — Галеркина. В ста-

тье [32] исследованы связанные краевые задачи термоупругости многослойной ортотропной термоупругой оболочки.

В последнее время в прогнозировании термомеханического поведения микро- и наноструктур появились новые численные методы, такие как машинное обучение на основе искусственных нейронных сетей [33–36]. Нейросети представляют собой математические модели, которые могут быть воплощены как программные или аппаратные системы. С точки зрения реализации нейросети представляют собой систему простых процессоров, искусственных нейронов, взаимодействующих и соединенных между собой. Отличительной особенностью нейросетей является их способность к обучению, в отличие от традиционных алгоритмов, которые подразумевают программирование. Успешное обучение позволяет сети давать верные результаты на основе данных, которые не входили в обучающую выборку, а также справляться с неполными и шумными данными, даже если они частично искажены.

Для точных термомеханических расчетов микроразмерных тел необходимо знать значения масштабных параметров. В настоящий момент предложены как теоретические, так и экспериментальные методы нахождения масштабных параметров [37–42]. Так, испытания микроразмерных балок на изгиб часто позиционируются, как один из основных экспериментальных методов определения масштабных параметров [37, 38]. В [42] масштабные параметры были определены теоретически на основе известных параметров потенциалов межатомного взаимодействия.

Ранее предложенные подходы для исследования термонапряженного состояния микроразмерных тел обладают некоторыми недостатками. Так, применение методов молекулярной динамики [7] приводит к большим вычислительным затратам. В то же время градиентные модели, предложенные в [8], содержат большое число дополнительных по сравнению с классической теорией параметров. В настоящий момент невозможно одновременно определить такое число параметров. Кроме того, ранее рассмотренные задачи касались либо однородных тел, либо композитов с микроструктурной неоднородностью. Для исследования последних применялась теория с гипертемпературными эффектами [9–13]. Такая теория очень сложна для инженерных расчетов. В [23–25] предложены упрощенные инженерные модели термоупругости для составных микроразмерных тел с механическим масштабным параметром. Однако в этих работах уравнение теплопроводности рассматривалось в классической постановке. Это приводило к большим расхождениям расчетов и экспериментальных данных, так как не учитывались тепловые масштабные эффекты. Кроме того, ограничивались только статическим состоянием. Для более адекватных термомеханических расчетов микроразмерных тел достаточно знать значения двух масштабных параметров — механического и теплового и рассматривать нестационарную постановку. Это и предлагается сделать в данной работе.

Целями данной работы являются: постановка задачи нестационарной термоупругости для составного микростержня с учетом влияния не только механического, но и теплового градиентного параметров; получение численно-аналитического и асимптотического решения поставленной задачи; исследование влияния масштабных параметров на нестационарное распределение температуры и смещений; определение границы применимости асимптотического подхода.

Вкладом этой работы является исследование комбинированного влияния теплового и механического градиентных параметров в условиях нестационарной термоупругости составного микростержня, что ранее не учитывалось в статических постановках. Определение границы асимптотического подхода позволит более точно моделировать поведение реальных микроразмерных конструкций, что критически важно для проектирования

термоэлектрических устройств.

2. Определяющие соотношения нестационарной градиентной термоупругости

Рассмотрим термоупругое микроразмерное тело, занимающее объем V и находящееся под действием нестационарной тепловой нагрузки. Ограничимся несвязанной моделью термоупругости.

Тогда для задачи теплопроводности введем выражения для обобщенной плотности внутренней энергии u и полной энтропии η по формулам [11, 13]:

$$U_V = \frac{1}{2} k_{ij} \theta_{,i} \theta_{,j} + \frac{1}{2} \alpha_{ijkl} \theta_{,ik} \theta_{,jl}, \quad \eta = c_\varepsilon \theta + C_{ij} \theta_{,ij}, \quad (1)$$

Выражение для обобщенной плотности свободной энергии w имеет вид [13]:

$$w = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} A_{ijklmn} \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{lm,n} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} \theta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} G_{ijkl} \theta_{,kl} \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

Здесь введены обозначения компонентов тензоров: k_{ij} и α_{ijkl} — теплопроводности второго и четвертого порядка соответственно; c_ε , C_{ij} — удельной теплоемкости нулевого и второго порядка соответственно; c_{ijkl} и A_{ijklmn} — упругих модулей четвертого и шестого порядка соответственно; γ_{ij} и G_{ijkl} — коэффициента температурных напряжений второго и четвертого порядка соответственно.

Введем обозначения для определяющих соотношений в виде компонент следующих тензоров:

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial U_V}{\partial \theta_{,i}} = k_{ij} \theta_{,j} \text{ — плотности теплового потока;} \\ \mu_{ik} &= \frac{\partial U_V}{\partial \theta_{,ik}} = \alpha_{ijkl} \theta_{,jl} \text{ — градиента теплового потока;} \\ Q_i &= q_i - \mu_{ik,k} = k_{ij} \theta_{,j} - (\alpha_{ijkl} \theta_{,jl})_{,k} \text{ — плотности полного теплового потока;} \\ \tau_{ij} &= \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \gamma_{ij} \theta - G_{ijkl} \theta_{,kl} \text{ — напряжений Коши;} \\ m_{ijk} &= \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,k}} = A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n} \text{ — моментных напряжений;} \\ \sigma_{ij} &= \tau_{ij} - m_{ijk,k} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - (A_{ijklmn} \varepsilon_{lm,n})_{,k} - \gamma_{ij} \theta - G_{ijkl} \theta_{,kl} \text{ — полных напряжений.} \end{aligned}$$

Для упрощения расчетов введем два масштабных параметра — тепловой l_T и механический l_M . Примем, что материальные константы высокого порядка пропорциональны классическим, где коэффициентами пропорциональности являются введенные масштабные параметры. Тогда соотношения между термомеханическими характеристиками классической термоупругости и модулями более высокого порядка примут вид:

$$\alpha_{ijkl} = -l_T^2 \delta_{lk} k_{ij}, \quad G_{ijkl} = -l_T^2 \delta_{kl} \gamma_{ij}, \quad A_{ijklmn} = -l_M^2 \delta_{nm} c_{ijkl}, \quad C_{ij} = -c_\varepsilon l_M^2 \delta_{ij}, \quad (3)$$

где δ_{lk} — символ Кронекера.

Исходя из соотношений (3), выражения для полного теплового потока, полной энтропии и полных напряжений соответственно примут вид

$$\begin{aligned} Q_i &= k_{ij} \theta_{,j} - l_T^2 (k_{ij} \theta_{,j})_{,mm}, \quad \eta = c_\varepsilon \theta - l_M^2 (c_\varepsilon \theta)_{,mm}, \\ \sigma_{ij} &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - l_M^2 (c_{ijkl} \varepsilon_{kl})_{,mm} - \gamma_{ij} \theta + l_T^2 (\gamma_{ij} \theta)_{,mm}. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Постановка задачи для составного стержня

Рассмотрим задачу нестационарной градиентной термоупругости для составного микростержня длины L (x_0 — точка сопряжения), закрепленный торец которого $x = 0$ поддерживается при заданной температуре, а на свободном торце $x = L$ действует тепловой поток $q_0\phi(t)$.

