

УДК 517.5

DOI 10.46698/v5873-0367-2681-e

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ
В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА И ЗНАЧЕНИЕ ПОПЕРЕЧНИКОВ
НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

К. К. Палавонов¹, Х. М. Хуромонов¹

¹ Международной университет туризма и предпринимательства Таджикистана,
Таджикистан, 734055, Душанбе, Борбад, 48/5

E-mail: kurbonazar-1987@mail.ru, khuromon@mail.ru

Аннотация. В работе найдены точные значения экстремальной характеристики специального вида, которая связывает наилучшее среднеквадратическое полиномиальное приближение аналитических в единичном круге функций $f \in B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) с модулем непрерывности m -го порядка $\omega_m(z^r f^{(r)}, u)_{B_2}$ r -й производной $f^{(r)}$, принадлежащей пространству Бергмана B_2 . При этом экстремальная характеристика содержит этот модуль не только под знаком интеграла, но и вне интеграла. Доказанное утверждение в теореме 1 является обобщением одного известного результата С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова [17], полученного для классического модуля непрерывности m -го порядка $\omega_m(f^{(r)}, t)_{L_2}$ периодических функций $f \in L_2[0, 2\pi]$ с производной $f^{(r)} \in L_2[0, 2\pi]$, на случай модуля непрерывности $\omega_m(z^r f^{(r)}, u)_{B_2}$ аналитических в единичном круге функций с производной $f^{(r)} \in B_2$. Это позволяет вычислить точные значения бернштейновского, колмогоровского, линейного, гельфандовского и проекционного n -поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_2 .

Ключевые слова: среднеквадратическое приближение аналитических в круге функций, пространство Бергмана, n -поперечники.

AMS Subject Classification: 30E10.

Образец цитирования: Палавонов К. К., Хуромонов Х. М. Среднеквадратическое приближение функций в пространстве Бергмана и значение поперечников некоторых классов функций // Владикавк. мат. журн.—2026.—Т. 28, вып. 2.—С. 108–120. DOI: 10.46698/v5873-0367-2681-e.

1. Введение

Вычислению значений n -поперечников различных классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространствам Бергмана B_p ($1 \leq p \leq \infty$), посвящены, например, работы [1–12]. В настоящей статье мы продолжим эту тематику и вычислим точные значения n -поперечников некоторых классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности m -го порядка, усредненные значения которых ограничены сверху заданной мажорантой в пространстве Бергмана.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел. Пусть далее $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U .

Говорят [1], что аналитическая в единичном круге U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (1)$$

принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty. \quad (2)$$

Для производной r -го порядка функции $f \in A(U)$ выполняется равенство

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1) c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Ради краткости, введем обозначение

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1) = k!/(k-r)!, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k > r. \quad (4)$$

Всюду далее символом $B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $B_2^{(0)} = B_2$) обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству B_2 , производная r -го порядка $f^{(r)}(z)$, умноженная на z^r , также принадлежит B_2 , т. е.

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических многочленов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \{ \|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n \} \quad (5)$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f \in B_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$. Хорошо известно [1, с. 203], что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где $T_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда (1). Запишем норму (2) в более удобном нам виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}$$

и символом

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) := \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим конечную разность m -го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t с шагом h . Равенством

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}$$

обозначим норму разности m -го порядка функции $f \in B_2$.