Тогда с учетом одномерности и изотропии материала имеем:

$$u_1 = u(x, t), \quad u_2 = u_3 = 0, \quad \theta = \theta(x, t), \quad Q_1 = Q(x, t), \quad \sigma_{11} = \sigma(x, t).$$

В случае $l_M = l_T = l$ получим выражения для ненулевых компонент:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= -l^2 k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad m_{111} = -l^2 E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \sigma = E \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta, \\ Q &= k \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \eta = c_\varepsilon \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \theta. \end{aligned}$$

Здесь E — модуль Юнга.

В случае малости параметра связанности механическое поле практически не влияет на тепловое поле. Поэтому задачу градиентной термоупругости можно разделить на:

а) задачу градиентной теплопроводности

$$\frac{\partial Q^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial \eta^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$\theta^{(1)}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad Q^{(2)}(L, t) = q_0\phi(t), \quad \mu_{11}^{(2)}(L, t) = 0, \quad (6)$$

$$\theta^{(1)}(x_0, t) = \theta^{(2)}(x_0, t), \quad \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x}(x_0, t) = \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x}(x_0, t), \quad (7)$$

$$\mu_{11}^{(1)}(x_0, t) = \mu_{11}^{(2)}(x_0, t), \quad Q^{(1)}(x_0, t) = Q^{(2)}(x_0, t),$$

$$\theta^{(i)}(x, 0) = \frac{\partial^2 \theta^{(i)}}{\partial x^2}(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (8)$$

б) задачу градиентной теории упругости

$$\frac{\partial \sigma^{(i)}}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$u^{(1)}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \sigma^{(2)}(L, t) = 0, \quad m_{111}^{(2)}(L, t) = 0, \quad (10)$$

$$u^{(1)}(x_0, t) = u^{(2)}(x_0, t), \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}(x_0, t) = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x}(x_0, t), \quad (11)$$

$$\sigma^{(1)}(x_0, t) = \sigma^{(2)}(x_0, t), \quad m_{111}^{(1)}(x_0, t) = m_{111}^{(2)}(x_0, t),$$

$$u^{(i)}(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Следует учесть, что для обеспечения единственности решения уравнений (5), (9) были заданы дополнительные граничные условия и условия сопряжения. В качестве дополнительных граничных условий согласно [25] приняты условия для градиентов температуры и смещения, а также градиента теплового потока μ_{11} и моментного напряжения m_{111} .

Обезразмерим задачи (5)–(8), (9)–(12) согласно формулам:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x}{L}, \quad z_0 = \frac{x_0}{L}, \quad \alpha = \frac{l}{L}, \quad U^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{L}, \quad W^{(i)} = \frac{k_0 \theta^{(i)}}{q_0 L}, \quad \Omega^{(i)} = \frac{\sigma^{(i)}}{E_0}, \\ \bar{m}^{(i)} &= \frac{m_{111}^{(i)}}{E_0 L}, \quad \bar{\mu}^{(i)} = \frac{\mu_{11}^{(i)}}{q_0 L}, \quad \tau = \frac{k_0 t}{c_0 L^2}, \quad \phi(\tau) = \frac{Q}{q_0}, \quad \bar{k}^{(i)} = \frac{k^{(i)}}{k_0}, \\ \bar{E}^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{E_0}, \quad \bar{c}^{(i)} = \frac{c^{(i)}}{c_0}, \quad \bar{\rho}^{(i)} = \frac{\rho^{(i)}}{\rho_0}, \quad \bar{\gamma}^{(i)} = \frac{\gamma^{(i)}}{\gamma_0}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь $E_0, \rho_0, k_0, c_0, \gamma_0$ — некоторые характерные значения термомеханических характеристик.

Обезразмеренная постановка задачи (5)–(8) в терминах температуры примет вид

$$\left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\bar{k}^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial z^2} - \bar{c}^{(i)} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial \tau}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} W^{(1)}(0, \tau) &= 0, \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial z^2}(1, \tau) = 0, \\ \bar{k}^{(2)} \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial W^{(2)}}{\partial z}(1, \tau) &= \phi(\tau), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} W^{(1)}(z_0, \tau) &= W^{(2)}(z_0, \tau), \quad \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}(z_0, \tau) = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial z}(z_0, \tau), \\ \bar{k}^{(1)} \frac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial z^2}(z_0, \tau) &= \bar{k}^{(2)} \frac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial z^2}(z_0, \tau), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{k}^{(1)} \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}(z_0, \tau) &= \bar{k}^{(2)} \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial W^{(2)}}{\partial z}(z_0, \tau), \\ W^{(i)}(z, 0) &= \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial z^2}(z, 0) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Обезразмеренная постановка задачи (9)–(12) в терминах смещений примет вид

$$\left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\bar{E}^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial z^2} - \bar{\gamma}^{(i)} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial z}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} U^{(1)}(0, \tau) &= 0, \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z}(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z^2}(1, \tau) = 0, \\ \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\bar{E}^{(2)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}(1, \tau) - \bar{\gamma}^{(2)} W^{(2)}(1, \tau)\right) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} U^{(1)}(z_0, \tau) &= U^{(2)}(z_0, \tau), \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z}(z_0, \tau) = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}(z_0, \tau), \\ \bar{E}^{(1)} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial z^2}(z_0, \tau) &= \bar{E}^{(2)} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z^2}(z_0, \tau), \\ \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\bar{E}^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z}(z_0, \tau) - \bar{\gamma}^{(1)} W^{(1)}(z_0, \tau)\right) &= \\ = \left(1 - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\bar{E}^{(2)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}(z_0, \tau) - \bar{\gamma}^{(2)} W^{(2)}(z_0, \tau)\right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$U^{(i)}(z, 0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

4. Решение задачи

Получим численно-аналитические и асимптотические решения задач (13)–(16) и (17)–(20).

Для сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям применим к функциям, входящим в (13)–(15) и (17)–(19) с учетом однородных начальных условий (16), (20), преобразование Лапласа по формуле:

$$\tilde{F}(z, p) = \int_0^\infty F(z, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad (21)$$

где p — параметр преобразования Лапласа.

Тогда задача теплопроводности в трансформантах будет иметь вид:

$$(1 - \alpha^2 L_{gr}) L_{cl} \tilde{W}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$\tilde{W}^{(1)}(0, p) = 0, \quad \frac{d\tilde{W}^{(1)}}{dz}(0, p) = 0, \quad L_{gr} \tilde{W}^{(1)}(1, p) = 0, \quad (23)$$

$$\bar{k}^{(2)} (1 - \alpha^2 L_{gr}) \frac{d\tilde{W}^{(2)}}{dz}(1, p) = \tilde{\phi}(p),$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{(1)}(z_0, p) &= \tilde{W}^{(2)}(z_0, p), \quad \frac{d\tilde{W}^{(1)}}{dz}(z_0, p) = \frac{d\tilde{W}^{(2)}}{dz}(z_0, p), \\ \bar{k}^{(1)} L_{gr} \tilde{W}^{(1)}(z_0, p) &= \bar{k}^{(2)} L_{gr} \tilde{W}^{(2)}(z_0, p), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{k}^{(1)} (1 - \alpha^2 L_{gr}) \frac{d\tilde{W}^{(1)}}{dz}(z_0, p) = \bar{k}^{(2)} (1 - \alpha^2 L_{gr}) \frac{d\tilde{W}^{(2)}}{dz}(z_0, p).$$

Здесь $L_{cl} = -\frac{d^2}{dz^2} + p\bar{c}_k$ — оператор, отвечающий классической постановке; $L_{gr} = \frac{d^2}{dz^2}$ — оператор, отвечающий за градиентные эффекты.

Корни характеристических уравнений, соответствующих (22) имеют вид:

$$1) \lambda_{1,2}^{(i)} = \pm \sqrt{p \frac{\bar{c}^{(i)}}{\bar{k}^{(i)}}}; \quad 2) \lambda_{3,4}^{(i)} = \pm \frac{1}{\alpha}.$$

Поэтому решение (22) можно представить в виде:

$$\tilde{W}^{(1)}(z, p) = \sum_{r=1}^n C_r \tilde{Y}_r(z, p), \quad \tilde{W}^{(2)}(z, p) = \sum_{r=1}^n C_{r+n} \tilde{Y}_{r+n}(z, p), \quad n = 4, \quad (25)$$

где $\tilde{Y}_1(z, p) = e^{\lambda_1^{(1)} z}$, $\tilde{Y}_2(z, p) = e^{\lambda_2^{(1)} z}$, $Y_3(z) = Y_7(z) = e^{\lambda_3^{(1)} z}$, $Y_4(z) = Y_8(z) = e^{\lambda_4^{(2)} z}$, $\tilde{Y}_5(z, p) = e^{\lambda_1^{(2)} z}$, $Y_6(z, p) = e^{\lambda_2^{(2)} z}$.

Константы $C_1, \dots, C_8$, входящие в выражения (25), находятся в системе Maple при подстановке в граничные условия (23) и условий сопряжения (24).

Для малых значений параметра α можно получить асимптотическое решение задачи (22)–(24), используя метод Вишика — Люстерника, аналогично как в [22, 23].

Для этого введем растягивающие переменные: $\xi_1 = \frac{z}{\alpha}$, $\xi_2 = \frac{z-z_0}{\alpha}$, $\xi_3 = \frac{z-1}{\alpha}$. Представим трансформанту температуры каждого стержня в виде суммы решения задачи в классической постановке $\widetilde{W}_{\text{clas}}^{(i)}(z, p)$, $i = 1, 2, \dots$, и двух погранслоиных слагаемых:

$$\begin{aligned}\widetilde{W}^{(1)}(z, p) &\cong \widetilde{W}_{\text{clas}}^{(1)}(z, p) + \Pi_1(\xi_1) + \Pi_2(\xi_2), \\ \widetilde{W}^{(2)}(z, p) &\cong \widetilde{W}_{\text{clas}}^{(2)}(z, p) + \Pi_3(\xi_2) + \Pi_4(\xi_3),\end{aligned}\quad (26)$$

Погранслоиные функции должны удовлетворять уравнениям:

$$(1 - L_{gr})\Pi_r = 0, \quad r = 1, \dots, 4. \quad (27)$$

Кроме того, функции $\Pi_1(\xi_1)$ и $\Pi_4(\xi_3)$ должны быстро затухать по мере удаления от торцов $z = 0$ и $z = 1$ соответственно, а функции $\Pi_2(\xi_2)$ и $\Pi_3(\xi_2)$ — от точки сопряжения стержней. Исходя (27) и физического смысла, погранслоиные функции имеют вид:

$$\Pi_1(z, \alpha) = B_1 e^{-\xi_1}, \quad \Pi_2(z, \alpha) = B_2 e^{\xi_2}, \quad \Pi_3(z, \alpha) = B_3 e^{-\xi_2}, \quad \Pi_4(z, \alpha) = B_4 e^{\xi_3}.$$

Константы $B_1, \dots, B_4$ определяются последовательно. Константа B_1 находится из неклассического граничного условия $\frac{d\widetilde{W}^{(1)}}{dz}(0, p) = 0$, B_4 — из условия $\bar{k}^{(2)}(1 - \alpha^2 L_{gr}) \frac{d\widetilde{W}^{(2)}}{dz}(1, p) = \bar{\phi}(p)$, B_2 и B_3 — из условий сопряжения (15) и имеют довольно громоздкий вид.

После нахождения поля температур в трансформантах $\widetilde{W}^{(i)}(z, p)$, $i = 1, 2, \dots$, перейдем к нахождению поля трансформант смещений из решения задачи градиентной теории упругости с фиктивными силами

$$\widetilde{R}^{(i)}(z, p) = (1 - \alpha^2 L_{gr}^M) \frac{\bar{\gamma}^{(i)}}{\bar{E}^{(i)}} \frac{d\widetilde{W}^{(i)}}{dz}, \quad \widetilde{G}^{(i)}(z, p) = (1 - \alpha^2 L_{gr}^M) \frac{\bar{\gamma}^{(i)}}{\bar{E}^{(i)}} \widetilde{W}^{(i)}$$

в виде

$$(1 - \alpha^2 L_{gr}^M) L_{cl}^M \widetilde{U}^{(i)} = \widetilde{R}^{(i)}(z, p), \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

$$\widetilde{U}^{(1)}(0, p) = 0, \quad \frac{d\widetilde{U}^{(1)}}{dz}(0, p) = 0, \quad L_{gr}^M \widetilde{U}^{(2)}(1, p) = 0, \quad (29)$$

$$(1 - \alpha^2 L_{gr}^M) \frac{d\widetilde{U}^{(2)}}{dz}(1, p) = \widetilde{G}^{(2)}(1, p),$$

$$\widetilde{U}^{(1)}(z_0, p) = \widetilde{U}^{(2)}(z_0, p), \quad \frac{d\widetilde{U}^{(2)}}{dz}(z_0, p) = \frac{d\widetilde{U}^{(1)}}{dz}(z_0, p),$$

$$L_{gr}^M \widetilde{U}^{(2)}(z_0, p) = \frac{\bar{E}^{(2)}}{\bar{E}^{(1)}} L_{gr}^M \widetilde{U}^{(2)}(z_0, p), \quad (30)$$

$$(1 - \alpha^2 L_{gr}^M) \frac{d\widetilde{U}^{(1)}}{dz}(z_0, p) - \widetilde{G}^{(1)}(z_0, p)$$

$$= \frac{\bar{E}^{(2)}}{\bar{E}^{(1)}} \left((1 - \alpha^2 L_{gr}^M) \frac{d\widetilde{U}^{(2)}}{dz}(z_0, p) - \widetilde{G}^{(2)}(z_0, p) \right).$$

Здесь $L_{cl}^M = L_{gr}^M = \frac{d^2}{dz^2}$.