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f, \tau)_2 := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \leq \tau \}. \quad (7)$$

Пользуясь соотношениями (3) и (4), для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\Delta_h^m((\rho e^{it})^r f(\rho e^{it})) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^k e^{ikt} (1 - e^{ikh})^m.$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h^m((\rho e^{it})^r f(\rho e^{it}))\|_2^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh)^m \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\omega_m^2(z^r f^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh)^m. \quad (9)$$

2. Основные результаты

Имеет место следующая

Теорема 1. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $0 < \tau \leq \pi/n$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^\tau (t-u) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_2 du \right\}^{m/2}} = \frac{1}{(n\tau)^m}. \quad (10)$$

◁ В работе [13] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kt \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \cdot \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2. \quad (11)$$

Интегрируя обе стороны неравенства (11) относительно t в пределах от 0 до u , будем иметь

$$uE_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{\sin ku}{k} \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \cdot \int_0^u \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 dt.$$

Снова интегрируя полученное неравенство по u в пределах от 0 до τ , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{1 - \cos k\tau}{k^2} \\ \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \cdot \int_0^{\tau} \int_0^u \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 dt du. \end{aligned} \quad (12)$$

Заменив в выражении под знаком суммы дробь $1/k^2$ ($k = n, n+1, \dots$) на большую дробь $1/n^2$, неравенство (12) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1 - \cos k\tau) \\ \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \cdot \int_0^{\tau} \int_0^u \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 dt du. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1 - \cos k\tau) \\ + E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \cdot \int_0^{\tau} \int_0^u \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 dt du. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя неравенство (11), преобразуем первое слагаемое в правой части (13) и применяя метод интегрирования по частям в двойном интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{2} E_{n-1}^{2/m}(f)_2 \leq \frac{1}{n^2} \left(E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \right) \\ + E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \cdot \int_0^{\tau} (\tau - u) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 du \\ = \frac{E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2}{2n^2 \cdot \alpha_{n,r}^{2/m}} \cdot \left\{ \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^{\tau} (\tau - u) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_2 du \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Неравенство (14) имеет место для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$, а потому из него получаем оценку сверху экстремальной величины, расположенной в левой части равенства (10):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^{\tau} (\tau - u) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_2 du \right\}^{m/2}} \leq \frac{1}{(n\tau)^m}. \quad (15)$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной величины рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, для которой в силу (6) и (9) имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f_0)_2 &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \omega_m^2(z^r f_0^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos nt)^m \frac{1}{n+1}, \\ \omega_m^{2/m}(z^r f_0^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^\tau (\tau - u) \omega_m^{2/m}(z^r f_0^{(r)}, u)_2 du &= (n\tau)^m \frac{\alpha_{n,r}^{2/m}}{(\sqrt{n+1})^{2/m}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Пользуясь равенствами (16) запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^\tau (\tau - u) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_2 du \right\}^{m/2}} \\ \geq \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f_0)_2}{\left\{ \omega_m^{2/m}(z^r f_0^{(r)}, t)_2 + n^2 \int_0^\tau (\tau - u) \omega_m^{2/m}(z^r f_0^{(r)}, u)_2 du \right\}^{m/2}} \\ = \frac{\alpha_{n,r}/\sqrt{n+1}}{(\alpha_{n,r}/\sqrt{n+1}) \cdot (n\tau)^m} = \frac{1}{(n\tau)^m}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сопоставляя оценку сверху (15) с оценкой снизу (17), получаем утверждение теоремы 1. $\triangleright$

Теорема 2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{n^{-m/2} \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \sin nt dt \right\}^{m/2}} = \frac{1}{2^m}. \quad (18)$$

$\triangleleft$ Умножая обе части неравенства (11) на $\sin nt$ и интегрируя по отрезку $[0, \pi/n]$, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_2 \int_0^{\pi/n} \sin nt dt - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \int_0^{\pi/n} \cos kt \cdot \sin nt dt \\ \leq E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \sin nt dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как для $k \geq n$ интеграл $\int_0^{\pi/n} \cos kt \sin nt dt \leq 0$, то из (19) имеем

$$\frac{2}{n} E_{n-1}^{2/m}(f)_2 \leq \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \sin nt dt,$$

или, что то же,

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^m} \frac{n^{m/2}}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \sin nt dt \right)^{m/2}. \quad (20)$$

Откуда следует оценка сверху

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{n^{-m/2} \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \sin nt \, dt \right\}^{m/2}} \leq \frac{1}{2^m}. \quad (21)$$