Для решения неоднородных дифференциальных уравнений (28) применим метод вариации произвольных постоянных, представив трансформанты смещений в виде:

$$\widetilde{U}^{(1)}(z, p) = \sum_{r=1}^n \widetilde{S}_r(z, p) y_r(z), \quad \widetilde{U}^{(2)}(z, p) = \sum_{r=1}^n \widetilde{S}_{r+n}(z, p) y_{r+n}(z), \quad n = 4, \quad (31)$$

где $y_1(z) = y_5(z) = 1$, $y_2(z) = y_6(z) = z$, $y_3(z) = y_7(z) = e^{\frac{z}{\alpha}}$, $y_4(z) = y_8(z) = e^{-\frac{z}{\alpha}}$ — решения однородных уравнений (28).

Производные $\tilde{S}'_r(z, p)$ находят путем решения системы алгебраических уравнений

$$\sum_{r=1}^n \tilde{S}'_r(z, p) y_r^{(m)}(z) = \tilde{R}(z, p) \delta_{n-1, m}, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (32)$$

Интегрируя найденные $\tilde{S}'_r(z, p)$ с учетом граничных условий (29) и условий сопряжения (30), получим функции $\tilde{S}_r(z, p)$ и общее решение уравнений (28).

После нахождения трансформант температуры и смещения для нахождения оригиналов функций необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа. Однако из-за сложности структуры трансформант для нахождения оригиналов можно использовать только численные методы [43, 44]. В работе нахождения оригиналов в произвольной точке z осуществляется на основе обобщенного метода Дурбина [43]. Этот метод обладает высокой точностью для короткого временного интервала.

5. Результаты вычислений

Рассмотрим результаты вычисления термонапряженного состояния составного стержня с учетом масштабных эффектов. В расчетах полагалось:

$$z_0 = 0.5, \quad \bar{k}_1 = 1, \quad \bar{k}_2 = 0.35, \quad \bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 1, \\ \bar{E}_1 = 0.4, \quad \bar{E}_2 = 1, \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0.1, \quad \phi(\tau) = H(\tau).$$

Здесь $H(\tau)$ — функция Хэвисайда.

Выяснено, что учет масштабного параметра приводит к: 1) увеличению температуры на малых временах; 2) уменьшению смещений; 3) более плавному распределению температуры и смещения в окрестности точки сопряжения; 4) погрешность асимптотических формул (26) не превышает 1% при $\alpha \leq 0.06$.

На рис. 1, 2 изображены результаты вычислений, где сплошная линия — классическое решение ($\alpha = 0$), точки — градиентное решение при $\alpha = 0.2$.

Рис. 1 показывает зависимость от времени τ безразмерных функций: а) температуры W ; б) смещения U составного стержня в точке $z = 0.8$.

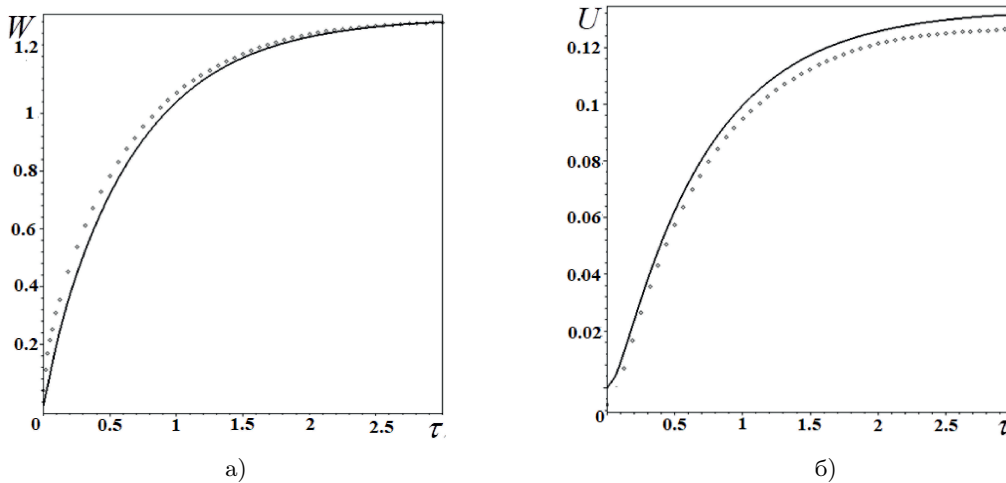


Рис. 1. Зависимость от времени: а) температуры; б) смещения составного стержня в точке $z = 0.8$.

На рис. 2 представлено распределение по координате z безразмерных функций: а) температуры; б) смещения в момент времени $\tau = 0.64$.

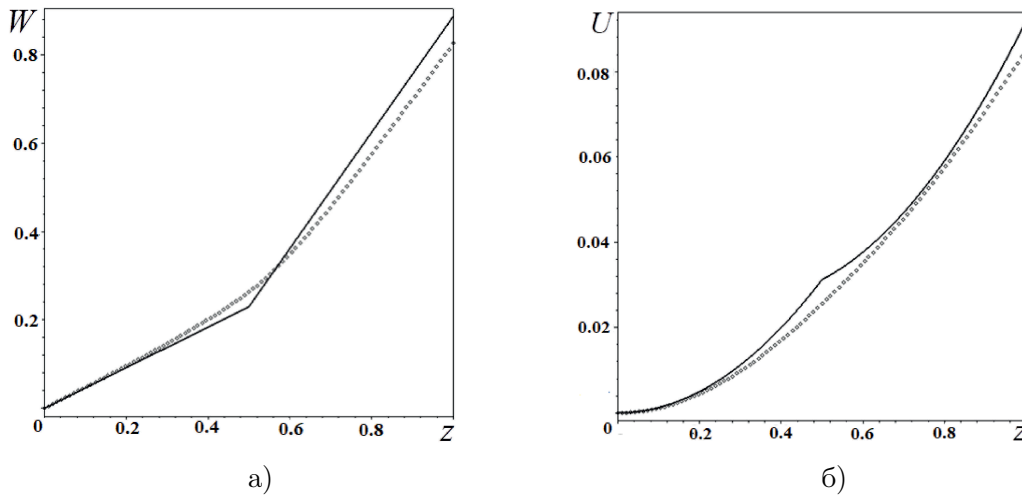


Рис. 2. Распределение по z : а) температуры; б) смещения составного стержня в момент времени $\tau = 0.64$.