Чтобы получить такую же оценку снизу воспользуемся экстремальной функцией $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, для которой верны равенства (16), и воспользовавшись которыми, получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{n^{-m/2} \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \sin nt \, dt \right\}^{m/2}} \\ & \geq \frac{n^{-m/2} \alpha_{n,r} E_{n-1}(f_0)_2}{\left\{ \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f_0^{(r)}, t)_2 \sin nt \, dt \right\}^{m/2}} = \frac{n^{-m/2} \alpha_{n,r} / \sqrt{n+1}}{2^m (n^{-m/2} \alpha_{n,r} / \sqrt{n+1})} = \frac{1}{2^m}. \end{aligned} \quad (22)$$

Требуемое равенство (18) получаем из сравнения неравенств (21) и (22). $\triangleright$

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \omega_m \left(z^r f^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right)_2. \quad (23)$$

Если функция $\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2$ для любых $t \in [0, \pi/(2n)]$ удовлетворяет условию

$$2 \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}; \pi/(2n))_2 \geq \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 + \omega_m^{2/m} \left(z^r f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t \right)_2, \quad (24)$$

то неравенство (23) можно уточнить. Повторяя выкладки, приведенные в [14, с. 266], применительно к интегралу (20), где в качестве функции $l(t)$ вместо линейной взята функция $l(t) = \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}; t)_2$ при $t \in [0, \pi/(2n)]$ и $l(t) = 2 \omega_m^{2/m}(f^{(r)}; \pi/(2n))_2 - \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \pi/n - t)_2$ при $t \in [\pi/(2n), \pi/n]$ получим

Следствие 2. На множестве функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых функция $\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}; t)_2$ удовлетворяет условию (24), справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \omega_m(z^r f^{(r)}, \pi/(2n))_2, \quad (25)$$

которое для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$, превращается в равенство.

3. Точные значения n -поперечников некоторых классов функций в B_2

Для формулировки последующих результатов напомним необходимые понятия и определения из теории n -поперечников. Пусть $S := \{f : \|f\|_2 \leq 1\}$ — единичный шар в B_2 ; $\mathcal{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2 ; $\mathcal{L}_n \subset B_2$ — n -мерное подпространство; $\mathcal{L} \subset B_2$ — подпространство коразмерности n ; $\Lambda : B_2 \rightarrow \mathcal{L}^n$ —

непрерывный линейный оператор; $\Lambda^\perp : B_2 \rightarrow \mathcal{L}^n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathcal{M}, B_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2 \}, \\ d_n(\mathcal{M}, B_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_2 : \varphi \in \mathcal{L}_n \} : f \in \mathcal{M} \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \}, \\ \delta_n(\mathcal{M}, B_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \Lambda f\|_2 : f \in \mathcal{M} \} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \}, \\ d^n(\mathcal{M}, B_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_2 : f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}^n \} : \mathcal{L}^n \subset B_2 \}, \\ \Pi_n(\mathcal{M}, B_2) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \Lambda^\perp f\|_2 : f \in \mathcal{M} \right\} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским* и *проекционным n -поперечниками* подмножества $\mathcal{M} \subset B_2$.

Указанные n -поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве B_2 связаны соотношениями (см., например, [15, 16]):

$$b_n(\mathcal{M}, B_2) \leq d^n(\mathcal{M}, B_2) \leq d_n(\mathcal{M}, B_2) = \delta_n(\mathcal{M}, B_2) = \Pi_n(\mathcal{M}, B_2). \quad (26)$$

Всюду далее под $\Phi(t)$, $0 \leq t < \infty$, понимаем непрерывную монотонно возрастающую функцию, обращающуюся в нуль в точке $t = 0$. Следуя работе [17], рассмотрим в пространстве B_2 классы функций:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*) &:= \left\{ f \in B_2^{(r)} : \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \int_0^t (t - \tau) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \tau)_2 d\tau \leq \Phi_*^{2/m}(t), \ 0 < t \leq 2\pi \right\}, \end{aligned}$$

где $\Phi_*(t) = t^{4m/\pi^2}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$.

Аналогичным образом, исходя из результата теоремы 2, в B_2 определим классы функций:

$$W_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in B_2^{(r)} : \frac{\pi}{2t} \int_0^t \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \tau)_2 \sin \frac{\pi\tau}{t} d\tau \leq \Phi^2(t), \ 0 < t \leq 2\pi \right\}.$$

Положим еще

$$(1 - \cos tu)_* := \{1 - \cos tu, \text{ если } tu \leq \pi; \ 2, \text{ если } tu > \pi\}. \quad (27)$$

Теорема 3. Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \rho_n \left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*); B_2 \right) &= E_{n-1} \left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*) \right)_2 \\ &:= \sup \{ E_{n-1}(f) : f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*) \} = \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \cdot \left(\frac{\pi}{n}\right)^{4m/\pi^2}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\rho_n(\cdot)$ — любые из перечисленных n -поперечников.

◁ Из неравенства (15) для производной функции $f \in B_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}(n\tau)^m} \cdot \left\{ \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \tau)_2 + n^2 \int_0^\tau (\tau - u) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_2 du \right\}^{m/2}. \quad (29)$$

Полагая в (29) $\tau = \pi/n$, для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*)$ имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\leq \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \left\{ \omega_m^{2/m} \left(z^r f^{(r)}, \frac{\pi}{n} \right)_2 + n^2 \int_0^{\pi/n} \left(\frac{\pi}{n} - u \right) \omega_m^{2/m} (z^r f^{(r)}, u)_2 du \right\}^{m/2} \\ &\leq \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \cdot \Phi_* \left(\frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{4m/\pi^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (30) получаем оценки сверху

$$\rho_n \left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*); B_2 \right) \leq E_{n-1} \left(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*) \right)_2 \leq \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{4m/\pi^2}. \quad (31)$$

Для получения оценок снизу рассмотрим в подпространстве $\mathcal{P}_n$ шар

$$\mathcal{P}_n := \left\{ P_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|P_n\| \leq \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{4m/\pi^2} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*)$. Для этого нам понадобится неравенство

$$\omega_m^2(z^r P_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos kt)_*^m \|P_n\|_2^2, \quad (32)$$

которое еще надо доказать. Действительно, в силу (9) и (27) имеем

$$\begin{aligned} \omega_m^2(z^r P_n^{(r)}, t)_2 &= 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r+1}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} (1 - \cos kh)^m \\ &\leq 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos kt)_*^m \sum_{k=r+1}^n \frac{|c_k(P_n)|^2}{k+1} \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos kt)_*^m \cdot \|P_n\|_2^2 \end{aligned}$$

и неравенство (32) доказано.

Пусть $0 < t \leq \pi/n$. Учитывая определение класса $\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*)$, для произвольного полинома $P_n \in B_n$ в силу (32) имеем

$$\begin{aligned} \omega_m^{2/m}(z^r P_n^{(r)}, t)_2 + \left(\frac{\pi}{t} \right)^2 \int_0^t (t - \tau) \omega_m^{2/m}(z^r P_n^{(r)}, \tau)_2 d\tau \\ \leq 2 \alpha_{n,r}^{2/m} \|P_n\|_2^{2/m} \left\{ 1 - \cos nt + \left(\frac{\pi}{t} \right)^2 \int_0^t (t - \tau) (1 - \cos n\tau) d\tau \right\} \\ \leq 2 \alpha_{n,r}^{2/m} \frac{1}{\pi^2 \alpha_{n,r}} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{8/\pi^2} \left\{ 1 - \cos nt + \left(\frac{\pi}{t} \right)^2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1 - \cos nt}{n^2} \right) \right\} \\ = \left\{ 1 + 2(1 - \cos nt) \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{(nt)^2} \right) \right\} \cdot \left(\frac{\pi}{n} \right)^{8/\pi^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть теперь $t > \pi/n$. На основании аналогичных соображений с учетом (22) получаем