6. Заключение

Представлена новая модель градиентной термоупругости в квазистатической постановке. Данная модель учитывает совместное влияние теплового и механического масштабных параметров для составного тела. В этой постановке уравнения теплопроводности и равновесия имеют более высокий порядок по сравнению с классической теорией.

В случае слабой связанности задача термоупругости сведена к последовательному решению более простых задач — теплопроводности и теории упругости. Построены численно-аналитическое и асимптотическое решения задач. Численно-аналитические решения задач основаны на применении интегрального преобразования Лапласа, аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений и модифицированного метода Дурбина. Для нахождения асимптотического решения применена модификация метода Вишика — Люстерника. Исследована точность асимптотических формул путем сравнения с численно-аналитическим решением. Выяснено, что погрешность асимптотических формул не превышает 1% при $\alpha \leq 0.06$.

Представлены результаты вычислений температуры и смещений. Обнаружены следующие эффекты, связанные с учетом масштабных параметров: 1) уменьшение смещений и их более плавное изменение в окрестности точки сопряжения; 2) увеличение температуры для малых времен и более плавное изменение температуры в окрестности точки сопряжения. Второй эффект описан впервые.

Полученные результаты позволят более адекватно моделировать поведение микро-размерных составных термонапряженных конструкций, в том числе микробалки и микроцилиндра. Данное обстоятельство имеет большое значение для проектирования термоэлектрических устройств.

Выявлены следующие ограничения модели: 1) слабая связанность тепловых и механических полей; 2) одномерность задачи; 3) масштабный параметр должен являться малым параметром. Однако преимуществом подхода является учет двух параметров — теплового и механического в нестационарной постановке.

Литература

1. *Roncaglia A., Ferri M.* Thermoelectric materials in MEMS and NEMS: A review // *Sci. Adv. Mater.*—2008.—Vol. 3, № 3.—P. 401–419. DOI: 10.1166/sam.2011.1168.
2. *Mbarek S. B., Alcheikh N., Yonis M. I.* Recent advances on MEMS based Infrared Thermopile detectors // *Microsyst. Technol.*—2022.— Vol. 28, № 8.—P. 1751–1764. DOI: 10.1007/s00542-022-05306-8.
3. *Ganwani M. M., Shaikh B., Sinha S.* Design and Investigation of MEMS-Based Thermopile Detector Arrays for Infrared Sensing Applications // *2024 IEEE Applied Sensing Conference (APSCON 2024).*—2024.—P. 193–196. DOI: 10.1109/APSCON60364.2024.1046607.
4. *Dhar A.* Heat transport in low-dimensional systems // *Adv. Phys.*—2008.—Vol. 57, № 5.—P. 457–537. DOI: 10.1080/00018730802538522.
5. *Zhang G., Li B. W.* Impacts of doping on thermal and thermoelectric properties of nanomaterials // *Nanoscale.*—2010.—Vol. 2, № 7.—P. 1058–1068. DOI: 10.1039/C0NR00095G.
6. *Stewart D. A., Norris P. M.* Size effects on the thermal conductivity of thin metallic wires: microscale implications // *Microscale Thermophys. Eng.*—2000.—Vol. 4, № 2.—P. 89–101. DOI: 10.1080/108939500404007.
7. *Koh S. J. A., Lee H. P.* Molecular dynamics simulation of size and strain rate dependent mechanical response of FCC metallic nanowires // *Nanotechnology.*—2006.—Vol. 17, № 14.—P. 3451–3467. DOI: 10.1088/0957-4484/17/14/018.
8. *Ahmadi G., Firoozbakhsh K.* First strain gradient theory of thermoelasticity // *Int. J. Solids Struct.*—1975.—Vol. 11, № 3.—P. 339–345. DOI: 10.1016/0020-7683(75)90073-6.
9. *Forest S., Amestoy M.* Hypertemperature in thermoelastic solids // *C. R. Mecanique.*—2008.—Vol. 336, № 4.—P. 347–353. DOI: DOI: 10.1016/j.crme.2008.01.007.
10. *Forest S., Aifantis E. C.* Some links between recent gradient thermo-elasto-plasticity theories and the thermomechanics of generalized continua // *Int. J. Solids Struct.*—2010.—Vol. 47, № 25–26.—P. 3367–3376. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.009.
11. *Alnefaie K.* A note on gradient thermoelasticity // *J. Mech. Behav. Mater.*—2014.—Vol. 23, № 3–4.—P. 107–108. DOI: 10.1515/jmbm-2014-0013.
12. *Nika G., Muntean A.* Hypertemperature effects in heterogeneous media and thermal flux at small-length scales // *Netw. Heterog. Media.*—2023.—Vol. 18, № 3.—P. 1207–1225. DOI: 10.3934/nhm.2023052.
13. *Iesan D., Quintanilla R.* A second gradient theory of thermoelasticity // *J. Elasticity.*—2023.—Vol. 154.—P. 629–643. DOI: 10.1007/s10659-023-10020-1.
14. *Bazarra N., Fernandez J. R., Quintanilla R. A.* A strain gradient problem with a fourth-order thermal law // *J. Comput. Appl. Math.*—2024.—Vol. 445.—Art. 115818.—DOI: 10.1016/j.cam.2024.115818.
15. *Dong Y., Cao B. Y., Guo Z. Y.* Size dependent thermal conductivity of Si nanosystems based on phonon gas dynamics // *Physica E Low Dimens. Syst. Nanostruct.*—2014.—Vol. 56.—P. 256–262. DOI: 10.1016/j.physe.2013.10.006.
16. *Лурье С. А., Фам Т., Соляев Ю. О.* Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // *Мех. композиц. материалов и конструкций.*—2012.—Т. 18, № 3.—С. 440–449.
17. *Lurie S. A., Belov P. A., Volkov-Bogorodskii D. B.* Variational models of coupled gradient thermoelasticity and thermal conductivity // *Mater. Phys. Mech.*—2019.—Vol. 42, № 5.—P. 564–581. DOI: 10.18720/MPM.4252019_10.
18. *Lurie S. A., Volkov-Bogorodskii D. B., Belov P. A.* Analytical solution of stationary coupled thermoelasticity problem for inhomogeneous structures // *Mathematics.*—2022.—Vol. 10, № 1.—Art. 90.—DOI: 10.3390/math10010090.
19. *Волков-Богородский Д. Б., Лурье С. А.* Общие решения связанных задач нестационарной термоупругости и теплообмена в неоднородных средах // *Композиты и наноструктуры.*—2024.—Т. 16, № 2.—С. 135–149. DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-2-135-149.
20. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *Успехи мат. наук.*—1957.—Т. 12, № 5 (77).—С. 3–122.
21. *Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б.* Асимптотические методы в механике твердого тела.—Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007.—360 с.
22. *Нестеров С. А.* Градиентная модель свободных продольных колебаний упругого стержня // *Наука Юга России.*—2025.—Т. 21, № 1.—С. 15–23. DOI: 10.7868/S25000640250103.
23. *Vatulyan A. O., Nesterov S. A.* On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // *Mater. Phys. Mech.*—2020.—Vol. 46, № 1.—P. 27–41. DOI: 10.18149/MPM.4612020_3.

24. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Решение задачи градиентной термоупругости для полосы с покрытием // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2021.—Т. 163, № 2.—С. 181–196. DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.
25. Vatulyan A. O., Nesterov S. A., Yavruyan O. V. The Models of gradient mechanics and singularly perturbed boundary value problems // Lobachevskii J. Math.—2023.—Vol. 44.—P. 3604–3612. DOI: 10.1134/S1995080223080565.
26. Sladek J., Sladek V., Repka M. The heat conduction in nanosized structures // Fiz. Mezomekh.—2021.—Vol. 24, № 5.—P. 122–129. DOI: 10.24412/1683-805X-2021-5-122-129.
27. Zenkour A. M., Abouelregal A. E., Alnefaie K. A., Zhang X., Aifantis E. C. Nonlocal thermoelasticity theory for thermal-shock nanobeams with temperature-dependent thermal conductivity // J. Therm. Stresses.—2015.—Vol. 38, № 9.—P. 1049–1067. DOI: 10.1080/01495739.2015.1038490.
28. Sarkar N. Thermoelastic responses of a finite rod due to nonlocal heat conduction // Acta Mech.—2020.—Vol. 231.—P. 947–955. DOI: 10.1007/s00707-019-02583-9.
29. Yang W. Z., Chen Z. T. Nonlocal dual-phase-lag heat conduction and the associated nonlocal thermal-viscoelastic analysis // Int. J. Heat Mass Transf.—2020.—Vol. 156.—Art. 119752. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119752.
30. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Pavlov S. P., Zhigalov M. V., Kalutsky L. A., Krysko A. V. Thermoelastic vibrations of a Timoshenko microbeam based on the modified couple stress theory // Nonlinear Dyn.—2020.—Vol. 99.—P. 919–943. DOI: 10.1007/s11071-019-04976-w.
31. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Sopenk A. A., Zhigalov M. V., Kirichenko A. V., Krysko A. V. Mathematical modelling of physically/geometrically non-linear micro-shells with account of coupling of temperature and deformation fields // Chaos Solit. Fractals.—2017.—Vol. 104.—P. 635–654. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.008.
32. Kirichenko V. F., Awrejcewicz J., Kirichenko A. V., Krysko A. V., Krysko V. A. On the non-classical mathematical models of coupled problems of thermo-elasticity for multi-layer shallow shells with initial imperfections // Int. J. Non-Linear Mech.—2015.—Vol. 74.—P. 51–72. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.03.011.
33. Han W., Hua B., Xiulin R. Perspective: Predicting and optimizing thermal transport properties with machine learning methods // Energy AI.—2022.—Vol. 8, № 12.—Art. 100153.—DOI: 10.1016/j.egyai.2022.100153.
34. Zobeiry N., Humfeld K. D. A physics-informed machine learning approach for solving heat transfer equation in advanced manufacturing and engineering applications // Eng. Appl. Artif. Intell.—2021.—Vol. 101.—Art. 104232.—DOI: 10.1016/j.engappai.2021.104232.
35. Schneider T., Bedrikow A. B., Stahl K. Enhanced prediction of thermomechanical systems using machine learning, PCA, and finite element simulation // Adv. Model. Simul. Eng. Sci.—2024.—Vol. 11.—Art. 14. DOI: 10.1186/s40323-024-00268-0.
36. Shotaro S. F. Thermodynamics and feature extraction by machine learning // Phys. Rev. Research.—2020.—Vol. 2, № 3. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.033415.
37. Li Z., He Y., Lei J., Guo S., Liu D., Wang L. A standard experimental method for determining the material length scale based on modified couple stress theory // Int. J. Mech. Sci.—2018.—Vol. 141.—P. 198–205. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.03.035.
38. Li Z., He Y., Zhang B., Lei J., Guo S., Liu D. Experimental investigation and theoretical modelling on nonlinear dynamics of cantilevered microbeams // Eur. J. Mech. A Solids.—2019.—Vol. 78.—Art. 103834. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103834.
39. Feher A., Lukacs N., Somlai L., Fodor T., Szucs M., Fulop T., Van P., Kovacs R. Size effects and beyond-Fourier heat conduction in room-temperature experiments // J. Non-Equilib. Thermodyn.—2021.—Vol. 46, № 4.—P. 403–411. DOI: 10.1515/jnet-2021-0033.
40. Lam D. C. C., Yang F., Chong A. C. M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity // J. Mech. Phys. Solids.—2003.—Vol. 51, № 8.—P. 1477–1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.
41. Liebold C., Muller W. H. Comparison of gradient elasticity models for the bending of micromaterials // Comput. Mater. Sci.—2003.—Vol. 116.—P. 52–61. DOI: 10.1016/j.commatsci.2015.10.031.
42. Gusev A. A., Lurie S. A. Strain-gradient elasticity for bridging continuum and atomistic estimates of stiffness of binary Lennard-Jones crystals // Adv. Eng. Mater.—2010.—Vol. 12, № 6.—P. 529–533. DOI: 10.1002/adem.201000004.

43. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate // *Int. J. Solids Struct.*—2004.—Vol. 41, № 3.—P. 3653–3674. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.01.006.
44. Вестяк В. А., Федотенков Г. В. Алгоритм численного обращения преобразования Лапласа в классе обобщенных функций, образующих алгебру со сверткой // *Прикл. матем. и матем. физ.*—2015.—Т. 1, № 1.—С. 67–76. DOI: 10.18262/ammpr.2015.0101-05.

Статья поступила 9 января 2025 г.

НЕСТЕРОВ СЕРГЕЙ АНАТОЛЬЕВИЧ
Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: 1079@list.ru
<https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>

Vladikavkaz Mathematical Journal
2026, Volume 28, Issue 3, P. 91–107

GRADIENT MODEL OF NON-STATIONARY THERMOELASTICITY FOR A COMPOSITE ROD

Nesterov, S. A. ¹

¹ Southern Mathematical Institute of VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: 1079@list.ru