$$\begin{aligned} & \omega_m^{2/m}(z^r P_n^{(r)}, t)_2 + \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \int_0^t (t-\tau) \omega_m^{2/m}(z^r P_n^{(r)}, \tau)_2 d\tau \\ & \leq 2\alpha_{n,r}^{2/m} \|P_n\|_2^{2/m} \left\{ 2 + \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \left[\int_0^{\pi/n} (t-\tau)(1-\cos n\tau) d\tau + 2 \int_{\pi/n}^t (t-\tau) d\tau \right] \right\} \\ & \leq \left\{ 2 \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) - \frac{2\pi}{nt} + \frac{\pi^2 - 4}{(nt)^2} \right\} \cdot \left(\frac{\pi}{n}\right)^{8/\pi^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Полагая в правые части (33) и (34) $u = nt/\pi$, получаем неравенство

$$u^{8/\pi^2} \geq \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi^2}(1 - \cos \pi u) \left(1 - \frac{1}{u^2}\right), & \text{при } 0 < u \leq 1, \\ 2 \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{4}{u^2}\right), & \text{при } 1 \leq u < \infty. \end{cases} \quad (35)$$

Справедливость неравенства (35) доказана в работе [17] и тем самым включение $B_n \subset \mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*)$ доказано. Пользуясь определением бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу

$$\rho_n(\mathcal{F}_m^{(r)}(\Phi_*); B_2) \geq b_n(B_n, B_2)_2 \geq \frac{1}{\pi^m \alpha_{n,r}} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{4m/\pi^2}. \quad (36)$$

Требуемые равенства (28) получаем из сопоставления неравенств (31) и (36). $\triangleright$

Теорема 4. Пусть функция $\Phi(t)$ удовлетворяет условию

$$\Phi^2\left(\frac{t}{\mu}\right) \int_0^{\pi\mu} (1 - \cos \tau)_* \sin \frac{\tau}{\mu} d\tau \leq 2\mu \Phi^2(t). \quad (37)$$

Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \rho_n(W_m^{(r)}(\Phi), B_2) &= \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Phi))_2 \\ &:= \sup\{E_{n-1}(f) : f \in W_m^{(r)}(\Phi)\} = \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \cdot \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\rho_n(\cdot)$ — любой из n -поперечников, перечисленных выше.

$\triangleleft$ Оценку сверху получим из теоремы 2 и неравенства (26) между n -поперечниками

$$\begin{aligned} \rho_n(W_m^{(r)}(\Phi), B_2) &\leq \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(\Phi))_2 \\ &\leq \sup_{f \in W_m^{(r)}(\Phi)} \frac{1}{\alpha_{n,r}} \frac{1}{2^{m/2}} \left\{ \frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}; t)_2 \sin nt dt \right\}^{m/2} \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned} \quad (39)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, вводим в рассмотрение сферу

$$\sigma_n := \left\{ p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_2 = \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \cdot \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

и докажем включение $\sigma_n \subset W_m^{(r)}(\Phi)$. Так как для произвольного полинома $p_n \in \sigma_n$

$$\begin{aligned} \omega_m^2(z^r p_n^{(r)}; t)_2 &= 2^m \sup_{0 \leq \tau \leq t} \sum_{k=r}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} (1 - \cos k\tau)^m \\ &\leq 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos n\tau)_*^m \sum_{k=r}^n \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos n\tau)_*^m \cdot \|p_n\|_2^2, \end{aligned}$$

то мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2t} \int_0^t \omega_m^{2/m}(z^r p_n^{(r)}; \tau)_2 \sin \frac{\pi\tau}{t} d\tau &\leq \frac{\pi}{2t} \cdot 2 \alpha_{n,r}^{2/m} \cdot \|p_n\|_2^{2/m} \int_0^t (1 - \cos n\tau)_* \sin \frac{\pi\tau}{t} d\tau \\ &= \frac{n}{2\mu} \Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^u (1 - \cos n\tau)_* \sin \frac{\pi\tau}{\mu} d\tau = \frac{1}{2\mu} \Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\pi\mu} (1 - \cos u)_* \sin \frac{u}{\mu} du \leq \Phi^2(\mu), \end{aligned}$$

и включение $\sigma_n \subset W_m^{(r)}(\Phi)$ доказано. Но тогда, согласно определению бернштейновского n -поперечника, запишем оценку снизу

$$b_n(W_m^{(r)}(\Phi), B_2) \geq b_n(\sigma_n, B_2) \geq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \cdot \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (40)$$

Сравнивая неравенства (39) и (40), получаем требуемые равенства (38), чем и завершаем доказательство теоремы 4. $\triangleright$

В заключение отметим, что функции Φ , удовлетворяющие ограничения (37), существуют [18], а классы функций, подобные введенным выше, в периодическом случае в пространстве L_2 рассмотрен в [19], а для голоморфных в единичном круге в [20].

Доказанные теоремы 2 и 4 являются обобщением результатов В. В. Шалаева [21], полученных для класса $L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ — периодических функций, у которых производная $f^{(r)} \in L_2[0, 2\pi]$ на случай классов аналитических функций $B_2^{(r)}$ в пространстве Бергмана B_2 .

Литература

1. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного.—М.-Л.: Наука, 1964.
2. Двейрин М. З. Поперечники и ε -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге // Теория функций, функц. анализ и прил.—1975.—Т. 23.—С. 32–46.
3. Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. матем. наук.—1990.—Т. 45, № 5.—С. 197–198.
4. Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. матем. журн.—1990.—Т. 42, № 7.—С. 873–881.
5. Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Докл. АН РТ.—2002.—Т. 383, № 2.—С. 171–174.
6. Лангаршоев М. Р. Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана // Докл. АН РТ.—2005.—Т. 48, № 3–4.—С. 12–17.

7. Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов. Матем.—2020.—№ 2.—С. 74–92. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-2-74-92.
8. Шабозов М. Ш., Кадамшоев Н. У. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Матем. заметки.—2021.—Т. 110, № 2.—С. 266–281. DOI: 10.4213/mzm13054.
9. Лангаршоев М. Р. Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Вестн. рос. ун-тов. Математика.—2024.—Т. 29, № 145.—С. 65–76. DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76.
10. Саидусайнов М. С. Наилучшее полиномиальное приближение и значения поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Докл. АН РТ.—2009.—Т. 52, № 9.—С. 661–668.
11. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 1.—С. 86–97. DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11400.
12. Хуромонов Х. М. Точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве B_2 и поперечники некоторых классов функций // Изв. вузов. Матем.—2022.—№ 3.—С. 61–70. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-61-70.
13. Хуромонов Х. М. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Изв. вузов. Матем.—2023.—№ 5.—С. 71–81. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-5-71-81.
14. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближений.—М.: Наука, 1987.—472 с.
15. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений.—М.: Изд-во МГУ, 1976.—325 с.
16. Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—252 p.—(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge; vol. 7). DOI: 10.1007/978-3-642-69894-1.
17. Вакарчук С. Б., Щитов А. Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журн.—2004.—Т. 56, № 11.—С. 1458–1466.
18. Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР.—1984.—Т. 29, № 8.—С. 415–418.
19. Тайков Л. В. Наилучшее приближение дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки.—1977.—Т. 22, № 4.—С. 535–542.
20. Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки.—1977.—Т. 22, № 2.—С. 285–295.
21. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн.—1991.—Т. 43, № 1.—С. 125–129.

Статья поступила 9 февраля 2025 г.