Abstract. Modeling the behavior of micro-sized rod structures is of great practical importance for the design of thermoelectric devices. Previous studies did not take into account the combined effect of thermal and mechanical scaling parameters on the distribution of temperature and displacements of composite bodies. This led to large discrepancies between calculations and experimental data. We study the problem of refining the non-stationary thermal stress state of a composite micro-rod. One end of the rod is clamped and is at zero temperature, and a non-stationary heat flux is specified at the other end. A generalized (gradient) model of thermoelasticity for a composite micro-rod in a quasi-static formulation is obtained. We introduce a thermal scaling parameter into the defining relations of this model, and take into account second-order temperature gradients in the expression for the heat flux. The formulation of the gradient model includes heat conduction and equilibrium equations of a higher order compared to the classical theory as well as an extended list of boundary conditions. In this work, numerical-analytical and asymptotic solutions are constructed for the problem in the case of weak coupling. The problem is reduced to a sequential solution of the problems of gradient heat conductivity and gradient theory of elasticity in Laplace transforms. The inversion of transforms is carried out on the basis of the modified Durbin method. The solution of the singularly perturbed problem of heat conductivity is constructed using the asymptotic approach. Expressions for the temperature are presented as the sum of the classical solution and boundary layer functions. The following effects, not described earlier, are discovered: 1) with an increase in the scale parameter, the temperature values at small times increase; 2) the temperature changes more smoothly in the vicinity of the conjugation point. The accuracy of the asymptotic formulas is verified by comparing with the numerical-analytical solution. The limits of applicability of the asymptotic formulas are determined. The presented approach will allow more accurate calculations of the strength of composite micro-sized bodies, such as a microbeam and a microcylinder.

Keywords: micro-sized structures, gradient thermoelasticity, non-stationary problem, composite rod, scale effect, asymptotics, Vishik-Lyusternik method, couple stresses, total stresses, total heat flux.

AMS Subject Classification: 74B05.

For citation: Nesterov, S. A. Gradient Model of Non-Stationary Thermoelasticity for a Composite Rod, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 3, pp. 91–107 (in Russian). DOI: 10.46698/v0156-6205-6438-1.

References

1. Roncaglia, A. and Ferri, M. Thermoelectric Materials in MEMS and NEMS: A Review, *Science of Advanced Materials*, 2008, vol. 3, no. 3, pp. 401–419. DOI: 10.1166/sam.2011.1168.
2. Mbarek, S. B., Alcheikh, N. and Yonis, M. I. Recent Advances on MEMS Based Infrared Thermopile Detectors, *Microsystem Technologies*, 2022, vol. 28, no. 8, pp. 1751–1764. DOI: 10.1007/s00542-022-05306-8.
3. Ganwani, M. M., Shaikh, B. and Sinha, S. Design and Investigation of MEMS-Based Thermopile Detector Arrays for Infrared Sensing Applications, *2024 IEEE Applied Sensing Conference (APSCON)*, 2024. DOI: 10.1109/APSCON60364.2024.1046607.
4. Dhar, A. Heat Transport in Low-Dimensional Systems, *Advances in Physics*, 2008, vol. 57, no. 5, pp. 457–537. DOI: 10.1080/00018730802538522.
5. Zhang, G. and Li, B. W. Impacts of Doping on Thermal and Thermoelectric Properties of Nanomaterials, *NanoScale*, 2010, vol. 2, no. 7, pp. 1058–1068. DOI: 10.1039/C0NR00095G.
6. Stewart, D. A. and Norris, P. M. Size Effects on the Thermal Conductivity of Thin Metallic Wires: MicroScale Implications, *Microscale Thermophysical Engineering*, 2000, vol. 4, no. 2, pp. 89–101. DOI: 10.1080/108939500404007.
7. Koh, S. J. A. and Lee, H. P. Molecular Dynamics Simulation of Size and Strain Rate Dependent Mechanical Response of FCC Metallic Nanowires, *Nanotechnology*, 2006, vol. 17, pp. 3451–3467. DOI: 10.1088/0957-4484/17/14/018.
8. Ahmadi, G. and Firozbakhsh, K. First Strain Gradient Theory of Thermoelasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 1975, vol. 11, no. 3, pp. 339–345. DOI: 10.1016/0020-7683(75)90073-6.
9. Forest, S. and Amestoy, M. Hypertemperature in Thermoelastic Solids, *Comptes Rendus Mecanique*, 2008, vol. 336, no. 4, pp. 347–353. DOI: 10.1016/j.crme.2008.01.007.
10. Forest, S. and Aifantis, E. C. Some Links Between Recent Gradient Thermo-Elasto-Plasticity Theories and the TherMoMeChaNics of Generalized Continua, *International Journal of Solids and Structures*, 2010, vol. 47, no. 25–26, pp. 3367–3376. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.07.009.
11. Alnefaie, K. A Note on Gradient Thermoelasticity, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 2014, vol. 23, no. 3–4, pp. 107–108. DOI: 10.1515/jmbm-2014-0013.
12. Nika, G. and Muntean, A. Hypertemperature Effects in Heterogeneous Media and Thermal Flux at Small-Length Scales, *Networks and Heterogeneous Media*, 2023, vol. 18, no. 3, pp. 1207–1225. DOI: 10.3934/nhm.2023052.
13. Iesan, D. and Quintanilla, R. A Second Gradient Theory of Thermoelasticity, *Journal of Elasticity*, 2023, vol. 154, pp. 629–643. DOI: 10.1007/s10659-023-10020-1.
14. Bazarra, N., Fernandez, J. R. and Quintanilla, R. A Strain Gradient Problem with a Fourth-Order Thermal Law, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, vol. 445, article no. 115818. DOI: 10.1016/j.cam.2024.115818.
15. Dong, Y., Cao, B. Y. and Guo, Z. Y. Size Dependent Thermal Conductivity of Si Nanosystems Based on Phonon Gas Dynamics, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2014, vol. 56, pp. 256–262. DOI: 10.1016/j.physe.2013.10.006.
16. Lurie, S. A., Pham, T. and Soliaev, J. O. Gradient Model of Thermoelasticity and Its Applications for the Modelling of Thin Layered Structures, *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsiy*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 440–449 (in Russian).
17. Lurie, S. A., Belov, P. A. and Volkov-Bogorodskii, D. B. Variational Models of Coupled Gradient Thermoelasticity and Thermal Conductivity, *Materials Physics and Mechanics*, 2019, vol. 42, no. 5, pp. 564–581. DOI: 10.18720/MPM.4252019_10.
18. Lurie, S. A., Volkov-Bogorodskii, D. B. and Belov, P. A. Analytical Solution of Stationary Coupled Thermoelasticity Problem for Inhomogeneous Structures, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 1, article no. 90. DOI: 10.3390/math10010090.
19. Volkov-Bogorodskii, D. B. and Lurie, S. A. General Solutions for Non-Stationary Coupled Problems of Thermoelasticity and Thermal Conductivity in Inhomogeneous Media, *Kompozity i nanostruktury [Composites and Nanostructures]*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 135–149 (in Russian). DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-2-135-149.
20. Vishik, M. I. and Lyusternik, L. A. Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with Small Parameter, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5 (77), pp. 3–122 (in Russian).
21. Bauer, S. M., Smirnov, A. L., Tovstik, P. E. and Filippov, S. B. *Asimptoticheskie metody v mekhanike tverdogo tela* [Asymptotic Methods in Mechanics of Solids], Moscow, Izhevsk, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2007, 360 p. (in Russian).