ПАЛАВОНОВ КУРБОННАЗАР КУРБОНБЕКОВИЧ
Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана,
доцент кафедры математики в экономике
Таджикистан, 734055, Душанбе, пр. Борбад, 48/5
E-mail: kurbonazar-1987@mail.ru
<https://orcid.org/0009-0006-0126-8190>

ХУРОМОНОВ ХУРОМОН МАМАДАМОНОВИЧ
Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана,
доцент кафедры математики в экономике
Таджикистан, 734055, Душанбе, пр. Борбад, 48/5
E-mail: khuromon@mail.ru
<https://orcid.org/0009-0008-0469-3090>

THE ROOT-MEAN-SQUARE APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS
IN BERGMAN SPACE AND THE VALUE OF THE WIDTHS
OF SOME CLASSES OF FUNCTIONSPalavonov, Q. Q.¹ and Khuromonov, Kh. M.¹¹ International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan,
48/5 Borbad Ave., Dushanbe 734055, Tajikistan

E-mail: kurbonazar-1987@mail.ru, khuromon@mail.ru

Abstract. In this paper, the exact values of the extreme characteristic of a special kind, which connects the best polynomial approximation of analytical functions in a unit circle $f \in B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) with modulus of continuity of m -th order $\omega_m(z^r f^{(r)}, u)_{B_2}$ of the r -th derivative $f^{(r)}$ belonging to the Bergman space B_2 , are found. In this case, the extreme characteristic contains this modulus of continuity not only under the sign of the integral, but also outside the integral. The statement proved in Theorem 1 generalizes a well-known result by S. B. Vakarchuk and A. N. Shitova [17], obtained for the classical modulus of continuity of m -th order $\omega_m(f^{(r)}, t)_{L_2}$ of periodic functions $f \in L_2[0, 2\pi]$ with derivative $f^{(r)} \in L_2[0, 2\pi]$, to the case of the modulus of continuity $\omega_m(z^r f^{(r)}, u)_{B_2}$ of analytic functions in the unit circle with derivative $f^{(r)} \in B_2$. The obtained result provides the opportunity to compute the exact values of the Bernstein, Kolmogorov, linear, Gelfand, and projection n -widths of certain classes of functions in the Bergman space B_2 .

Keywords: root-mean-square approximation of analytic functions in the disk, Bergman space, n -width.

AMS Subject Classification: 30E10.

For citation: Palavonov, Q. Q. and Khuromonov, Kh. M. The Root-Mean-Square Approximations of Functions in Bergman Space and the Value of the Widths of Some Classes of Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2026, vol. 28, no. 3, pp. 108–120. (in Russian). DOI: 10.46698/v5873-0367-2681-e.

References

1. Smirnov, V. I. and Lebedev, N. A. Functions of a Complex Variable: Constructive Theory, Cambridge, Mass., M.I.T. Press, 1968, 488 p.
2. Dveirin, M. Z. Widths and ε -Entropy of Classes Functions Analytic in the Unit Circle, *Teoriya Funktsiy, Funktsional'nyy Analiz i ikh Prilozheniya*, [Function Theory, Functional Analysis and Application], 1975, vol. 23, pp. 32–46 (in Russian).
3. Farkov, U. A. Widths of Hardy Classes and Bergman Classes on the Ball in $\mathbb{C}^n$, *Russian Mathematical Surveys*, 1990, vol. 45, no. 5, pp. 229–231. DOI: 10.1070/RM1990v045n05ABEH002677.
4. Vakarchuk, S. B. Diameters of Certain Classes of Functions Analytic in the Unit Disc. I, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1990, vol. 42, no. 7, pp. 769–778. DOI: 10.1007/BF01062078.
5. Shabozov, M. Sh. Widths of Some Classes of Analytic Functions in the Bergman Space, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2002, vol. 383, no. 2, pp. 171–174 (in Russian).
6. Langarshoev, M. R. The Best Approximation and the Value of the Widths of Some Classes of Functions in the Bergman Space, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2005, vol. 48, no. 3–4, pp. 12–17 (in Russian).
7. Shabozov, M. Sh. and Khuromonov, Kh. M. On the best approximation in the mean of functions of a complex variable by Fourier series in the Bergman space, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2020, no. 2, pp. 74–92. DOI: 10.26907/0021-3446-2020-2-74-92.
8. Shabozov, M. Sh. and Qadamshoev, N. U. Sharp Inequalities between the Best Root-Mean-Square Approximations of Analytic Functions in the Disk and Some Smoothness Characteristics in the Bergman Space, *Mathematical Notes*, 2021, vol. 110, no. 2, pp. 248–260. DOI: 10.1134/S0001434621070269.
9. Langarshoev, M. R. The Best Approximation of Analytic in a Unit Circle Functions in the Bergman Weight Space $B_{2,\mu}$, *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2024, vol. 29, no. 145, pp. 65–76 (in Russian). DOI: 10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76.

10. Saidusainov, M. S. The Best Polynomial Approximation and the Values of the Widths of Some Classes of Functions in the Weighted Bergman Space, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2009, vol. 52, no. 9, pp. 661–668 (in Russian).
11. Shabozov, M. Sh. and Saidusainov, M. S. Mean-Square Approximation of Complex Variable Functions by Fourier Series in the Weighted Bergman Space, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 1, pp. 86–97. DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11400.
12. Khuromonov, Kh. M. Exact Inequalities between the Best Polynomial Approximations and Averaged Norms of Finite Differences in the B_2 Space and Widths of Some Classes of Functions, *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, pp. 50–58. DOI: 10.3103/S1066369X22030045.
13. Khuromonov, Kh. M. On the Best Simultaneous Approximation of Functions in the Bergman Space B_2 , *Russian Mathematics*, 2023, vol. 67, pp. 50–59. DOI: 10.3103/S1066369X23050055.
14. Korneychuk, N. P. *Exact Constants in Approximation Theory*, Moscow, Nauka, 1987, 472 p. (in Russian).
15. Tikhomirov, V. M. *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow, MGU, 1976, 325 p. (in Russian).
16. Pinkus, A. n -Widths in Approximation Theory. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics*; vol. 7, Berlin, Springer-Verlag, 1985, 294 p.
17. Vakarchuk, S. B. and Shchitov, A. N. Best Polynomial Approximations in L_2 and Widths of Some Classes of Functions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2004, vol. 56, no. 11, pp. 1738–1747. DOI: 10.1007/s11253-005-0148-0.
18. Aynulloev, N. The Value of the Diameters of Some Classes Differentiable Functions in L_2 , *Doklady Akademii Nauk Tadzhikskoi SSR*, 1984, vol. 29, no. 8, pp. 415–418 (in Russian).
19. Taikov, L. V. Best Approximations of Differentiable Functions in the Metric of the Space L_2 , *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1977, vol. 22, no. 4, pp. 535–542. DOI: 10.1007/BF01146425.
20. Taikov, L. V. Diameters of Certain Classes of Analytic Functions, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 650–656. DOI: 10.1007/BF01780976.
21. Shalaev, V. V. On Widths in L_2 Classes of Differentiable Functions Defined by Higher-Order Moduli of Continuity, *Ukrainian Mathematical Journal*, 1991, vol. 43, no 1, pp. 104–107 (in Russian).

Received February 9, 2025

QURBONNAZAR Q. PALAVONOV

International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan,
48/5 Borbad Ave., Dushanbe 734055, Tajikistan,

Associate Professor of the Department of Mathematics in Economics

E-mail: kurbonazar-1987@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0006-0126-8190>

KHUROMON M. KHUROMONOV

International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan,
48/5 Borbad Ave., Dushanbe 734055, Tajikistan,

Associate Professor of the Department of Mathematics in Economics

E-mail: khuromon@mail.ru

<https://orcid.org/0009-0008-0469-3090>