22. Nesterov, S. A. Gradient Model of Free Longitudinal Vibrations of an Elastic Rod, *Nauka Yuga Rossii* [Science of the South of Russia], 2025, vol. 21, no. 1, pp. 15–23 (in Russian). DOI: 10.7868/S25000640250103.
23. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. On the Deformation of a Composite Rod in the Framework of Gradient Thermoelasticity, *Materials Physics Mechanics*, 2020, vol. 46, no. 1, pp. 27–41. DOI: 10.18149/MPM.4612020_3.
24. Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Solution of the Problem of Gradient Thermoelasticity for a Coated Strip, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 2, pp. 181–196 (in Russian). DOI: 10.26907/2541-7746.2021.2.181-196.
25. Vatulyan, A. O., Nesterov, S. A. and Yavruyan, O. V. The Models of Gradient Mechanics and Singularly Perturbed Boundary Value Problems, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, pp. 3604–3612. DOI: 10.1134/S1995080223080565.
26. Sladek, J., Sladek, V. and Repka, M. The Heat Conduction in Nanosized Structures, *Fizicheskaya Mezomekhanika*, 2021, vol. 24, no. 5, pp. 122–129. DOI: 10.24412/1683-805X-2021-5-122-129.
27. Zenkour, A. M., Abouelregal, A. E., Alnefaie, K. A., Zhang, X. and Aifantis, E. C. Nonlocal Thermoelasticity Theory for Thermal-Shock Nanobeams with Temperature-Dependent Thermal Conductivity, *Journal of Thermal Stresses*, 2015, vol. 38, no. 9, pp. 1049–1067. DOI: 10.1080/01495739.2015.1038490.
28. Sarkar, N. Thermoelastic Responses of a Finite Rod Due to Nonlocal Heat Conduction, *Acta Mechanica*, 2020, vol. 231, pp. 947–955. DOI: 10.1007/s00707-019-02583-9.
29. Yang, W. Z. and Chen, Z. T. Nonlocal Dual-Phase-Lag Heat Conduction and the Associated Nonlocal Thermal-Viscoelastic Analysis, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, vol. 156. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119752.
30. Awrejcewicz, J., Krysko, V. A., Pavlov, S. P., Zhigalov, M. V., Kalutsky, L. A. and Krysko, A. V. Thermoelastic Vibrations of a Timoshenko Microbeam Based on the Modified Couple Stress Theory, *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 99, pp. 919–943. DOI: 10.1007/s11071-019-04976-w.
31. Awrejcewicz, J., Krysko, V. A., Sopenk, A. A., Zhigalov, M. V., Kirichenko, A. V. and Krysko, A. V. Mathematical Modelling of Physically/Geometrically Non-Linear Micro-Shells With Account of Coupling of Temperature and Deformation Fields, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2017, vol. 104, pp. 635–654. DOI: 10.1016/j.chaos.2017.09.008.
32. Kirichenko, V. F., Awrejcewicz, J., Kirichenko, A. V., Krysko, A. V. and Krysko, V. A. On the Non-Classical Mathematical Models of Coupled Problems of Thermo-Elasticity for Multi-Layer Shallow Shells with Initial Imperfections, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 74, pp. 51–72. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.03.011.
33. Han, W., Hua, B. and Xiulin, R. Perspective: Predicting and Optimizing Thermal Transport Properties with Machine Learning Methods, *Energy and AI*, 2022, vol. 8, no. 12, article no. 100153 DOI: 10.1016/j.egyai.2022.100153.
34. Zobeiry, N. and Humfeld, K. D. A Physics-Informed Machine Learning Approach for Solving Heat Transfer Equation in Advanced Manufacturing and Engineering Applications, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2021, vol. 101, article no. 104232. DOI: 10.1016/j.engappai.2021.104232.
35. Schneider, T., Bedrikow, A. B. and Stahl, K. Enhanced Prediction of Thermomechanical Systems Using Machine Learning, PCA, and Finite Element Simulation, *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 2024, vol. 11, article no. 14. DOI: 10.1186/s40323-024-00268-0.
36. Shotaro, S. F. Thermodynamics and Feature Extraction by Machine Learning, *Physical Review Research*, 2020, vol. 2, no. 3. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.033415.
37. Li, Z., He, Y., Lei, J., Guo, S., Liu, D. and Wang, L. A Standard Experimental Method for Determining the Material Length Scale Based on Modified Couple Stress Theory, *International Journal of Mechanical Science*, 2018, vol. 141, pp. 198–205. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.03.035.
38. Li, Z., He, Y., Zhang, B., Lei, J., Guo, S. and Liu, D. Experimental Investigation and Theoretical Modelling on Nonlinear Dynamics of Cantilevered Microbeams, *European Journal of Mechanics – A / Solids*, 2019, vol. 78, article no. 103834. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2019.103834.
39. Feher, A., Lukacs, N., Somlai, L., Fodor, T., Szucs, M., Fulop, T., Van P. and Kovacs R. Size Effects and Beyond-Fourier Heat Conduction in Room-Temperature Experiments, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 2021, vol. 46, pp. 403–411. DOI: 10.1515/jnet-2021-0033.
40. Lam, D. C. C., Yang, F., Chong, A. C. M., Wang, J. and Tong, P. Experiments and Theory in Strain Gradient Elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, vol. 51, no. 8, pp. 1477–1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.

41. Liebold, C. and Muller, W. H. Comparison of Gradient Elasticity Models for the Bending of Micromaterials, *Computational Materials Science*, 2003, vol. 116, pp. 52–61. DOI: 10.1016/j.commatsci.2015.10.031.
42. Gusev, A. A. and Lurie, S. A. Strain-gradient Elasticity for Bridging Continuum and Atomistic Estimates of Stiffness of Binary Lennard-Jones Crystals, *Advanced Engineering Materials*, 2010, vol. 12, no. 6, pp. 529–533. DOI: 10.1002/adem.201000004.
43. Zhao, X. An Efficient Approach for the Numerical Inversion of Laplace Transform and Its Application in Dynamic Fracture Analysis of a Piezoelectric Laminate, *International Journal of Solids and Structures*, 2004, vol. 41, no. 3, pp. 3653–3674. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.01.006.
44. Vestyak, V. A. and Fedotenkov, G. V. Algorithm for the Numerical Laplace Transform Inversion in the Class of Generalized Functions Forming an Algebra with Convolution, *Prikladnaya matematika i matematicheskaya fizika* [Applied Mathematics and Mathematical Physics], 2015, vol. 1, no. 1, pp. 67–76 (in Russian). DOI: 10.18262/ammp.2015.0101-05.

Received January 9, 2025

SERGEY A. NESTEROV

Southern Mathematical Institute of VSC RAS,

53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,

Leading Researcher of the Department of Differential Equations

E-mail: 1079@list.ru

<https://orcid.org/0000-0003-3780-5104>